Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Петров Н. Н.

Рассматривается задача преследования группой управляемых объектов группы управляемых объектов с фазовыми ограничениями на состояния убегающих.

1. В R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и m убегающих E_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{\cdot} = ax_i + u_i, \quad \| u_i \| \leqslant 1, \quad a < 0 \tag{1.1}$$

Закон движения из убегающих E_j имеет вид

$$y_j^{\cdot} = ay_j + v, \quad \| v \| \leqslant 1 \tag{1.2}$$

При $t = 0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ и убегающих $y_1^\circ, \ldots, y_m^\circ$, причем

$$x_i^\circ \neq y_j^\circ, \quad \forall i, \forall j$$

Пусть $z^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_1^\circ, \ldots, y_m^\circ)$. Будем предполагать, что убегающие в процессе игры не покидают выпуклое многогранное множество

$$D = \{z \mid z \in R^k, \ \langle p_\lambda, z\rangle \leqslant \mu_\lambda, \ \lambda = 1, \ldots, r\}$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы, такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$. Пусть $T > 0$ произвольное число и σ некоторое конечное разбиение $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{s+1} = T$ интервала $[0, T]$.

Определение 1. Кусочно-программной стратегией V_j игрока E_j, заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений $b^l{}_j$, $l = 0, 1, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y_1(t_l), \ldots, y_m(t_l)) \tag{1.3}$$

измеримую функцию $v_l^j(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$, и такую, что $\| v_l^j(t) \| \leqslant 1$, $y_j(t) \in D$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 2. Кусочно-программной контрстратегией U_j игрока P_j, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений c_j^l, $l = 0, 1, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам (1.3) и управлениям $v_l^\mu(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, измеримую функцию $u_l^j(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$, и такую, что $\| u_l^j(t) \| \leqslant 1$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру $\Gamma = \Gamma(n, m, z^\circ, D)$.

Определение 3. Будем говорить, что в игре Γ возможно уклонение от встречи, если для любого $T > 0$ существуют разбиение σ интервала $[0, T]$, стратегии V_j игроков E_j, соответствующие разбиению σ, такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ игроков P_i существует номер $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$, такой, что

$$y_p(t) \neq x_i(t), \quad t \in [0, T]$$

где $y_p(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория E_p.

Определение 4. Будем говорить, что в игре Γ возможна поимка, если существует $T > 0$ и для любых траекторий $y_j(t)$ игроков E_j и для любого разбиения σ интервала $[0, T]$ существуют кусочно-программные контрстратегии U_i игроков P_i соответствующие разбиению σ, существуют моменты $\tau_j \in [0, T]$ и номера $p_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, такие, что

$$y_j(\tau_j) = x_{p_j}(\tau_j),$$

где $x_{p_j}(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория игрока P_{p_j}.

2. Рассмотрим игру $\Gamma_1 = \Gamma(n, 1, z^\circ, D)$. Можно считать, что $n \geqslant k$, так как в случае $n < k$, используя результаты [1, 2], можно показать, что в этой игре происходит уклонение от встречи.

Определение 5. Будем говорить, что векторы a_l, $l = 1, \ldots, s$ образуют положительный базис R^k, если для любого $x \in R^k$ существуют $\alpha_l > 0$, $l = 1, \ldots, s$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s$$

Предположим, что $a_1, \ldots, a_s$ — единичные векторы, и рассмотрим функции

$$\rho_l(a_l, v) = \langle a_l, v\rangle + \sqrt{\langle a_l, v\rangle^2 + 1 - \|v\|^2} \tag{2.1}$$

$$l = 1, 2, \ldots, s_1, \quad s_1 \leqslant s, \quad s_1 \geqslant 1$$

$$\rho_l(a_l, v) = \langle a_l, v\rangle, \quad l = s_1 + 1, \ldots, s$$

$$\|v\| \leqslant 1$$

Тогда верна следующая

Теорема 1 [1]. Векторы $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^k тогда и только тогда, когда

$$\delta = \min_{\|v\| \leqslant 1} \max_l \rho(a_l, v) > 0$$

Замечание 1. Если $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис, то $s \geqslant k + 1$.

Вместо систем (1.1), (1.2) будем рассматривать систему

$$z_i^{\cdot} = a z_i + u_i - v, \quad z_i^{\circ} = x_i^{\circ} - y^{\circ} \tag{2.2}$$

Введем векторы $a_1, \ldots, a_{r+n}$ следующим образом:

$$a_i = z_i^{\circ} / \| z_i^{\circ} \| \tag{2.3}$$

$$a_{n+l} = p_l, \quad l = 1, 2, \ldots, r$$

Теорема 2. В игре Γ_1 возможна поимка тогда и только тогда, когда векторы (2.3) образуют положительный базис.

