Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 539.3

# ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Копец А. С.

Излагается методика построения интегральных представлений разрывных решений уравнений плоской теории упругости, основанная на применении аппарата теории обобщенных функций. Полученные представления для разрывных компонент полей перемещений и напряжений используются для формулировки достаточных условий, обеспечивающих непрерывную продолжимость этих величин почти на все точки линии разрыва.

**1. Постановка задачи.** В системе прямоугольных декартовых координат $x_1x_2$ рассмотрим полную систему уравнений плоской теории упругости, описывающих состояния плоской деформации цилиндрического тела при отсутствии в нем массовых сил и начальных напряжений [1]

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_{ij}$, $u_i$ — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в системе координат $x_1x_2$, $\lambda$, $\mu$ — упругие постоянные Ламе, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. В формулах (1.1), (1.2) и во всех последующих индексы $i$, $j$, $k$, $l$, $m$ принимают значения 1, 2, а по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Пусть $L$ — спрямляемая кусочно-гладкая линия конечной длины, которая в системе координат $x_1x_2$ представляется параметрически: $L = \{(x_1, x_2): x_i = \xi_i(s),\ a \leqslant s \leqslant b\}$. Здесь $s$ — дуговая абсцисса, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на контуре $L$ или на его продолжении, $a$, $b$ — действительные числа, разность которых определяет длину линии $L$, $\xi_i(s)$ — ограниченные функции, имеющие кусочно-непрерывные производные в интервале $(a, b)$. Считаем, что множество точек линии $L$ замкнуто.

Точки координатной плоскости $x_1x_2$, принадлежащие контуру $L$ и соответствующие определенному значению параметра $s$, будем обозначать $t(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s))$; остальные точки плоскости будем отмечать символами $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. Расстояние между точками координатной плоскости определяется выражением $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Будем говорить, что точка $t \in L$ при заданном способе параметризации контура имеет кратность $n$, если существует $n$ различных значений дуговой абсциссы $s_1, s_2, \ldots, s_n$, для которых $t(s_1) = t(s_2) = \ldots = t(s_n) = t$.

Очевидно, что все точки самопересечения контура $L$ (если таковые имеются) имеют кратность, большую единицы.

Направление единичного вектора нормали к контуру $L$ будем считать положительным, если при обходе контура в направлении возрастания параметра $s$ нормаль окажется справа. Если $\varphi_k(s)$ — углы, составляемые направлением положительной нормали в точке $t(s)$ и координатными осями ми $x_k$, то

$$\cos \varphi_1 = d\xi_2/ds, \quad \cos \varphi_2 = -d\xi_1/ds \tag{1.3}$$

Набор функций $\sigma_{ij}$, $u_i$, аналитических в открытой области $R^2 \setminus L$ и удовлетворяющих в этой области уравнениям (1.1) (1.2), будем называть разрывным решением уравнений плоской теории упругости с линией скачка $L$. Если же величины $\sigma_{ij}$, $u_i$ непрерывно продолжимы на границу $L$ почти всюду (за исключением, быть может, конечного множества точек), граничные значения этих величин — локально суммируемые функции на контуре $L$ и производные $\partial\sigma_{ij}/\partial x_k$, $\partial u_i/\partial x_k$ — локально суммируемые функции в пространстве $R^2$, то такие разрывные решения будем называть квазирегулярными.

Задача состоит в том, чтобы построить представления разрывных решений для заданной линии скачка $L$ и указать условия, при которых разрывное решение становится квазирегулярным.

**2. Системы функциональных уравнений для разрывных решений.** Пусть $f^+$ и $f^-$ — граничные значения, к которым стремится компонента $f$ квазирегулярного разрывного решения при подходе к линии скачка $L$ со стороны положительной и отрицательной нормали. Тогда разность $f^+ - f^-$ определяет скачок данной компоненты на контуре $L$, который в дальнейшем обозначаем $[f]$.

Очевидно, для произвольного квазирегулярного разрывного решения скачки $[\sigma_{ij}]$, $[u_i]$, рассматриваемые как функции дуговой абсциссы $s$, локально суммируемы на контуре $L$. В то же время исходные величины $\sigma_{ij}$, $u_i$ и все их первые производные — локально суммируемые в $R^2$ функции. Следовательно, функциям $\sigma_{ij}$, $u_i$, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_k$, $\partial u_i/\partial x_k$ можно поставить в соответствие регулярные функционалы из пространства обобщенных функций $D'$ $(R^2)$ [2], которые будут связаны между собой зависимостями

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_k = \partial_k\sigma_{ij} - [\sigma_{ij}]\cos \varphi_k\delta_L \tag{2.1}$$

$$\partial u_i/\partial x_k = \partial_k u_i - [u_i]\cos \varphi_k\delta_L \tag{2.2}$$

вытекающими из свойств дифференцирования обобщенных функций [3].

