

УДК 539.3

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК КАК ПРОЯВЛЕНИИ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА

Новиков В. В.

Для ряда нагруженных консервативными силами упругих оболочек характерны большое число внутренних резонансов, чувствительность к малым несовершенствам и малому внешнему неконсервативному воздействию. Показано, что в совокупности эти три особенности приводят к динамической неустойчивости системы, проявляющейся в существовании решения по типу взрывной неустойчивости, когда отклонение от равновесного состояния становится бесконечно большим за конечное время. Предлагается простой способ вычисления нагрузки, на которую следует ориентироваться при проектировании конструкций, содержащих тонкие оболочки, как на предельно допустимую. Эта нагрузка, вычисляемая по линейной модели, отвечает появлению в системе первого внутреннего резонанса. Результаты иллюстрируются на известных экспериментальных фактах.

Исследование устойчивости нагруженных упругих оболочек в рамках линеаризованной модели дает так называемую верхнюю критическую нагрузку T_1 . Результатом решения задачи устойчивости в большом (нелинейная статическая модель) является нижняя критическая нагрузка T_2 . Для многих объектов (например, цилиндрическая оболочка при равномерном боковом сжатии) T_1 и T_2 весьма близки и хорошо согласуются с предельной нагрузкой T_e , достигаемой в экспериментах.

Вместе с тем имеется широкий класс систем (к нему относятся, например, цилиндрическая оболочка, сжатая вдоль образующей, сферическая оболочка под гидростатическим давлением), для которых T_1 и T_2 существенно различаются, причем нагрузка T_2 очень чувствительна к малым поправкам в модели системы. В опытах наблюдается большой разброс значений предельных нагрузок T_e . При проектировании конструкций, элементами которых являются такие оболочки, трудно исключить возможность неожиданных разрушений [1].

Три характерные особенности отличают системы данного класса от оболочек, для которых линеаризованная модель дает критические нагрузки, близкие к экспериментальным: они чувствительны к малым несовершенствам (начальный прогиб, неоднородность свойств и т. п.); критическая нагрузка сильно зависит от характера нагружения; с увеличением нагрузки, начиная с некоторого ее значения, в системе появляются внутренние резонансы [2].

Этими особенностями объясняется, почему рассмотрение задач устойчивости таких систем в малом или в нелинейной статической постановке не достигает цели. Необходимость динамического подхода к задачам устойчивости отмечается и в экспериментальных исследованиях нагруженных оболочек [3].

Отсутствие, по крайней мере одного из указанных факторов, приводит к верхней критической нагрузке в эксперименте. Так, на цилиндрических оболочках, сжатых в осевом направлении, в результате тщательного изготовления оболочек и проведения эксперимента достигалась нагрузка, близкая к T_1 [4, 5]. Внутренний резонанс отсутствует в ортотропных оболочках. Для них исследование устойчивости в малом также дает удовлетворительный результат [6].

Обратимся к простейшей механической модели, содержащей отмеченные три особенности, с тем, чтобы показать, что они в совокупности могут приводить к динамической неустойчивости, проявляющейся в неограниченном решении по типу взрывной неустойчивости, когда отклонение от равновесного состояния становится бесконечно большим за конечное время. Затем обсудим возможность использования результатов исследования этой модели в расчетах оболочек.

1. Рассматривается система, состоящая из трех сосредоточенных масс и безмассовых жестких стержней, в местах шарнирного соединения которых действует упругий восстанавливающий момент. Массы прикрепле-

ны к нелинейно-упругим пружинам, причем выражение для упругой силы включает линейные и квадратичные по отклонению члены. Имеется начальный прогиб $\varphi_0 \ll 1$ (фиг. 1). Один конец системы шарнирно закреплен, а к другому приложена в вертикальном направлении сила, имеющая постоянную составляющую T и неконсервативную часть ΔT .

Воспользовавшись методом Лагранжа, получим уравнения движения системы

$$(1.1) \quad \begin{aligned} 3\varphi_1'' + 2\varphi_2'' + \varphi_3'' + 2\varphi_1 - \varphi_2 + \kappa(3\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3) - \\ - \tau\varphi_1 = \varphi_2''(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}\varphi_3''(\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_0)^2 - \\ - 2\varphi_2'^2(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_3'^2(\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_0) - \kappa_1(3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \\ + 4\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_2\varphi_3 + 2\varphi_1\varphi_3) - \frac{1}{6}\tau\varphi_1^3 + Q_1 \\ 2\varphi_1'' + 2\varphi_2'' + \varphi_3'' + 2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3 + \kappa(2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3) - \\ - \tau\varphi_2 = \varphi_1''(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}\varphi_3''(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_0)^2 + \\ + 2\varphi_1'^2(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_3'^2(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_0) - \\ - \kappa_1(2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3) - \frac{1}{6}\tau\varphi_2^3 + Q_2 \\ \varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3'' + \varphi_3 - \varphi_2 + \kappa(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \\ - \tau(\varphi_3 + \varphi_0) = \frac{1}{2}\varphi_1''(\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_0)^2 + \frac{1}{2}\varphi_2''(\varphi_2 - \varphi_3 - \\ - \varphi_0)^2 + \varphi_1'^2(\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_0) + \varphi_2'^2(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_0) - \\ - \kappa_1(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)^2 - \frac{1}{6}\tau(\varphi_3^3 + 3\varphi_3\varphi_0^2 + 3\varphi_3^2\varphi_0) + Q_3 \end{aligned}$$

