

УДК 539.3

## О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО РАЗРЫВА В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.

Изучается решение задачи о распаде произвольного разрыва в теории упругости. Предполагается, что плоская граница разделяет упругую однородную нетеплопроводную среду на два полупространства с различными упругими свойствами и плотностями. Каждая из сред обладает произвольного вида однородной начальной деформацией (напряжением) и скоростью. В дальнейшем на границе напряжения и скорости сред предполагаются непрерывными. Это приводит к образованию системы плоских автомодельных волн (простых и ударных), которые распространяются в каждое из полупространств. Задача решается в предположении слабой нелинейности и анизотропии материалов. Это позволяет приближенно вычислить величины напряжений и деформаций на контактном разрыве. После этого задача о распаде произвольного начального разрыва сводится к двум задачам о внезапном изменении нагрузки на границе полупространства, которые решаются независимо для каждой из сред.

**1. Основные уравнения.** Плоскость, разделяющую две среды, примем за плоскость  $x = 0$  в лагранжевых переменных  $x_1, x_2, x_3 = x$ . В ненапряженном состоянии в каждой из сред оси  $x_i$  составляют декартову прямоугольную систему, причем оси  $x_1, x_2$ , расположенные в плоскости границы, могут быть различным образом ориентированы в средах справа и слева от границы раздела. Среду справа от границы ( $x > 0$ ) будем обозначать  $A$ , среду слева ( $x < 0$ ) —  $B$ . Каждая из сред обладает своей однородной начальной деформацией  $\varepsilon_{ij}^{A,B} = \text{const}$  и начальной скоростью  $V_i^{A,B} = \text{const}$ . Задача автомодельна.

Каждую из упругих сред задаем ее внутренней энергией  $U$  или упругим потенциалом  $\Phi = \rho_0 U$ . Пусть для среды  $A$  ( $x > 0$ )  $\Phi^A = \rho_0^A U^A (\partial w_i / \partial x_j, g, S)$ , для среды  $B$  ( $x < 0$ )  $\Phi^B = \rho_0^B U^B (\partial w_i / \partial x_j, g, S)$ . Здесь  $\rho_0$  — плотность среды в ненапряженном состоянии,  $w_i$  — компоненты вектора перемещения,  $S$  — энтропия единицы массы,  $g$  — параметры, характеризующие анизотропию сред, вернее, задающие определенные свойства симметрии, которыми обладает материал. Параметры  $g$  могут быть, вообще говоря, скалярными, векторными, тензорными.

Считаем их постоянными, не меняющимися при прохождении волн деформации.

Из компонент градиента деформаций  $\partial w_i / \partial x_j$  в плоских волнах меняются лишь  $\partial w_i / \partial x$ , для которых удобно ввести обозначения  $\partial w_i / \partial x = u_i(x, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Все прочие  $\partial w_i / \partial x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) остаются постоянными, причем положено  $\partial w_3 / \partial x_\alpha = 0$ , чтобы фронты волн перемещались параллельно начальному положению границы раздела. Остальные  $\partial w_\alpha / \partial x_\beta = \text{const}$  могут создавать деформационную анизотропию среды.

Одномерные адиабатические движения (плоские волны) в каждой из сред  $A$  и  $B$  по разные стороны границы  $x = 0$  описываются нелинейной системой уравнений [1, 2]

$$(1.1) \quad \rho_0^{A,B} \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x}, \quad \sigma_{i3} = \frac{\partial \Phi^{A,B}}{\partial u_i}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь  $v_i = \partial w_i / \partial t$  — компоненты вектора скорости,  $\sigma_{i3}$  — компонент тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа.

Считаем, что на границе раздела двух сред проскальзывания не происходит, она является контактным разрывом, на котором непрерывны векторы скорости и напряжения. Граничные условия удобно записать отдельно для нормальных и касательных компонент названных векторов. Индекс  $\tau$  означает, что указанный вектор лежит в плоскости, параллельной фронту волны

$$(1.2) \quad v_\tau^A = v_\tau^B, \quad \sigma_{\tau 3}^A = \sigma_{\tau 3}^B$$

$$(1.3) \quad v_3^A = v_3^B, \quad \sigma_{33}^A = \sigma_{33}^B$$

Начальные состояния сред  $A$  и  $B$  (при  $t = 0$ ) заданы компонентами деформации  $u_i(t = 0) = U_i^{A,B}$ ,  $(\partial w_\alpha / \partial x_\beta)^{A,B}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2$ ) скорости  $v_i(t = 0) = V_i^{A,B}$  и энтропии  $S^{A,B}$ . Кроме того, среды характеризуются постоянными параметрами анизотропии  $g^{A,B}$ .