Здесь и далее для обозначения регулярных обобщенных функций используются те же символы, что и для соответствующих локально суммируемых функций, $\partial_k$ означает обобщенную производную по координате $x_k$, запись $m(s)\delta_L$ соответствует контурной дельта-функции с плотностью $m(s)$, локально суммируемой на контуре $L$. Свертку двух обобщенных функций будем в дальнейшем обозначать символом $*$.

Уравнения (1.1), (1.2) естественным образом могут быть преобразованы в функциональные равенства для соответствующих регулярных обобщенных функций, которые, в силу принятых обозначений будут иметь тот же вид.

Переходя при помощи зависимостей (2.1) к обобщенным производным в формулах (1.1), будем иметь

$$\partial_j\sigma_{ij} = [p_i]\delta_L, \quad [p_i] = [\sigma_{ij}]\cos \varphi_j \tag{2.3}$$

где $[p_i]$ — скачки компонент вектора усилий, действующих на берега контура $L$.

Аналогично, используя соотношения (2.2) в равенствах (1.2), получим

$$\sigma_{ij} = \lambda(\partial_m u_m - [u_m]\cos\varphi_m\delta_L)\delta_{ij} + \mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j - [u_i]\cos\varphi_j\delta_L - [u_j]\cos\varphi_i\delta_L) \tag{2.4}$$

Уравнения (2.3), (2.4) представляют собой полную систему уравнений в обобщенных производных для определения функционалов $\sigma_{ij}$, $u_i$.

Подставляя выражения (2.4) в формулы (2.3) приходим к системе функциональных уравнений

$$\mu\partial_m\partial_m u_i + (\lambda+\mu)\,\partial_i\partial_j u_j = [p_i]\,\delta_L + \tag{2.5}$$
$$+\,\partial_k\,(\lambda\,[u_m]\cos\varphi_m\delta_L\delta_{ik} + \mu\,([u_i]\cos\varphi_k\delta_L + [u_k]\cos\varphi_i\delta_L))$$

Очевидно, множество обобщенных решений данной системы в $D'(R^2)$ содержит регулярные функционалы, соответствующие компонентам $u_i$ исходного квазирегулярного разрывного решения.

**3. Построение интегральных представлений разрывных решений.** Сформулируем условия, обеспечивающие разрешимость системы (2.5) в пространстве $D'(R^2)$, считая, что функции скачка $[p_i]$, $[u_i]$, стоящие в правых частях этих уравнений — произвольные локально суммируемые функции, заданные на некотором контуре $L$.

*Теорема 1.* Если длина контура $L$ конечна, то обобщенные решения системы (2.5) существуют в $D'(R^2)$ для произвольных суммируемых функций скачка $[p_i]$, $[u_i]$, и могут быть представлены в виде

$$u_i = u_i^\circ - U_{il} * r_l - \partial_k U_{il} * h_{lk} \tag{3.1}$$

$$r_l = [p_l]\delta_L \tag{3.2}$$
$$h_{lk} = \lambda\,[u_m]\cos\varphi_m\delta_L\delta_{lk} + \mu\,([u_l]\cos\varphi_k\delta_L + [u_k]\cos\varphi_l\delta_L)$$

где $u_i^\circ$ — решения однородной системы уравнений в $D'(R^2)$

$$\mu\partial_m\partial_m u_i^\circ + (\lambda+\mu)\,\partial_i\partial_j u_j^\circ = 0 \tag{3.3}$$

$U_{il}$ — компоненты матрицы фундаментальных решений рассматриваемой системы, удовлетворяющие уравнениям

$$\mu\partial_m\partial_m U_{il} + (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j U_{jl} = -\delta\delta_{il} \tag{3.4}$$

($\delta$ — дельта-функция из пространства $D'(R^2)$ [2]).