Здесь присутствуют члены не выше кубических по углам φ_i , так как в дальнейшем при переходе к уравнениям в отклонениях ограничимся квадратичной нелинейностью. В качестве масштаба времени выбрана величина $t_* = (ml^2c^{-1})^{1/2}$ и введены обозначения $\kappa = kl^2c^{-1}$, $\kappa_1 = k_1l^3c^{-1}$, $\tau = Tlc^{-1}$, где c — коэффициент упругости пружин в местах шарнирного соединения стержней, параметры k и k_1 характеризуют пружины, соединяющие массы с неподвижной опорой.

Обобщенные силы Q_i имеют вид, сходный с выражениями для консервативной составляющей нагрузки в левых частях уравнений (1.1), отличаясь лишь тем, что τ заменяется на $\Delta\tau$:

$$Q_{1,2} = \Delta\tau\varphi_{1,2}, \quad Q_3 = \Delta\tau(\varphi_3 + \varphi_0)$$

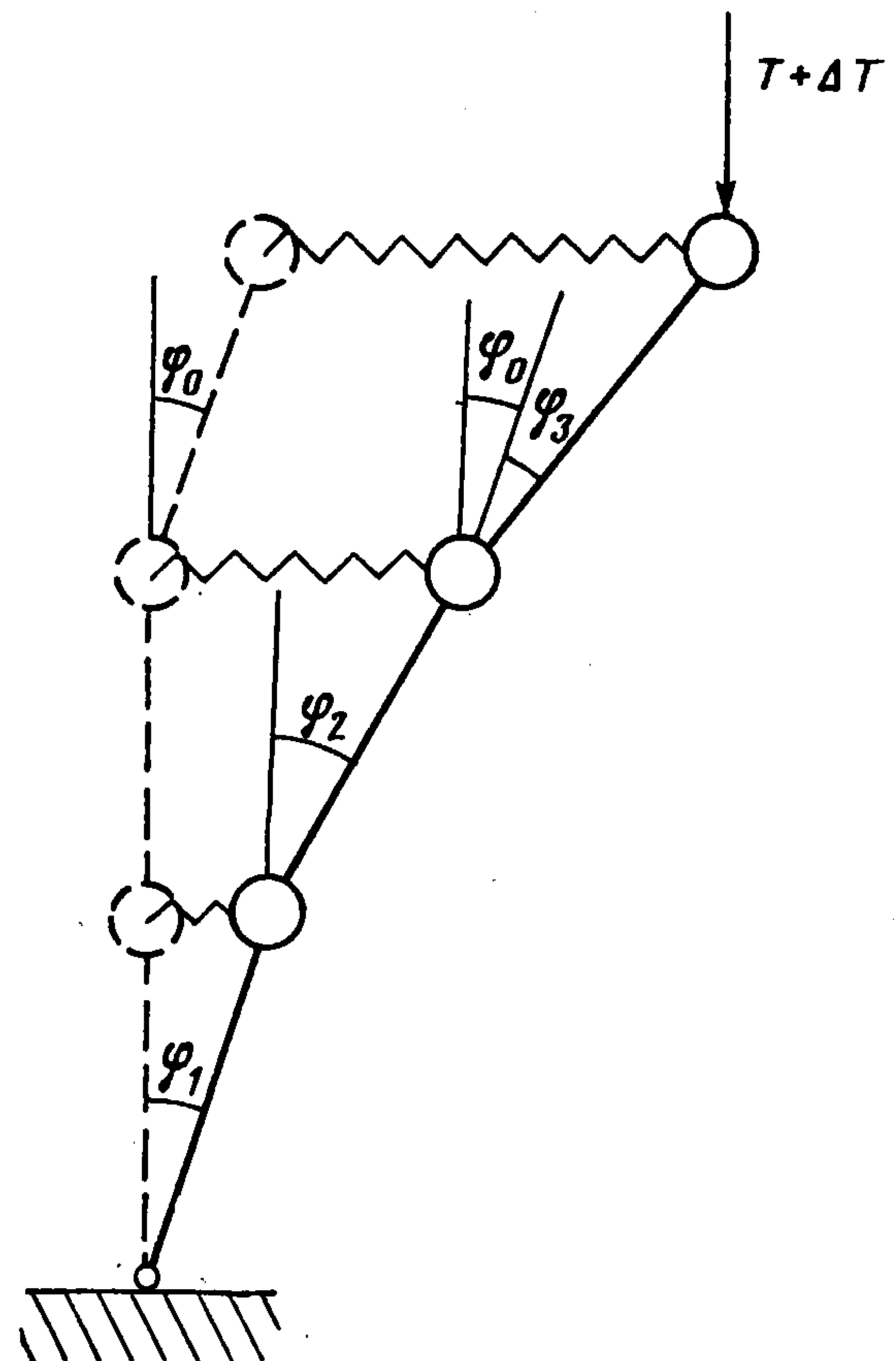
Считаем, что неконсервативная сила $\Delta\tau = \Delta Tlc^{-1}$ следующим образом связана с вертикальной составляющей скорости верхней массы:

$$\Delta\tau + \alpha\Delta\tau = -\beta\Delta\dot{x}_3 \quad (\alpha, \beta \geq 0)$$

С точностью до членов, квадратичных по отклонению стержней от вертикали, изменение координаты верхней массы определяется соотношением

$$\Delta x_3 = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \varphi_3\varphi_0$$

Нагружающее устройство может представлять собой, например, заполненный газом цилиндр с двумя поршнями, один из которых соединен с массой m_3 . Нагрузке T отвечает определенный зазор между поршнями. Изменение x_3 в силу инерционности устройства отслеживается вторым поршнем с запаздыванием. Так возникает малая неконсервативная нагрузка.



Фиг. 1

Конструкция нагружающего устройства не столь важна в данном рассмотрении. Существенно, что на систему наряду с консервативной нагрузкой T воздействует малая ($\sim \varphi_j^2$) неконсервативная сила, которая в обычно изучаемых линеаризованной или нелинейной статической моделях отсутствует.

Из-за начального прогиба при нагрузке $\tau \neq 0$ система имеет равновесное состояние, отличающееся от исходного (показанного на фиг. 1). Линеаризуя уравнение (1.1) вблизи равновесного состояния, можно определить собственные частоты и отвечающие им формы колебаний системы.

Интерес представляет случай, когда в системе наблюдается внутренний резонанс, т. е. частоты связаны соотношением $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. Дальнейшее рассмотрение проводится при $\kappa = 2,5$, $\tau = 2,08$, которым отвечают частоты $\omega_1 = 0,92$, $\omega_2 = 1,52$, $\omega_3 = 2,44$. Заметим, что при $\kappa = 2,5$ все величины ω_j вещественны при нагрузках τ из интервала $[0; 2,59]$

Перейдем к нормальным координатам εq_j , $\varepsilon \ll 1$. (Поскольку все φ_j предполагаются малыми, выделен параметр ε .) Уравнения (1.1) преобразуются к виду

$$(1.2) \quad q_j'' + \omega_j^2 q_j = \varepsilon f_j(q_k), \quad j = 1, 2, 3,$$

где f_j — квадратичные функции q_k ($k = 1, 2, 3$) и величин, сопряженных им.

В выражениях для f_j ограничимся лишь «резонансными» членами

$$f_1 = i 33,55 D_1 \varphi_0^2 q_1 + q_2^* q_3 [0,21 \kappa_1 + 14,35 \varphi_0 + \\ + i \varphi_0 (1,67 D_1 - 1,22 D_2^* + 3,49 D_3)]$$

$$f_2 = i 2,98 D_2 \varphi_0^2 q_2 + q_1^* q_3 [0,2 \kappa_1 + 13,32 \varphi_0 + \\ + i \varphi_0 (-1,56 D_1^* + 1,11 D_2 + 3,18 D_3)]$$

$$f_3 = i 20,08 D_3 \varphi_0^2 q_3 + q_1 q_2 [0,71 \kappa_1 + 47,98 \varphi_0 + \\ + i \varphi_0 (5,56 D_1 + 4,08 D_2 + 11,66 D_3)]$$

$$D_j = -\beta (\alpha - i \omega_j) (\alpha^2 + \omega_j^2)^{-1}$$

Решение системы (1.2) отыскиваем в виде

$$q_j = A_j (\eta = \varepsilon t) \exp(i \omega_j t) + \varepsilon w_j(t)$$

После подстановки q_j в уравнения, приравнявая члены одинакового порядка по ε , получим

$$w_j'' + \omega_j^2 w_j = -2i \omega_j (dA_j/d\eta) \exp(i \omega_j t) + f_j(A_k \exp(i \omega_k t))$$

Ошибка w_j не будет нарастать, если правая часть этого соотношения ортогональна собственным функциям задачи при $\varepsilon = 0$. Тогда уравнения для амплитуд будут следующими:

$$2i \omega_j (dA_j/d\eta) = \langle f_j(A_k \exp(i \omega_k t)) \exp(-i \omega_j t) \rangle$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение за время $t_0 \gg T_k$ ($T_k = 2\pi/\omega_k$).