Доказательство.

Пусть векторы (2.3) не образуют положительный базис. Покажем, что в этом случае в игре Γ_1 происходит уклонение от встречи.

Возьмем вектор p°, $\| p^{\circ} \| = 1$, такой, что $\langle a_j, p^{\circ}\rangle \leqslant 0$. Задаем стратегию V следующим образом:

$$\sigma = \{0, +\infty\}, \quad v(t) = p^{\circ}, \forall t \geqslant 0$$

Видно, что данная стратегия V допустима. Из [1] следует, что

$$z_i(t) \neq 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Отсюда получаем, что в игре Γ_1 происходит уклонение от встречи.

Пусть теперь векторы (2.3) образуют положительный базис. Покажем, что в игре Γ_1 происходит поимка.

Доказательство проведем следующим образом:

1. Если $r = 0$, то теорема 2 следует из [1].

2. $r = 1$. Из замечания 1 следует, что $n \geqslant k$. Предположим, что теорема не верна. Тогда для любого $T > 0$ существует стратегия V игрока E, такая, что для любых траекторий $x_i(t)$ игроков P_i имеет место (2.4).

Можно считать, что векторы $z_1^{\circ}, \ldots, z_k^{\circ}$ образуют базис R^k.

Задаем контрстратегии U_i игроков P_i следующим образом:

$$u_l^i(t) = v_l(t) - \rho_i(z_i^{\circ}/\|z_i^{\circ}\|, v_l(t))\, z_i^{\circ}/\|z_i^{\circ}\|$$

где $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{s+1} = T\}$ и

$$\rho_i(a_i, v) = \langle a_i v\rangle + \sqrt{\langle a_i, v\rangle^2 + 1 - \|v\|^2}$$

Можно показать, что контрстратегии U_i допустимы, Так как стратегия V допустима, то

$$\int_0^t e^{-a\tau} \langle p_1, v(\tau)\rangle \, d\tau \leqslant \mu_0, \quad \text{где } \mu_0 = -\langle p_1, y^{\circ}\rangle$$

(можно считать, что $\mu_1 = 0$).

---

[1] *Петров Н. Н.* Простое преследование при наличии фазовых ограничений. Л., 1984. 16 С.— Деп. в ВИНИТИ, 27.03.84, №1684-84.

Так как $p_1, z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ$ образуют положительный базис, то по теореме 1

$$\delta = \min_{\|v\|\leqslant 1} \max_l \rho_l(a_l, v) > 0$$

$$\rho_l(a_l, v) = \langle a_l, v\rangle + \sqrt{\langle a_l, v\rangle^2 + 1 - \|v\|^2}$$

$$\rho_{n+1}(a_{n+1}, v) = \langle p_1, v\rangle$$

Пусть $T_1(t)$, $T_2(t)$ — два подмножества интервала $[0, t]$, такие, что

$$T_1(t) = \{\tau \mid \tau \in [0, t], \langle p_1, v(\tau)\rangle < \delta\}$$

$$T_2(t) = \{\tau \mid \tau \in [0, t], \langle p_1, v(\tau)\rangle \geqslant \delta\}$$

Тогда

$$\delta I_2 - I_1 \leqslant \mu_0$$

$$I_1 + I_2 = a^{-1}(1 - e^{-at})$$

где

$$I_{1,2} = \int\limits_{T_{1,2}(t)} e^{-a\tau}\, d\tau$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$I_1 \geqslant [\delta(1 - e^{-at}) - a\mu_0]/[a(1 + \delta)]$$

Из определения контрстратегий U_i и системы (2.2) имеем

$$\|z_i(t)e^{-at}\| = \|z_i^\circ\| - \int\limits_0^t e^{-a\tau}\rho_i(a_i, v(\tau))\, d\tau$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n \|z_i(t)e^{-at}\| \leqslant \sum_{i=1}^n \|z_i^\circ\| - \int\limits_{T_1(t)} e^{-a\tau} \max_i \rho_i(a_i, v(\tau))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \|z_i^\circ\| + \mu_0\delta \mid (1+\delta) - [\delta^2(1 - e^{-at})] \mid [a(1+\delta)]$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \|z_i^\circ\| + \mu_0\delta \mid (1+\delta) - [\delta^2(1 - e^{-at})] \mid [(1+\delta)a]$$

Имеем

$$f(0) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} f(t) < 0$$

Отсюда существует $T_0 > 0$, такое, что

$$f(T_0) = 0 \tag{2.5}$$

Из соотношения (2.5) следует, что не позднее момента T_0 одна из функций $z_i(t)$ обратится в нуль. Полученное противоречие доказывает, что в игре Γ_1 происходит поимка не позднее момента T_0.