*Доказательство.* Пусть $\Phi$ — фундаментальное решение бигармонического оператора

$$(\partial_i\partial_i)^2\Phi = \delta \tag{3.5}$$

которое в соответствии с теоремой Мальгранжа — Эренпрайса [2], всегда существует в $D'(R^2)$. Тогда формулами

$$U_{ij} = \mu^{-1}(\lambda+2\mu)^{-1}((\lambda+\mu)\,\partial_i\partial_j\Phi - \delta_{ij}\,(\lambda+2\mu)\,\partial_l\partial_l\Phi) \tag{3.6}$$

определяются явные выражения для компонент матрицы фундаментальных решений исследуемой системы, которые обращают уравнения (3.4) в тождества.

Учитывая, что носители функций $[p_i]\delta_L$ и $[u_i]\cos\varphi_j\delta_L$ совпадают с множеством точек контура $L$, которое удовлетворяет условиям компактности в $R^2$, и принимая во внимание достаточные условия существования свертки в $D'(R^2)$, получим, что выражения (3.1) определяют обобщенные функции в пространстве $D'(R^2)$ для любого набора функций $[p_i]$, $[u_i]$, суммируемых на $L$.

Подставляя представления (3.1) в правую часть уравнений (2.5) и используя свойства свертки обобщенных функций [2] и соотношения (3.2), (3.3), (3.4), получим цепочку равенств

$$\mu\partial_m\partial_m u_i + (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j u_j = \mu\partial_m\partial_m u_i^\circ + (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j u_j^\circ -$$
$$-\,(\mu\partial_m\partial_m U_{il} + (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j U_{jl}) * r_l - \partial_k\,(\mu\partial_m\partial_m U_{il} +$$

$$+ (\lambda + \mu)\,\partial_i\partial_j U_{jl}) * h_{lk} = (\delta * r_l + \partial_k\delta * h_{lk})\,\delta_{il} =$$
$$= r_i + \partial_k h_{ik} = [p_i]\delta_L + \partial_k\,(\lambda\,[u_m]\cos\varphi_m\delta_L\delta_{ik} +$$
$$+ \mu\,([u_i]\cos\varphi_k\delta_L + [u_k]\cos\varphi_i\delta_L))$$

из которой видно, что функции вида (3.1) служат обобщенным решением системы (2.5).

Используя доказательство от противного, можно показать, что всякое обобщенное решение рассматриваемой системы имеет вид (3.1). Теорема доказана.

*Следствие*. Обобщенное решение системы функциональных уравнений (2.3), (2.4) существует в предположениях теоремы 1 и определяется представлениями (3.1) для функционалов $u_i$ и выражениями для функционалов $\sigma_{ij}$, получаемыми в результате подстановки представлений (3.1) в формулы (2.4)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} - L_{ijl} * r_l - \partial_k L_{ijl} * h_{lk} - h_{ij} \tag{3.7}$$
$$\sigma_{ij}^{\circ} = \lambda\partial_m u_m^{\circ}\delta_{ij} + \mu\,(\partial_j u_i^{\circ} + \partial_i u_j^{\circ})$$
$$L_{ijl} = \lambda\partial_m U_{ml}\delta_{ij} + \mu\,(\partial_j U_{il} + \partial_i U_{jl})$$

Следуя работе [2], сформулируем лемму.

*Лемма*. Пусть $f(x)$, $g(x) \in D'(R^2)$. Если носитель обобщенной функции $g(x)$ ($\operatorname{supp} g(x)$) — компактное множество в $R^2$, а сужение обобщенной функции $f(x)$ на $R^2 \setminus \{0\}$ принадлежит пространству бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(R^2 \setminus \{0\})$, то сужение свертки этих обобщенных функций на область $R^2 \setminus \operatorname{supp} g(x)$ принадлежит $C^\infty(R^2 \setminus \operatorname{supp} g(x))$ и выражается через значения функционалов $g(x)$ на элементах пространства $C^\infty(R^2 \setminus \{0\})$ по формуле

$$(f * g)(x) = (g(y), f(x - y)), \quad x \in R^2 \setminus \operatorname{supp} g, \quad y \in R^2 \tag{3.8}$$

Если решение бигармонического уравнения (3.5) представить в виде ([4], с. 248)

$$\Phi = (8\pi)^{-1}\,|\,x\,|^2 \ln |\,x\,|$$

то компоненты матрицы фундаментальных решений, найденные по формулам (3.6), будут определяться выражениями

$$U_{ij} = \frac{1}{2\pi\mu\,(\varkappa + 1)}\left\{\frac{x_i x_j}{|\,x\,|^2} - \delta_{ij}\left(\varkappa \ln |\,x\,| + \varkappa + \frac{1}{2}\right)\right\}, \tag{3.9}$$
$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