После усреднения и перехода к действительным амплитудам и фазам a_l , δ_l при помощи замены переменных

$$A_l = a_l (|\sigma_j| |\sigma_k|)^{-1/2} \exp(i \delta_l); \quad j \neq k, \quad j, k \neq l$$

получим уравнения

$$(1.3) \quad da_1/d\eta = a_2 a_3 \cos(\Phi + \theta_1) + \chi_1 a_1 \quad (1, 2, 3)$$

$$d\Phi/d\eta = -\frac{a_2 a_3}{a_1} \sin(\Phi + \theta_1) - \frac{a_1 a_3}{a_2} \sin(\Phi + \theta_2) - \\ - \frac{a_1 a_2}{a_3} \sin(\Phi + \theta_3); \quad \Phi = \delta_3 - \delta_1 - \delta_2$$

$$\cos \theta_j = \frac{\operatorname{Re} \sigma_j}{|\sigma_j|}, \quad \sin \theta_{1,2} = \frac{\operatorname{Im} \sigma_{1,2}}{|\sigma_{1,2}|}, \quad \sin \theta_3 = \frac{\operatorname{Im} \sigma_3}{|\sigma_3|}$$

$$\sigma_j = -\alpha\beta\varphi_0 m_j - i[\xi_j + \varphi_0 (\zeta_j - \beta n_j)], \quad j = 1, 2, 3$$

$$\xi_1 = 0,12, \quad \xi_2 = 0,07, \quad \xi_3 = 0,15$$

$$\zeta_1 = 7,78, \quad \zeta_2 = 4,4, \quad \zeta_3 = 9,84$$

$$n_1 = 0,83d_1 + 1,01d_2 + 4,61d_3, \quad n_2 = 0,47d_1 + 0,56d_2 + 2,56d_3$$

$$n_3 = 1,05d_1 + 1,27d_2 + 5,83d_3, \quad m_1 = 0,9d_1 - 0,66d_2 + 1,89d_3$$

$$m_2 = -0,51d_1 + 0,37d_2 + 1,05d_3, \quad m_3 = 1,14d_1 + 0,84d_2 + 2,39d_3$$

$$\chi_j = -v_j\alpha\beta\varphi_0^2 d_j, \quad v_1 = 18,19, \quad v_2 = 0,98, \quad v_3 = 4,12$$

$$d_j = (\alpha^2 + \omega_j^2)^{-1}.$$

Отметим, что при переходе к действительным амплитудам и фазам наряду с уравнениями (1.3) имеются еще два уравнения, по которым после решения (1.3) можно определить величины δ_l .

В отсутствие начального прогиба ($\varphi_0 = 0$, $\theta_{1,2} = \pi/2$, $\theta_3 = 3\pi/2$) система консервативна. В ней возможен лишь обмен энергией между формами. Аналогичная ситуация имеет место при $\varphi_0 \neq 0$, $\alpha = 0$ или ($\beta = 0$).

Начальный прогиб и малая ($\sim q_j^2$) неконсервативная сила со стороны нагружающего устройства ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$) совместно создают условия, когда в системе становится возможной взрывная неустойчивость: нарастают амплитуды всех резонансно связанных форм, причем решение становится неограниченным за конечное время t_∞ , подобно $(t_\infty - t)^{-1}$ [8].

Без учета в уравнениях (1.3) членов, содержащих χ_j , необходимым условием существования решения системы по типу взрывной неустойчивости является расположение всех θ_j в одной полуплоскости. Учет этих членов (в рассматриваемой модели они ответственны за рассеяние энергии) в зависимости от величины параметров χ_j приводит либо к увеличению времени t_∞ , либо к невозможности взрывной неустойчивости [8].

На фиг. 2 приведены временные зависимости амплитуд a_l (сплошные линии) и фазы Φ (штриховая линия), полученные численным интегрированием системы (1.3) при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\varphi_0 = 0,01$, которым отвечают