**2. Приближенный подход.** Будем считать, что обе упругие среды обладают слабой нелинейностью, так что решение можно получить разложением по малому параметру  $\varepsilon$  (характерной величине деформации). Обе среды могут иметь слабую анизотропию, естественную или деформационную. Примем за  $\delta$  ее характерную величину. Наличие малой нелинейности и анизотропии превращает продольные и поперечные волны в квазипродольные и квазипоперечные. И нелинейность, и анизотропию будем учитывать лишь в главных членах, обнаруживающих отклонение решения от линейного изотропного. Исследование в такой приближенной постановке простых и ударных волн [2—6] показало, что изучение квазипродольных и квазипоперечных волн можно вести независимо, причем для выявления главных нелинейных эффектов достаточно представить упругий потенциал среды разложением по компонентам деформации до членов порядка  $\varepsilon^3$  для квазипродольных волн и до членов порядка  $\varepsilon^4$  для квазипоперечных.

Будут рассматриваться только квазипоперечные волны как наиболее интересные и сложные, приводящие к новым (по сравнению с газовой динамикой) эффектам. Для них неучтенные в разложении  $\Phi$  нелинейные члены отличаются от написанных не менее, чем на  $\varepsilon^2$ . Анизотропию тоже учтем ее главными членами, низшими в разложении по  $\delta$ , а именно линейными по  $\delta$ . Как показано в [6], для широкого класса анизотропных сред (в том числе трансверсально изотропной и ортотропной) разложение потенциала  $\Phi$  для квазипоперечных волн в специально выбранной системе координат  $u_1, u_2$  идет по четным степеням  $u_\alpha$ , т. е. имеет вид [6, 7]

$$(2.1) \quad \Phi = \frac{1}{2} (f - g) u_1^2 + \frac{1}{2} (f + g) u_2^2 - \kappa (u_1^2 + u_2^2)^2 + \\ + \rho_0 T_0 (S - S_0) \\ f = \mu + O(\varepsilon) = \rho_0 c^2$$

Здесь  $c$  — характеристическая скорость линейных изотропных поперечных волн,  $\mu$  — коэффициент Ламе упругой среды,  $\kappa$  — еще один упругий модуль среды, вводящий нелинейные эффекты, постоянная величина  $g \sim \delta$  служит для описания анизотропии. Относительная погрешность принятого разложения не превосходит малой величины  $\chi = \max\{\varepsilon^2, \delta\}$ , т. е. неучтенные члены отличаются от написанных не менее, чем на величину  $\chi$ .

Заметим, что из-за того что в каждой из сред форма (2.1) для записи потенциала  $\Phi$  получается в специально выбранных осях координат  $u_1, u_2$ , эти оси в средах  $A$  и  $B$  могут быть различно ориентированы и иметь разное начало координат.

Чтобы исключить из рассмотрения квазипродольную волну, считаем начальные значения нормальных к границе компонент напряжений и скоростей с точностью до  $\chi$  одинаковыми в обеих средах. Это позволяет (с той же относительной точностью  $\chi$ ) считать выполненными группу граничных условий (1.3).

**3. Определение состояния на контактном разрыве.** Сведем задачу о распаде начального разрыва к автомодельной задаче о внезапном изменении напряжений на границе полупространства. Для этого надо определить значения деформаций  $u_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) на границе контакта при  $t > 0$ . Вследствие автомодельности это будут постоянные величины  $u_\alpha^*$ , которые в общем случае будут различными для сред  $A$  и  $B$ .