Очевидно, сужения этих компонент на область $R^2 \setminus \{0\}$ представляют собой аналитические функции, определяемые в этой области теми же соотношениями (3.9), в которых, однако, все операции трактуются уже в классическом смысле. Из этого следует, что система уравнений (3.3) принадлежит к эллиптическому типу, а ее однородные решения — аналитические функции всюду в пространстве $R^2$ [2].

Дифференцируя в обобщенном смысле выражения (3.9) можно получить аналогичные формулы для функционалов $\partial_k U_{il}$, $L_{ijl}$, $\partial_k L_{ijl}$ и убедиться в том, что сужения этих функционалов на область $R^2 \setminus \{0\}$ — аналитические функции.

Тогда на основании леммы приходим к заключению, что сужения обобщенных функций $u_i$, $\sigma_{ij}$, соответствующих представлениям (3.1), (3.7), на область $R^2 \setminus L$ определяют бесконечно дифференцируемые функции, явный вид которых устанавливается при помощи равенства (3.8):

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} u_i(x) &= u_i^\circ(x) - (r_l(y),\ U_{il}(x-y)) - (h_{lk}(y),\ \partial_k U_{il}(x-y)),\\ \sigma_{ij}(x) &= \sigma_{ij}^\circ(x) - (r_l(y),\ L_{ijl}(x-y)) - (h_{lk}(y),\ \partial_k L_{ijl}(x-y)),\\ & x \in R^2 \setminus L,\ y \in R^2 \end{aligned}$$

Учитывая определяющее соотношение для контурной дельта-функции [3] (здесь и далее интегрирование ведется по контуру $L$)

$$(m(s)\,\delta_L(y),\ \varphi(y)) = \int m(s)\varphi(t(s))\,ds$$

формулы (3.10) преобразуются к виду

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} u_i(x) &= u_i^\circ(x) - \int \{[p_l](s)U_{il}(x-t(s)) +\\ &+ (\lambda [u_m](s)\cos\varphi_m(s)\delta_{lk} + \mu([u_l](s)\cos\varphi_k(s) +\\ &+ [u_k](s)\cos\varphi_l(s))\partial_k U_{il}(x-t(s))\}\,ds\\ \sigma_{ij}(x) &= \sigma_{ij}^\circ(x) - \int \{[p_l](s)L_{ijl}(x-t(s)) +\\ &+ (\lambda [u_m](s)\cos\varphi_m(s)\delta_{lk} + \mu([u_l](s)\cos\varphi_k(s) +\\ &+ [u_k](s)\cos\varphi_l(s))\partial_k L_{ijl}(x-t(s))\}\,ds \end{aligned}$$

И так как функции скачков $[p_l]$ и $[u_l]$, по предположению, суммируемы на контуре $L$, то функции, строящиеся по формулам (3.11), будут аналитическими в области $R^2 \setminus L$.

Сужая на область $R^2 \setminus L$ функциональные уравнения (2.3), (2.4) и учитывая при этом равенство обобщенных и классических производных для регулярных функционалов $u_i$, $\sigma_{ij}$ и лемму дю Буа — Реймонда [2], можно доказать, что аналитические в $R^2 \setminus L$ функции вида (3.11) удовлетворяют классической системе уравнений (1.1), (1.2).

Таким образом, приходим к теореме.

*Теорема* 2. Пусть на контуре $L$, длина которого конечна, заданы произвольные суммируемые функции $[p_l]$ и $[u_l]$. Тогда сужения на область $R^2/L$ функционалов, построенных по формулам (3.1), (3.7), определяют разрывное решение плоской задачи теории упругости с линией скачка $L$.

*Замечание.* Если предположить, что функции $[p_l]$, $[u_l]$, заданные на контуре $L$, обращаются в нуль на некоторой части $L_0$ данного контура, то сужения функционалов (3.1), (3.7) на область $R^2 \setminus L_1$ ($L_1 = L \setminus L_0$) определяют разрывные решения уравнений плоской теории упругости с линией скачка $L_1$.