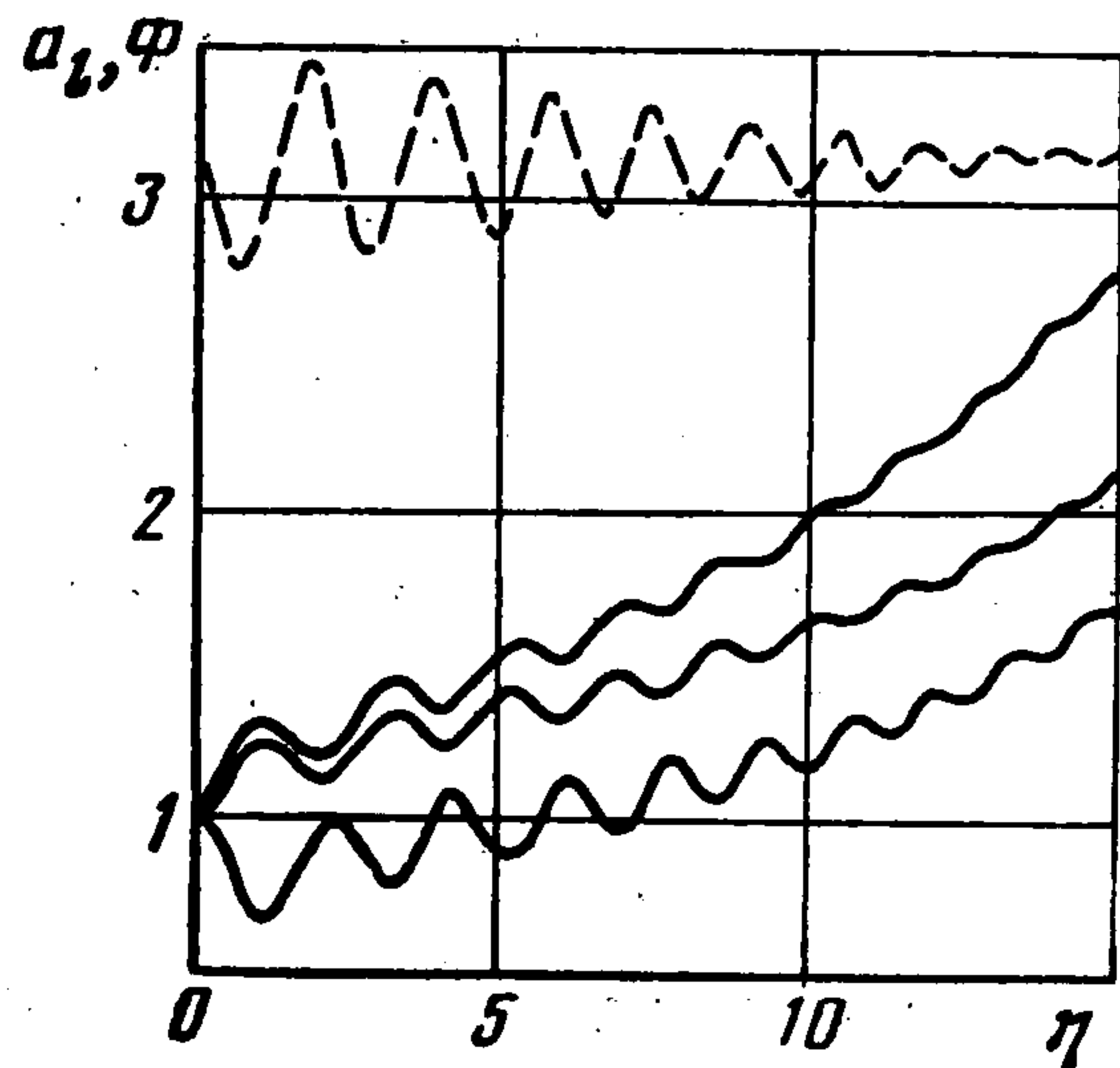
$$\theta_1 = 3\pi/2 - 3,06 \cdot 10^{-2}, \quad \theta_2 = 3\pi/2 + 1,36 \cdot 10^{-3}, \quad \theta_3 = \pi/2 + 5,36 \cdot 10^{-2}$$

$$\chi_1 = -9,82 \cdot 10^{-4}, \quad \chi_2 = -0,3 \cdot 10^{-4}, \quad \chi_3 = -0,59 \cdot 10^{-4}$$

и при начальных условиях $a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = 1$, $\Phi(0) = \pi$. Все θ_j расположены в одной полуплоскости ($\theta_2 - \theta_3 < \pi$). В рассматриваемом случае это условие не только необходимое, но и достаточное для того, чтобы система (1.3) имела решение по типу взрывной неустойчивости.

Оценим время t_∞ . Поскольку одна из амплитуд возрастает в 5 раз за время $\sim 20\epsilon t$, при $\epsilon = 10^{-2}$ время t_∞ отвечает $\sim 5 \cdot 10^2$ циклам колебаний на нижней частоте.

Вычисления, проведенные без учета рассеяния энергии, показывают, что при данных параметрах α , β , φ_0 характер нарастания амплитуд сколько-нибудь заметно не изменяется.



Фиг. 2

Таким образом, показано, что в системе возможна взрывная неустойчивость. Она обусловлена внутренним резонансом, начальным прогибом и малой неконсервативной силой.

Можно убедиться, что для всех $\tau \in [0; 2,59]$ за исключением резонансной области — малой окрестности $\tau = 2,08$, рассматриваемая система устойчива в малом.

2. На примере цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении, обсудим возможность использования результатов изучения трехмассовой модели в решении задач устойчивости нагруженных оболочек.

Направим координатные линии x и y соответственно вдоль образующей и дуги цилиндрической оболочки. Обозначим $w(x, y, t)$ прогиб оболочки и будем считать, что начальный прогиб отсутствует.