3. r — произвольно, $r > 1$. Возможен один из следующих двух случаев:

а) существует l такой, что векторы $p_l, z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ$, образуют положительный базис R^k. Рассмотрим множество

$$D_1 = \{x \mid x \in R^k, \langle p_l, x\rangle \leqslant \mu_l\}$$

Так как $D \subset D_1$, поэтому получаем, что в игре Γ_1 происходит поимка;

б) для всякого l векторы $p_l, z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ$, не образуют положительный базис. В этом случае строим множество $D_1 = \{x \mid x \in R^k, \langle p_0 x\rangle \leqslant \mu_0\}$ такое, что $D \subset D_1$, и векторы $p_0, z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ$ образуют положительный базис.

Так как $p_1, \ldots, p_r, z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ$ образуют положительный базис R^k, то существуют $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_r > 0$, $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$, такие, что

$$0 = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r + \beta_1 z_1^\circ + \ldots + \beta_n z_n^\circ$$

В качестве p_0 берем вектор

$$p_0 = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r$$

Если $p_0 = 0$, то положительный базис образуют векторы z_i°.

Действительно, пусть $x \in R^k$. Так как, по предположению, z_l°, $l = 1, \ldots, k$

базис R^k, то существуют γ_l, $l = 1, \ldots, k$, такие, что

$$x = \gamma_1 z_1^\circ + \ldots + \gamma_k z_k^\circ$$

Из соотношения (2.6) следует, что справедливо равенство

$$x = \gamma_1 z_1^\circ + \ldots + \gamma_k z_k^\circ + d\,(\beta_1 z_1^\circ + \ldots + \beta_n z_n^\circ)$$

Взяв d достаточно большим, получим, что

$$x = \gamma_1^\circ z_1^\circ + \ldots + \gamma_n^\circ z_n^\circ$$

причем $\gamma_i^\circ > 0$.

Если $p_0 \neq 0$, аналогично можно показать, что в этом случае положительный базис образуют векторы p_0, z_i°.

Рассмотрим множество

$$D_1 = \{x \mid x \in R^k,\ \langle p_0, x\rangle \leqslant \mu_0\}$$

где $\mu_0 = \sum_{l=1}^{r} \alpha_l \mu_l$. Видно, что $D \subset D_1$. Теорема доказана.

3. Рассмотрим игру Г. Определим функцию $f(n) = \min\{m \mid$ в игре Г происходит уклонение от встречи для любого допустимого $z^\circ\}$. Из теоремы 2 и результатов работ [4, 5] следует

Теорема 3. Пусть D — неограниченное многогранное множество. Тогда существуют $c_1(D) > 0$, $c_2(D) > 0$, такие, что для любого $n \neq 1$ имеет место следующее неравенство:

$$c_1(D)\, n \ln n \leqslant f(n) \leqslant c_2(D)\, n \ln n$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б. Н., Раппопорт И. С.* Об одной задаче группового преследования // Кибернетика. 1979. № 6. С. 145—146.
2. *Иванов Р. П.* Простое преследование — убегание на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1318—1321.
3. *Петров Н. Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606—617.
4. *Петров Н. Н., Петров Н. Никандр.* О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366—1374.
5. *Петров Н. Н.* Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. № 22. Вып. 4. С. 107—109.
6. *Григоренко Н. Л.* Задача преследования в дифференциальных играх многих лиц Мат. сб. 1988. Т. 135, № 1. С. 36—45.
7. *Чикрий А. А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 906—913.
8. *Чикрий А. А., Шишкина Н. Б.* О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений // АиТ. 1985. № 2. С. 59—69.

Ижевск

Поступила в редакцию 15.IV.1988

УДК 531.01

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Кузьминых В. А.

Выводится общее решение векторного дифференциального уравнения возмущенного кеплеровского движения в случае, когда векторы положения и возмущающего ускорения коллинеарны. Используется замена переменных, при которой новая независимая переменная выражается через начальные значения фазовых переменных и время при помощи эллиптической функции Якоби. Двухточечная краевая задача для исходного уравнения приводится к задаче Коши. Получено параметрическое представление регуляризованной траектории движения материальной точки под действием центральной силы.

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение возмущенного кеплеровского движения

(1) $$\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = -\mu \mathbf{r} r^{-3} + w\mathbf{r}$$