Как показано в [7], для волн, распространяющихся в одну сторону, можно связать компоненты скорости и деформации в волне такими же соотношениями, как в линейной изотропной волне (относительная ошибка при этом не превышает величину  $\chi$ )

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_\alpha - V_\alpha^A &= -c^A (u_\alpha - U_\alpha^A) + O(\epsilon\chi) \text{ для волн, идущих на-} \\ &\text{право} \\ v_\alpha - V_\alpha^B &= c^B (u_\alpha - U_\alpha^B) + O(\epsilon\chi) \text{ для волн, идущих налево} \end{aligned}$$

Используя (2.1) и (3.1), в условиях на поверхности контакта сред ( $x = 0$ ) для квазипоперечных волн выпишем в явном виде только главные члены

$$(3.2) \quad \begin{aligned} -c^A (u_\tau^{*A} - U_\tau^A) + V_\tau^A &= c^B (u_\tau^{*B} - U_\tau^B) + V_\tau^B + O(\epsilon\chi) \\ \mu^A u_\tau^{*A} &= \mu^B u_\tau^{*B} + O(\epsilon\chi) \end{aligned}$$

Найденные из этой системы значения  $u_\tau^{*A, B}$  на плоскости контакта будут определены с точностью до  $\chi$ . Но, как сказано выше, именно с такой точностью проводилось исследование простых и ударных волн [2—5], которые будем использовать при построении решения задачи о распаде разрыва. С этой же относительной погрешностью  $\chi$  имеется решение автомодельной задачи о внезапном изменении нагрузки на границе полупространства [8, 9], где с точностью до  $\chi$  указаны области значений  $u_\alpha^*$  на границе, приводящие к различным формам решения. Поэтому при качественном исследовании задачи о распаде разрыва линейного приближения в написании условий на границе и их разрешении достаточно.

Итак, разрешая (3.2) относительно  $u_\tau^*$ , получим

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mu^A u_\tau^{*A} = \mu^B u_\tau^{*B} &= \frac{\mu^A \mu^B}{\mu^A c^B + \mu^B c^A} (c^A U_\tau^A + c^B U_\tau^B + \Delta V) \\ c^{A, B} &= (\mu^{A, B} / \rho_0^{A, B})^{1/2}, \quad \Delta V = V_\tau^A - V_\tau^B \end{aligned}$$

Когда по обе стороны от плоскости  $x = 0$  среда одна и та же, т. е.  $\rho_0$  и  $\mu$  одинаковы, а различие состоит только в начальных деформациях  $U_\tau^{A, B}$  и скоростях  $V_\tau^{A, B}$ , векторы  $u_\tau^*$  на границе непрерывны и вместо (3.3) имеем для них простое выражение

$$(3.4) \quad u_\tau^{*A} = u_\tau^{*B} = U^\circ + 1/2 \Delta V / c, \quad U^\circ = 1/2 (U_\tau^A + U_\tau^B)$$

**4. Задача для полупространства.** Теперь для каждого из полупространств справа и слева от  $x = 0$  имеем следующую автомодельную за-