Уравнения колебаний оболочки имеют вид [9]

$$(2.1) \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \nabla^4 w + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ + \frac{\rho}{E} (1 + \sigma) \left(\frac{1}{R} + \nabla^2 w \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - L(w, \Phi) = 0 \\ \frac{1}{E} \left[\nabla^2 - \frac{\rho}{E} (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[\nabla^2 - \frac{2\rho}{E} (1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi + \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w, w) = 0 \\ D = Eh^3 \frac{1}{12(1 - \sigma^2)}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \\ L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

где Φ — динамическая функция напряжений в срединной поверхности, D — цилиндрическая жесткость; R, l, h — соответственно радиус, длина и толщина оболочки, ρ — плотность, E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона.

Будем интересоваться преимущественно нормальными формами колебаний, которым отвечают значительно более низкие частоты, чем тангенциальным формам. Поэтому в рассматриваемой задаче закон изменения во времени динамической функции напряжений определяется прогибом, а влиянием движений в срединной поверхности на Φ следует пренебречь, т. е. в дальнейшем члены, содержащие производные по времени во втором уравнении (2.1), во внимание не принимаются.

Предполагая, что на торцах оболочки выполнены условия свободного опирания, прогиб аппроксимируем выражением

$$w(x, y, t) = \sum_{m, n} A_{mn}(t) \sin m\xi \sin n\zeta \\ (\xi = x\pi/l, \zeta = y/R; 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq 2\pi R)$$

При увеличении нагрузки T , начиная с некоторого значения T_* , в системе возможны внутренние резонансы, что связано с особенностью в поведении спектра $\omega_j(T)$ в задачах данного класса: наибольшее изменение претерпевают частоты, отвечающие формам с весьма большим числом перегибов. Даже приближенная оценка, где в расчет принимаются лишь осесимметричные формы, дает на интервале $[T_*, T_1] 10^2 \dots 10^3$ резонансных точек [2].

Пусть при некоторой нагрузке T выполняются условия внутреннего резонанса, которые для системы с распределенными параметрами имеют

вид

$$m_1 + m_2 = m_3, \quad n_1 + n_2 = n_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3$$

Из второго уравнения (2.1) после подстановки выражения для $w(x, y, t)$ найдем функцию напряжения $\Phi(x, y, t)$ и подставим в первое уравнение системы. Затем, воспользовавшись методом Галеркина, найдем с точностью до квадратичных членов уравнения для амплитуд находящихся в резонансе форм

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A_{m_1 n_1}'' + \omega_1^2 A_{m_1 n_1} &= f_{11} (c_2 b_3 - c_3 b_2)^2 A_{m_2 n_2} A_{m_3 n_3} + \\ &+ f_{21} \left(\frac{a_2 b_3^2}{a_3^2} A_{m_2 n_2} A_{m_3 n_3}'' + \frac{a_3 b_2^2}{a_2^2} A_{m_2 n_2}'' A_{m_3 n_3} \right) \\ A_{m_2 n_2}'' + \omega_2^2 A_{m_2 n_2} &= f_{12} (c_1 b_3 - c_3 b_1)^2 A_{m_1 n_1} A_{m_3 n_3} + \\ &+ f_{22} \left(\frac{a_1 b_3^2}{a_3^2} A_{m_1 n_1} A_{m_3 n_3}'' + \frac{a_3 b_1^2}{a_1^2} A_{m_1 n_1}'' A_{m_3 n_3} \right) \\ A_{m_3 n_3}'' + \omega_3^2 A_{m_3 n_3} &= f_{13} (c_2 b_1 - c_1 b_2)^2 A_{m_1 n_1} A_{m_2 n_2} + \\ &+ f_{23} \left(\frac{a_1 b_2^2}{a_2^2} A_{m_1 n_1} A_{m_2 n_2}'' + \frac{a_2 b_1^2}{a_1^2} A_{m_1 n_1}'' A_{m_2 n_2} \right) \\ \omega_j^2 &= \frac{D}{\rho h} \left(a_j^2 + \frac{Eh}{DR^2} \frac{b_j^4}{a_j^2} - \frac{Th}{D} b_j^2 \right) d_j \\ f_{1k} &= \frac{E}{\rho h} d_k \sum_{j=1}^3 \left(\frac{b_j}{a_j} \right)^2, \quad f_{2k} = \frac{\rho(1+\sigma)}{R} d_k \\ a_j &= b_j^2 + c_j^2, \quad b_j = \frac{\pi m_j}{l}, \quad c_j = \frac{n_j}{R}, \quad d_j = \left[1 + \frac{1+\sigma}{R^2} \frac{b_j^2}{a_j^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Заметим, что верхняя критическая нагрузка вычисляется из выражения для ω_j^2 . Положив $\omega_j^2 = 0$ и минимизируя T по $z_j = (a_j/b_j)^2$, находим $T_1 = EhR^{-1} [3(1 - \sigma^2)]^{-1/2}$.