Доказательство данного утверждения следует из того факта, что носители функций $[p_l]\,\delta_L$ и $[u_l]\cos\varphi_k\delta_L$ совпадают в этом случае с множеством точек $L \setminus L_0$.

Следовательно, интегральные представления разрывных решений для конечного контура $L_1$, состоящего из отдельных разомкнутых и замкнутых кусочно-гладких дуг, могут быть получены из интегральных представлений для непрерывного замкнутого гладкого контура $L$ (возможно, с точками самопересечения), образованного в результате дополнения контура $L_1$ совокупностью гладких дуг $L_0$, если в последних положить $[p_l] = [u_l] = 0$ на $L_0$. Это дает возможность при анализе построенных интегральных представлений ограничиться рассмотрением одних лишь замкнутых непрерывных гладких линий скачка.

**4. Условия существования квазирегулярных разрывных решений.** Установим теперь совокупность достаточных условий, позволяющих среди множества разрывных решений, определяемых формулами (3.11), выделить некоторый класс решений, представляющих практический интерес. С этой целью из множества суммируемых функций, заданных на контуре $L$ и имеющих особенности на конечном множестве точек $E \subset L$, выделим класс функций $H'(E)$.

Будем говорить, что функция $m(s)$, заданная на контуре $L$, принадлежит классу $H'(E)$, если она удовлетворяет условию Гельдера на каждом из участков $L_\nu$ контура $L$, полученных в результате разбиения его конечным множеством точек $E$

$$|m(s_1) - m(s_2)| \leqslant A\ |t(s_1) - t(s_2)|^\gamma; \quad A, \gamma > 0$$
$$s_1, s_2 \in [a, b]:\ t(s_1),\ t(s_2) \in L_\nu$$

а в окрестности каждой точки $t(s_\nu) \in E$ имеет место оценка

$$m(s) = m_\nu^*(s)\,|\,t(s) - t(s_\nu)|^{-\alpha_\nu}, \quad 0 \leqslant \alpha_\nu < 1$$

где $m_\nu^*(s)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера в окрестности точки $t(s_\nu)$ [5].

*Теорема* 3. Пусть $L$ — гладкий непрерывный замкнутый контур ($t(a) = t(b)$), на котором зафиксировано конечное множество точек $E \subset L$, включающее в себя все точки самопересечения контура $L$, и определены суммируемые функции $[p_l]$, $[u_l]$, такие, что $[p_l] \in H'(E)$, $d[u_l]/ds \in H'(E)$ и для каждой точки $t_\nu \in E$ кратности $n$ выполняются условия

$$\sum_{p=1}^{n} \{[u_i](s_p + 0) - [u_i](s_p - 0)\} = 0 \tag{4.1}$$

где $\{s_p\}$ — множество значений дуговой абсциссы, соответствующее данной точке $t_\nu \in E$. Тогда разрывное решение плоской задачи теории упругости с линией скачка $L$, определяемое соотношениями (3.11) квазирегулярно.

*Доказательство.* Допустим, что на контуре $L$ заданы суммируемые функции $[p_l]$ и $[u_l]$, удовлетворяющие всем условиям теоремы 3. Тогда в соответствии с теоремой 2 формулы (3.11) будут определять разрывное решение плоской задачи теории упругости с линией скачка $L$. Остается показать, что граничные значения компонент $\sigma_{ij}$, $u_i$ этого решения существуют почти для всех точек контура $L$ и представляют собой суммируемые функции дуговой абсциссы $s$, а производные $\partial\sigma_{ij}/\partial x_k$, $\partial u_i/\partial x_k$ — локально суммируемые функции в пространстве $R^2$.

Множество точек $E$ вместе с точкой замыкания контура разбивает контур интегрирования $L$ в представлениях (3.11) на $M$ гладких дуг, которые между собой попарно не пересекаются. При этом множество значений параметра $s$, соответствующее концам этих дуг, будет состоять из $M + 1$ элементов: $s_0 = a$, $s_1$, . . ., $s_M = b$. Поэтому, разбивая промежуток интегрирования в формулах (3.11) в соответствии с предложенной схемой и учитывая исходные допущения, а также соотношения (1.3), можно представить их в виде

