базис R^k, то существуют γ_l, $l = 1, \ldots, k$, такие, что

$$x = \gamma_1 z_1^\circ + \ldots + \gamma_k z_k^\circ$$

Из соотношения (2.6) следует, что справедливо равенство

$$x = \gamma_1 z_1^\circ + \ldots + \gamma_k z_k^\circ + d(\beta_1 z_1^\circ + \ldots + \beta_n z_n^\circ)$$

Взяв d достаточно большим, получим, что

$$x = \gamma_1^\circ z_1^\circ + \ldots + \gamma_n^\circ z_n^\circ$$

причем $\gamma_i^\circ > 0$.

Если $p_0 \neq 0$, аналогично можно показать, что в этом случае положительный базис образуют векторы p_0, z_i°.

Рассмотрим множество

$$D_1 = \{x \mid x \in R^k, \ \langle p_0, x\rangle \leqslant \mu_0\}$$

где $\mu_0 = \sum_{l=1}^{r} \alpha_l \mu_l$. Видно, что $D \subset D_1$. Теорема доказана.

3. Рассмотрим игру Г. Определим функцию $f(n) = \min\{m \mid$ в игре Г происходит уклонение от встречи для любого допустимого $z^\circ\}$. Из теоремы 2 и результатов работ [4, 5] следует

Теорема 3. Пусть D — неограниченное многогранное множество. Тогда существуют $c_1(D) > 0$, $c_2(D) > 0$, такие, что для любого $n \neq 1$ имеет место следующее неравенство:

$$c_1(D)\, n \ln n \leqslant f(n) \leqslant c_2(D)\, n \ln n$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б. Н., Раппопорт И. С.* Об одной задаче группового преследования // Кибернетика. 1979. № 6. С. 145—146.
2. *Иванов Р. П.* Простое преследование — убегание на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1318—1321.
3. *Петров Н. Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606—617.
4. *Петров Н. Н., Петров Н. Никандр.* О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366—1374.
5. *Петров Н. Н.* Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. № 22. Вып. 4. С. 107—109.
6. *Григоренко Н. Л.* Задача преследования в дифференциальных играх многих лиц Мат. сб. 1988. Т. 135, № 1. С. 36—45.
7. *Чикрий А. А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 906—913.
8. *Чикрий А. А., Шишкина Н. Б.* О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений // АиТ. 1985. № 2. С. 59—69.

Ижевск

Поступила в редакцию
15.IV.1988

УДК 531.01

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Кузьминых В. А.

Выводится общее решение векторного дифференциального уравнения возмущенного кеплеровского движения в случае, когда векторы положения и возмущающего ускорения коллинеарны. Используется замена переменных, при которой новая независимая переменная выражается через начальные значения фазовых переменных и время при помощи эллиптической функции Якоби. Двухточечная краевая задача для исходного уравнения приводится к задаче Коши. Получено параметрическое представление регуляризованной траектории движения материальной точки под действием центральной силы.

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение возмущенного кеплеровского движения

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = -\mu \mathbf{r} r^{-3} + w\mathbf{r} \tag{1}$$

в котором $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}^{\cdot\cdot}$ — векторы положения и ускорения материальной точки, μ — гравитационная постоянная притягивающего центра, w — некоторая постоянная.

Дифференциальное уравнение (1) определяет промежуточные орбиты геоцентрической спутниковой задачи четырех тел [1], а также гелиоцентрической планетной задачи n тел [2].

В ряде работ (например, [3]) приводится общий интеграл уравнения типа (1), который не разрешается относительно искомых координат вектора $\mathbf{r}$ (x, y, z).

Будем считать, что в исходной системе координат для момента времени $t = t_0$ заданы начальные условия

$$\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{r}^{\cdot}(t_0) = (x_0^{\cdot}, y_0^{\cdot}, z_0^{\cdot}).$$

Введем в рассмотрение постоянный вектор момента количества движения и оскулирующий вектор Лапласа

$$\mathbf{h} = [\mathbf{r}, \mathbf{r}^{\cdot}] = (h_1, h_2, h_3), \quad \mathbf{l} = [r^{\cdot}, h] - \mu \mathbf{r} r^{-1}$$

Дифференциальное уравнение для l принимает вид

$$\mathbf{l}^{\cdot} = -\mu^{-1} w r [\mathbf{l}, \mathbf{h}],$$

Для решения этого уравнения в конечном виде целесообразно ввести новый параметр — регулярное время ξ, определяемое дифференциальным соотношением

(2) $$d\xi = -\mu^{-1} w r dt$$

Тогда при условии $w \neq 0$, $h \neq 0$ эквивалентная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $d\mathbf{l}/d\xi = [\mathbf{l}, \mathbf{h}]$ интегрируется по правилам операционного исчисления [4].