После учета начального прогиба и малой неконсервативности нагружающего устройства задача (2.2) приводится к ранее рассмотренной системе уравнений (1.3). Следовательно, результаты исследования трехмассовой модели имеют непосредственное отношение к задачам устойчивости нагруженных оболочек.

Основной вывод состоит в том, что задачи динамики упругих оболочек, нагруженных консервативными силами, при учете малых несовершенств и малого внешнего неконсервативного воздействия допускают решение по типу взрывной неустойчивости.

При рассмотрении конкретных конструкций, содержащих тонкие оболочки, нереально рассчитывать на достаточную информацию об их несовершенствах (в частности, начальном прогибе) и характере нагружения, поэтому на нагрузку T_* , при которой впервые возникает возможность взрывной неустойчивости, следует ориентироваться как на наибольшую допустимую нагрузку. Эта нагрузка отвечает появлению в системе первого внутреннего резонанса и определяется из рассмотрения существенно более простой, чем исходная, линейной консервативной модели.

В практических расчетах в качестве T_* следует принять нагрузку, при которой впервые пересекаются ветви $\omega_j(T)$. В окрестности этого значения нагрузки имеются малоразличимые частоты, отвечающие соседним m, n , которые вместе с малой нижней частотой удовлетворяют условиям резонанса.

В работе [2], где принимались во внимание лишь осесимметричные формы ($c_j = 0$), нагрузка T_* вычислялась как максимальное значение нагрузки, когда условие $d\omega_j^2/db_j^2 \geq 0$ выполняется для всех b_j^2 .

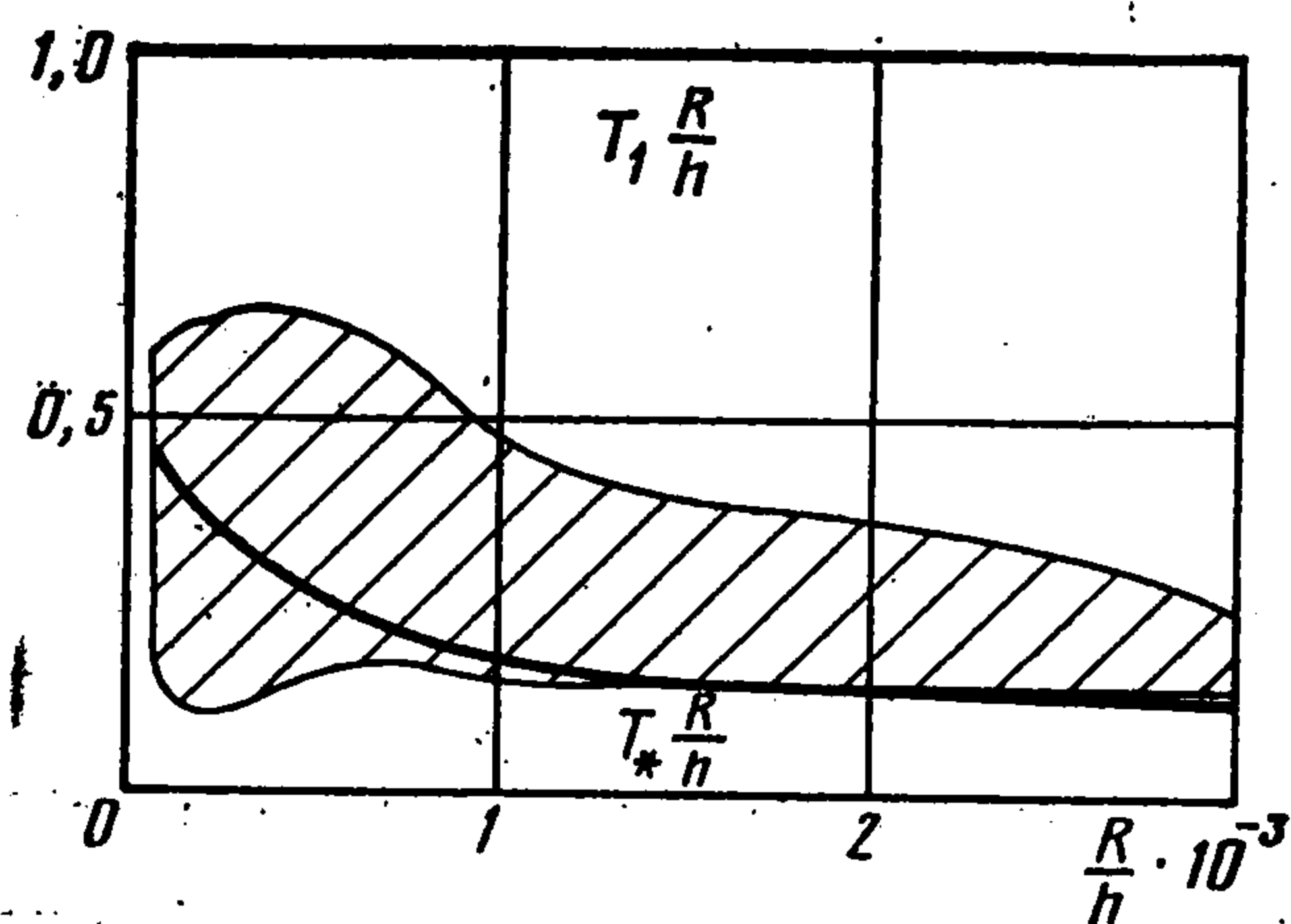
В общем случае ($c_j \neq 0$) критическая нагрузка T_* совпадает с найденной для осесимметричного варианта. В этом можно убедиться, если ввести вместо c_j^2 новую переменную α так, что $c_j^2 = \alpha b_j^2$. Тогда из выражения для ω_j^2 следует эквивалентность случая $\alpha \neq 0$ одновременному увеличению в $1 + \alpha$ раз толщины и радиуса оболочки. Поскольку в выражение для T входит отношение этих величин, приходим к результату осесимметричной задачи.