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u_i^\circ(x) - \alpha\mu^{-1}\Sigma \lim \{\langle [p_l](s)V_{il}(x - t(s))\rangle + \\ &+ \langle \mu\,[u_l](s)(-dW_{il}(x - t(s))/ds)\rangle\} \\ \sigma_{ij}(x) &= \sigma_{ij}^\circ(x) - \alpha\Sigma \lim \{\langle [p_l](s)L_{ijl}(x - t(s))\rangle + \\ &+ \langle \mu\,[u_l](s)(-dK_{ijl}(x - t(s))/ds\rangle\} \\ \alpha &= (2\pi(\varkappa + 1))^{-1}, \quad x \in R^2 \diagdown L \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь и далее угловые скобки означают интегрирование по $s$ в пределах от $s_\nu + \varepsilon$ до $s_{\nu+1} - \varepsilon$, предел вычисляется при $\varepsilon \to 0$, суммирование ведется по $\nu$ от $\nu = 0$ до $\nu = M - 1$. Для ядер $V_{il}(x)$, $W_{il}(x)$, $L_{ijl}(x)$, $K_{ijl}(x)$ получим выражения (в этих и в последующих формулах $p, q =$

$= 1, 2;\ p \neq q$, суммирование по $p$ не ведется)

$$(4.3)\qquad V_{pp}(x) = \varkappa \ln\frac{1}{r} + \frac{x_p^2}{r^2} - \varkappa - \frac{1}{2}, \quad V_{pq}(x) = \frac{x_1 x_2}{r^2}$$

$$W_{pp}(x) = (-1)^p\left(\frac{2x_1x_2}{r^2} - (\varkappa+1)\operatorname{arctg}\frac{x_p}{x_q}\right),$$

$$W_{pq}(x) = (-1)^p\left(\frac{2x_q^2}{r^2} - (\varkappa-1)\ln\frac{1}{r}\right)$$

$$L_{ppp}(x) = \left(\frac{4x_q^2}{r^2} - (\varkappa+3)\right)\frac{x_p}{r^2},$$

$$L_{ppq}(x) = \left((\varkappa-1) - \frac{4x_p^2}{r^2}\right)\frac{x_q}{r^2}$$

$$L_{12p}(x) = L_{21p}(x) = \left((1-\varkappa) - \frac{4x_p^2}{r^2}\right)\frac{x_q}{r^2}$$

$$K_{ppp}(x) = (-1)^q\left(4 + \frac{8x_p^2}{r^2}\right)\frac{x_q}{r^2},$$

$$K_{ppq}(x) = (-1)^q\left(\frac{8x_q^2}{r^2} - 4\right)\frac{x_p}{r^2}$$

$$K_{12p}(x) = K_{21p}(x) = -K_{ppq}(x), \quad r = |x|$$

Поскольку $d[u_l]/ds \in H'(E)$, а ядра $W_{il}(x)$, $K_{ijl}(x)$ — аналитические функции в области $R^2 \setminus \{0\}$, то для вторых слагаемых, стоящих под знаком суммы в представлениях (4.2), применима формула интегрирования по частям. Выполняя указанную операцию в этих формулах, получим

$$u_i(x) = u_i^\circ(x) - \alpha\sum\Big\{\lim\Big\langle\mu^{-1}[p_l](s)V_{il}(x-t(s)) + \\ + \frac{d[u_l]}{ds}W_{il}(x-t(s))\Big\rangle - \lim[u_l](s_{\nu+1}-\varepsilon)W_{il}(x-t(s_{\nu+1})) + \\ + \lim[u_l](s_\nu+\varepsilon)W_{il}(x-t(s_\nu))\Big\}$$

и аналогичное выражение для $\sigma_{ij}(x)$. Сгруппировав в последних выражениях члены при одинаковых значениях функций $W_{il}(x)$ и $K_{ijl}(x)$ и перейдя к пределу с учетом условий (4.1), будем иметь

$$(4.4)\qquad u_i(x) = u_i^\circ(x) - \alpha\int\Big\{\mu^{-1}[p_l](s)V_{il}(x-t(s)) + \\ + \frac{d[u_l]}{ds}W_{il}(x-t(s))\Big\}ds$$

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}^\circ(x) - \alpha\int\Big\{[p_l](s)L_{ijl}(x-t(s)) + \\ + \mu\frac{d[u_l]}{ds}K_{ijl}(x-t(s))\Big\}ds$$

Отсюда следует, что при сделанных предположениях относительно функций скачка $[p_l]$, $[u_l]$ представления (3.11) и (4.4) эквивалентны.