В результате получаем

(3) $$l_1(\xi) = l_{10}\cos h\xi + (l_{20}h_3 - l_{30}h_2)\, h^{-1}\sin h\xi + (l_{10}h_1^2 + l_{20}h_1h_2 + l_{30}h_1h_3)\, h^{-2}(1 - \cos h\xi) \quad (1\ 2\ 3)$$

где величины l_1, l_2, l_3, l_{10}, l_{20}, l_{30} — соответственно переменные и начальные значения компонент вектора Лапласа, а невыписанные соотношения получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

Далее будем использовать интеграл энергии

(4) $$\frac{l^2}{2h^2} - \frac{\mu^2}{2h^2} - \frac{w}{2} r^2 = H$$

Из равенства (4) определяем

(5) $$r = \left[\frac{2}{w}\left(\frac{l^2}{2h^2} - \frac{\mu^2}{2h^2} - H\right)\right]^{1/2}$$

Переходим к нахождению значения параметра ξ. В силу формулы (2) имеет место интеграл

(6) $$t = t_0 - \frac{\mu}{w}\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{r}$$

Подставляя (3), (4) в равенство (5) получаем

$$r = (A\cos^2 h\xi + B\sin h\xi\cos h\xi + C\cos h\xi + D\sin h\xi + G)^{1/2}$$

где A, B, C, D, G — постоянные коэффициенты. В результате тригонометрической замены $\xi = 2h^{-1}\operatorname{arctg}\sigma$ интеграл в (σ) переходит в интеграл эллиптического типа относительно σ:

(7) $$\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{r} = \frac{2}{h}\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{\Phi}}, \quad \Phi(\sigma) = r^2(1 + \sigma^2)^2$$

($\Phi(\sigma)$ — многочлен четвертой степени).

С учетом (7) равенство (6) запишем в виде

$$\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{\Phi}} = \frac{wh}{2\mu}(t_0 - t)$$

Из теории эллиптических интегралов следует, что заменой переменной $\sigma = (p + q\eta)/(1 + \eta)$ достигается стандартное разложение подынтегральной функции

$$(8) \qquad (q-p)\int\limits_{\beta}^{\eta} \frac{d\eta}{[\varkappa(\eta^2+a^2)(\eta^2+b^2)]^{1/2}} = \frac{wh}{2\mu}(t_0-t)$$

Из формулы (8) получаем [5]

$$\eta = b\,\mathrm{tn}\left(\frac{awh\sqrt{\varkappa}}{2(q-p)\mu}(t_0-t)+F(\alpha,k)\right)$$

где $F(\alpha, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода.

Отметим, что величины α, β и модуль эллиптической функции $\mathrm{tn}(\cdot)$ таковы:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(-\frac{p}{qb}\right), \quad \beta = -\frac{p}{q}, \quad k = \left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)^{1/2}$$

Далее на основании соотношений [3] и формул (2), (5) находится истинная аномалия θ по значениям

$$\cos\theta = \frac{h^2}{lr} - \frac{\mu}{l}, \quad \sin\theta = -\frac{hwr}{\mu l}\frac{dr}{d\xi}$$

Известные формулы [3] позволяют определить долготу восходящего узла, аргумент перицентра, истинную долготу, а затем с учетом полученых соотношений — координаты и компоненты скорости материальной точки.

Поставим краевую задачу определения решения уравнения (1) по заданным значениям $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ и $\Delta t = t_1 - t_0$. Будем предполагать, что векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ неколлинеарны. Необходимо отметить, что аналогичная краевая задача подробно решена для кеплеровского движения [2]. Найдем значения $x_0^{\cdot}$, $y_0^{\cdot}$, $z_0^{\cdot}$. Используя соотношение [3] $r^{\cdot} = Mr^{-1}$, $M = [wr^4 + 2Hr^2 + 2\mu r - h^2]^{1/2}$, а также интеграл кинематического момента $r^2\theta^{\cdot} = h$, получим равенства

$$(9) \qquad \Delta t = \int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{r\,dr}{M}, \quad \Delta\theta = h\int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{rM}$$

Отметим, что угол между векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ равен $\Delta\varphi = \Delta\theta + 2\pi m$, где m — некоторое целое число. Применяя нормальные эллиптические интегралы I_1, I_{-1} [6], равенства (9) запишем в виде

$$\Delta t = I_1(r, h, H)\Big|_{r_0}^{r_1}, \quad \Delta\varphi = hI_{-1}(r, h, H)\Big|_{r_0}^{r_1} + 2\pi m$$

Полученные соотношения образуют систему нелинейных уравнений относительно h и H. Определим коэффициент пропорциональности $c = h^{-1}\,|\,[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1]\,|$, а затем при условии сонаправленности $\mathbf{h}$ и $[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1]$ получим $\mathbf{h} = c^{-1}[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1]$. Далее по величинам x_0, y_0, z_0, h_1, h_2, h_3, $r_0^{\cdot}$ согласно [3] находим $x_0^{\cdot}$, $y_0^{\cdot}$, $z_0^{\cdot}$.