Отношение T_* к верхней критической нагрузке равно

$$\frac{T_*}{T_1} = \frac{3}{2} \left[\frac{1 + \sigma}{12(1 - \sigma)} \right]^{1/6} \left(\frac{h}{R} \right)^{1/3}$$

Отметим, что оно несколько отличается от приведенного в [2], где допущена неточность в выражении для ω_j^2 .

На фиг. 3 показаны T_1 , T_* при $\sigma = 0,3$ (обычно принимаемом в расчетах) и область экспериментальных критических нагрузок (заштрихована). Нагрузка T_* совпадает с нижней границей этой области в широком интервале R/h . Разброс в экспериментальных данных объясняется тем, что



Фиг. 3

наличие в системе внутренних резонансов — лишь необходимое условие взрывной неустойчивости. Предельная нагрузка для конкретной системы определяется также ее малыми несовершенствами, характером нагружения и начальными условиями. При больших толщинах оболочки нижняя граница T_e не совпадает с вычисленной нагрузкой T_* , так как при этих h необходимо ввести дополнительные члены в систему (2.1), а следовательно, изменится выражение для ω_j^2 , по которому вычисляется T_* .

Наряду с продольно сжатой цилиндрической оболочкой в литературе имеется значительный экспериментальный материал по сферическим оболочкам, находящимся под гидростатическим давлением (например, [9]). Для сферической оболочки также можно получить аналитическое выражение для частот, а следовательно, вычислить отношение нагрузки T_* , отвечающей появлению в системе внутреннего резонанса, к верхней критической нагрузке, которое имеет вид

$$\frac{T_*}{T_1} = \frac{3}{2} \left[\frac{(1 + 3\sigma)^2}{12(1 - \sigma^2)} \right]^{1/6} \left(\frac{h}{R} \right)^{1/3}$$

Сопоставление экспериментальных данных $T_e(R/h)$ с вычисленной нагрузкой T_* приводит (как и в случае продольно сжатой цилиндрической оболочки) к выводу, что T_* близка к нижней границе области T_e .

В заключение отметим, что предлагаемый в работе подход к задачам устойчивости нагруженных оболочек дополняет статические исследования оболочек (например, [4, 9]) и позволяет объяснить поведение реальных оболочек в ряде необычных случаев. Действительно, для систем данного класса в интервале нагрузок (T_2, T_1) наряду с исходным имеется еще одно устойчивое состояние равновесия. Ему отвечает конечный прогиб оболочки. Переход к этому равновесному состоянию оболочки совершается скачком при $T = T_1$ (в идеализированной модели). С точки зрения установившихся представлений при $T < T_1$ малые отклонения не выводят оболочку из области притяжения исходного состояния равновесия. Наличие же внутреннего резонанса, малых неконсервативной силы и несовершенств оболочки могут привести к быстрому нарастанию этих отклонений, за которым последует скачок.

Автор благодарит Г. Г. Денисова за постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bushnell D.* Buckling of shells — pitfall for designers // *AIAA Journal*. 1981. V. 19. № 9. P. 1183—1226.
2. *Новиков В. В.* Внутренние резонансы и устойчивость упругих оболочек // *ПМТФ*. 1980. № 4. С. 162—164.

3. Заруцкий В. А., Сивак Э. Ф. О влиянии колебаний цилиндрических оболочек на их устойчивость при осевом сжатии // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 3. С. 2—933.
4. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, 1966. 296 с.
5. Tennyson R. C. Buckling of circular cylindrical shells in Axial compression // AIAA Journal. 1964. V. 2, № 7. P. 1351—1353.
6. Ермоленко В. М., Корнев В. М. Особенности спектра в задачах устойчивости цилиндрических ортотропных оболочек // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 8. С. 106—110.
7. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
8. Wilhelmsson H., Stenflo L., Engelmann F. Explosive instabilities in the well-defined phase description // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 5. P. 1738—1742.
9. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

Горький

Поступила в редакцию
15.VI.1987