Рассмотрим теперь сингулярные интегралы

$$I_p(x) = \frac{1}{\pi}\int\frac{m(s)(x_p - \xi_p(s))}{|x-t(s)|^2}ds,$$

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi}\int\frac{m(s)\,2(x_p-\xi_p(s))(x_q-\xi_q(s))^2}{|x-t(s)|^4}ds$$

На основании формул Сохоцкого — Племеля ([5], с. 55), определяющих граничные значения интеграла Коши, можно получить аналогичные формулы, определяющие граничные значения этих интегралов при произвольно заданной функции $m(s)$ из класса $H'(E)$

(4.5) $$I_p^{\pm}(t(s_0)) = \pm m(s_0)\cos\varphi_p(s_0) + \frac{1}{\pi}\int \frac{m(s)(\xi_p(s_0)-\xi_p(s))}{|t(s_0)-t(s)|^2}\,ds$$

$$J_p^{\pm}(t(s_0)) = \pm m(s_0)\cos\varphi_p(s_0)(\cos^2\varphi_p(s_0)-\cos^2\varphi_q(s_0)) + \\ + \frac{1}{\pi}\int \frac{m(s)\,2(\xi_p(s_0)-\xi_p(s))(\xi_q(s_0)-\xi_q(s))^2}{|t(s_0)-t(s)|^4}\,ds$$

Интегралы в правых частях этих формул следует рассматривать в смысле главного значения [5].

Заметим, что граничные значения интегралов $I_p(x)$, $J_p(x)$, построенных для некоторой $m(s)\in H'(E)$, не существуют для точек контура, принадлежащих множеству $E$.

Исходя из представлений (4.4) и формул (4.5), находим граничные значения величин $u_i(x)$ и $\sigma_{ij}(x)$ для линии скачка $L$

(4.6) $$u_i^{\pm}(t_0) = u_i^{\circ}(t_0) \pm \frac{1}{2}[u_i](s_0) - \alpha\int\Big\{\mu^{-1}[p_l](s)V_{il}(t_0-t(s)) + \\ + \frac{d[u_l]}{ds}W_{il}(t_0-t(s))\Big\}ds$$

$$\sigma_{ij}^{\pm}(t_0) = \sigma_{ij}^{\circ}(t_0) \pm \frac{1}{2}(\varkappa+1)^{-1}\tau_{ij}(s_0) - \\ - \alpha\int\Big\{[p_l](s)L_{ijl}(t_0-t(s)) + \mu\frac{d[u_l]}{ds}K_{ijl}(t_0-t(s))\Big\}ds,$$
$$t_0 = t(s_0)$$

$$\tau_{pp}(s) = [p_p]\cos\varphi_p(4\cos^2\varphi_q+\varkappa+1) + \\ + [p_q]\cos\varphi_q(4\cos^2\varphi_q-\varkappa-1) + (-1)^p 8\mu\Big\{\frac{d[u_p]}{ds}\cos\varphi_q - \\ - \frac{d[u_q]}{ds}\cos\varphi_p\Big\}\cos^2\varphi_q$$

$$\tau_{pq}(s) = [p_1]\cos\varphi_2(\varkappa+1-4\cos^2\varphi_1) + \\ + [p_2]\cos\varphi_1(\varkappa+1-4\cos^2\varphi_2) + 8\mu\Big\{\frac{d[u_1]}{ds}\cos\varphi_2 - \\ - \frac{d[u_2]}{ds}\cos\varphi_1\Big\}\cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

Приведенные формулы позволяют утверждать, что граничные значения компонент полей перемещений и напряжений для данного разрывного решения являются суммируемыми функциями на контуре $L$.

Наконец, для доказательства того, что функции $u_i$, $\sigma_{ij}$, $\partial u_i/\partial x_k$, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_k$, полученные на основе интегральных представлений (4.4), локально суммируемые на всем пространстве $R^2$, достаточно убедиться, что эти функции — суммируемые во всяком круге достаточно малого радиуса, центр которого лежит на контуре $L$. Доказательство основывается на использовании известных оценок поведения интеграла типа Коши и его производной в окрестности контура интегрирования и вблизи особых точек на этом контуре [5].

На этом доказательство теоремы завершается.

Замечание, высказанное в конце п. 3, позволяет обобщить данную теорему на случай разрывных решений с произвольной кусочно-гладкой линией скачка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
3. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
4. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Поступила в редакцию 15.II.1988

Львов