В заключение рассмотрим движение материальной точки, ускорение которой имеет только центральную составляющую

$$f(r) = -\mu r^{-2} + g(r)$$

Запишем интеграл энергии в виде

$$x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2} = 2\mu r^{-1} - 2V(r) + 2H, \quad V(r) = -\int g(r)\,dr$$

При помощи KS-преобразования [7] $(x, y, z, 0)^T = L(\mathbf{u})\,\mathbf{u}$ получаем регуляризованное уравнение

$$(10) \qquad \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} = \frac{H}{2}\mathbf{u} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}(u^2V(u^2)), \quad s = \int\limits_{t_0}^{t} r^{-1}(t)\,dt$$

(аргументом является переменная Зундмана s).

В результате замены

$$(11) \qquad d\tau = [1 - H^{-1}(V(u^2) - u^2g(u^2))]^{1/2}\,|\,ds\,|$$

решение уравнения (10) записывается в регуляризованной кеплеровской форме [7]

$$(12) \qquad \mathbf{u}(\tau) = c_0(-{}^1/_2H\tau^2)\,\mathbf{u}_0 + \tau c_1(-{}^1/_2H\tau^2)\,(\mathbf{u}_\tau')_0$$

Из второго равенства (10) и (11) при условии $dt > 0$ получаем

$$t = t_0 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{u^2\,d\tau}{[1 - H^{-1}(V(u^2) - u^2 g(u^2))]^{1/2}}$$

Соотношения (11) и (12) определяют точное параметрическое решение задачи Коши уравнения (10).

Автор благодарит В. Г. Демина и И. И. Косенко за обсуждение основных результатов работы на семинаре по классической механике в МГУ им. М. В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин В. Г.* О почти круговых орбитах искусственных спутников Земли // Искусственные спутники Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Вып. 8. С. 55—63.
2. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. 448 с.
3. *Рой А.* Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
4. *Гутер Р. С., Янпольский А. Р.* Дифференциальные уравнения. М.: Высш. шк., 1976. 304 с.
5. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1983, 176 с.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
7. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

Москва — Поступила в редакцию 18.II.1988

УДК 531.01

О ПРИМЕНЕНИИ РАСШИРЕНИЙ ПОЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Буров А. А.

При помощи методов, основанных на расширениях поля действительных чисел, указываются некоторые классы вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

1. Пусть R_ω — расширение поля действительных чисел, образованное числами вида

$$w = u + \omega v \quad u, v \in R \tag{1.1}$$

где, по определению, ω — символ, удовлетворяющий условию $\omega^2 = k$, $k \in R$. Для чисел w_1, $w_2 \in R_\omega$ естественным образом определены операции сложения, вычитания и умножения

$$w_1 \pm w_2 = (u_1 \pm u_2) + \omega (v_1 \pm v_2)$$

$$w_1 \cdot w_2 = (u_1 u_2 + k v_1 v_2) + \omega (u_1 v_2 + u_2 v_1)$$

Деление определено для всех чисел w_1, w_2 таких, что $w_2 \notin R_{\omega 0} = \{w : u^2 - kv^2 = 0,\ u,\ v \in R\}$, при этом

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{u_1 u_2 - k v_1 v_2}{u_2^2 - k v_2^2} + \omega \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_2^2 - k v_2^2}$$

Если $k = -1$, то множество R_ω совпадает с полем комплексных чисел. Если $k = 0$, то числа из R_ω представляют собой объект исследования винтового исчисления [1]. При $k < 0$ множество $R_{\omega 0}$ состоит лишь из одного числа $w = 0 + \omega 0$. При $k \geqslant 0$ это множество образовано делителями нуля из R_ω. Введем обозначения: $u = \operatorname{Re}_\omega w$ — действительная часть, $\omega v = \omega \operatorname{Im}_\omega w$ — ω-мнимая часть числа.

Определение. Функция f, заданная в некоторой области $G \in R_\omega$, называется дифференцируемой в точке $w_0 \in G$, если для любого $\delta > 0$ существует предел

$$\frac{\partial f(w_0)}{\partial w} = \lim_{h \to 0} \frac{f(w_0 + h) - f(w_0)}{h}, \quad h \notin \left\{ w : \left| \frac{u^2}{v^2} - k \right| < \delta \right\}$$

не зависящий от способа стремления величины h к нулю и от параметра δ.