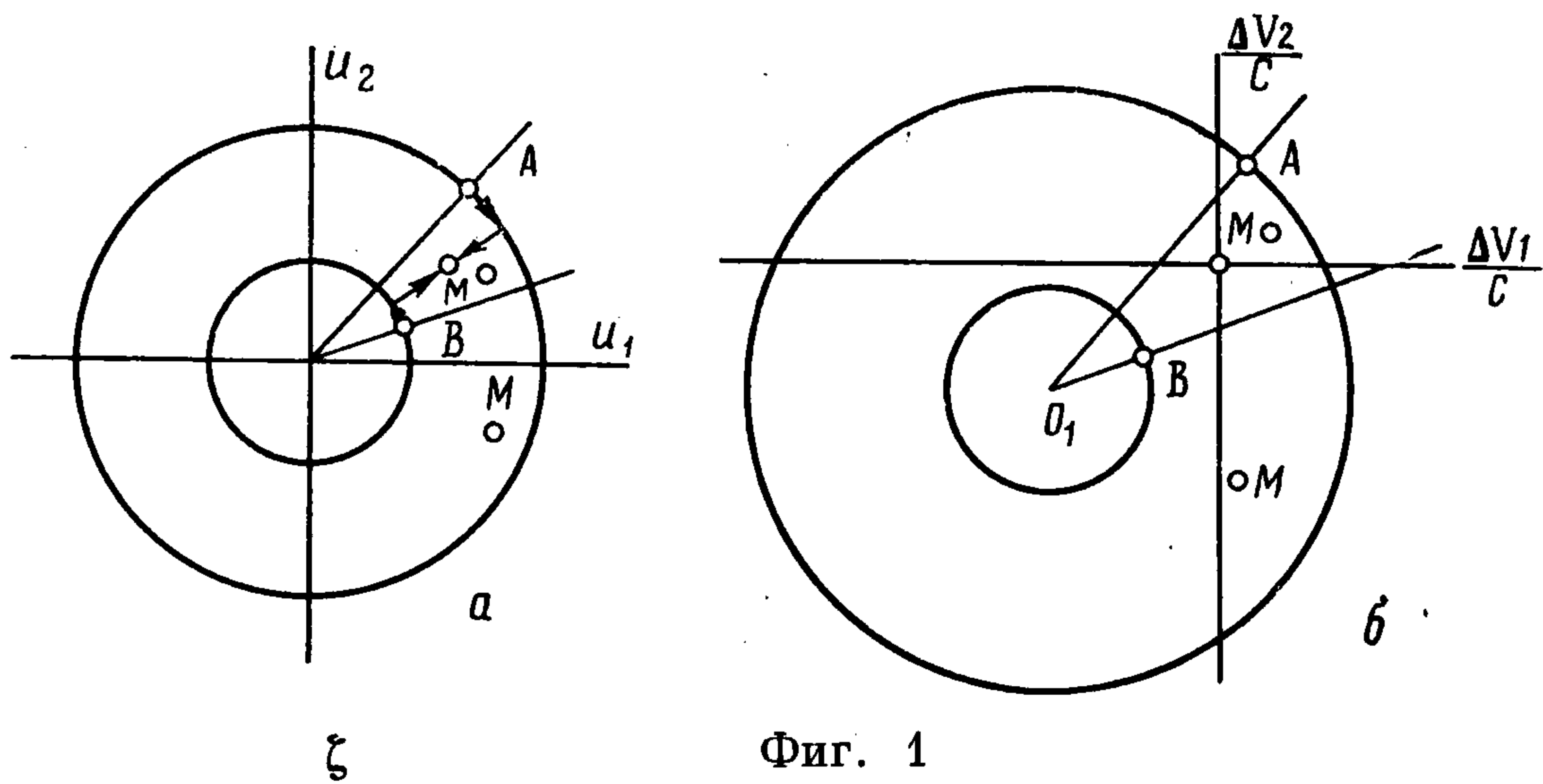
дачу: при  $t = 0$ ,  $x > 0$  и  $x < 0$  каждая среда обладает своей деформацией  $U_\alpha^{A, B}$ , в момент  $t = 0$  на границе  $x = 0$  деформации приобретают значения  $u_\alpha^{*A, B}$  и далее такими остаются. Для каждого из полупространств задачи решаются независимо. Решение такой задачи с принятой здесь точностью изложено в [8, 9]. В обе стороны от границы идут системы авто-модельных простых и ударных волн. Их конфигурации через  $u_\alpha^*$  зависят от начальной скорости  $V_\tau$  и деформации  $U_\tau$  сред. При фиксированных  $U_\tau^A$ ,  $U_\tau^B$  граничные значения  $u_\tau^*$  линейно зависят от вектора относительной скорости  $\Delta V$ . Для каждой точки плоскости  $\Delta V_1$ ,  $\Delta V_2$  можно найти  $u_\tau^{*A, B}$  и, следовательно, при помощи [8, 9] указать те системы волн, которые распространяются в обе стороны от границы.

5. **Задача о распаде разрыва в изотропной среде.** В качестве примера рассмотрим простейший случай задачи, когда среда с двух сторон одна и та же и анизотропия в ней отсутствует ( $g^A = g^B = 0$ ). Тогда часть ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн (окружность) совпадает с одной из интегральных кривых простых волн. Эти волны распространяются без изменения формы и энтропии. По аналогии с магнитной гидродинамикой назовем их вращательным разрывом. В средах, где коэффициент  $\kappa$ , входящий в формулу (2.1), положителен, вращательный разрыв является быстрой волной [2—5], и в обе стороны от границы  $x = 0$  он идет впереди других волн. В средах с  $\kappa < 0$  вращательный разрыв — медленная волна, замыкающая в последовательности волн. Пусть для конкретности  $\kappa > 0$ . Какая волна идет следом за вращательным разрывом зависит от того, в какую область плоскости  $u_\alpha$  попала точка  $u_\alpha^*$ , изображающая состояние на контактном разрыве.

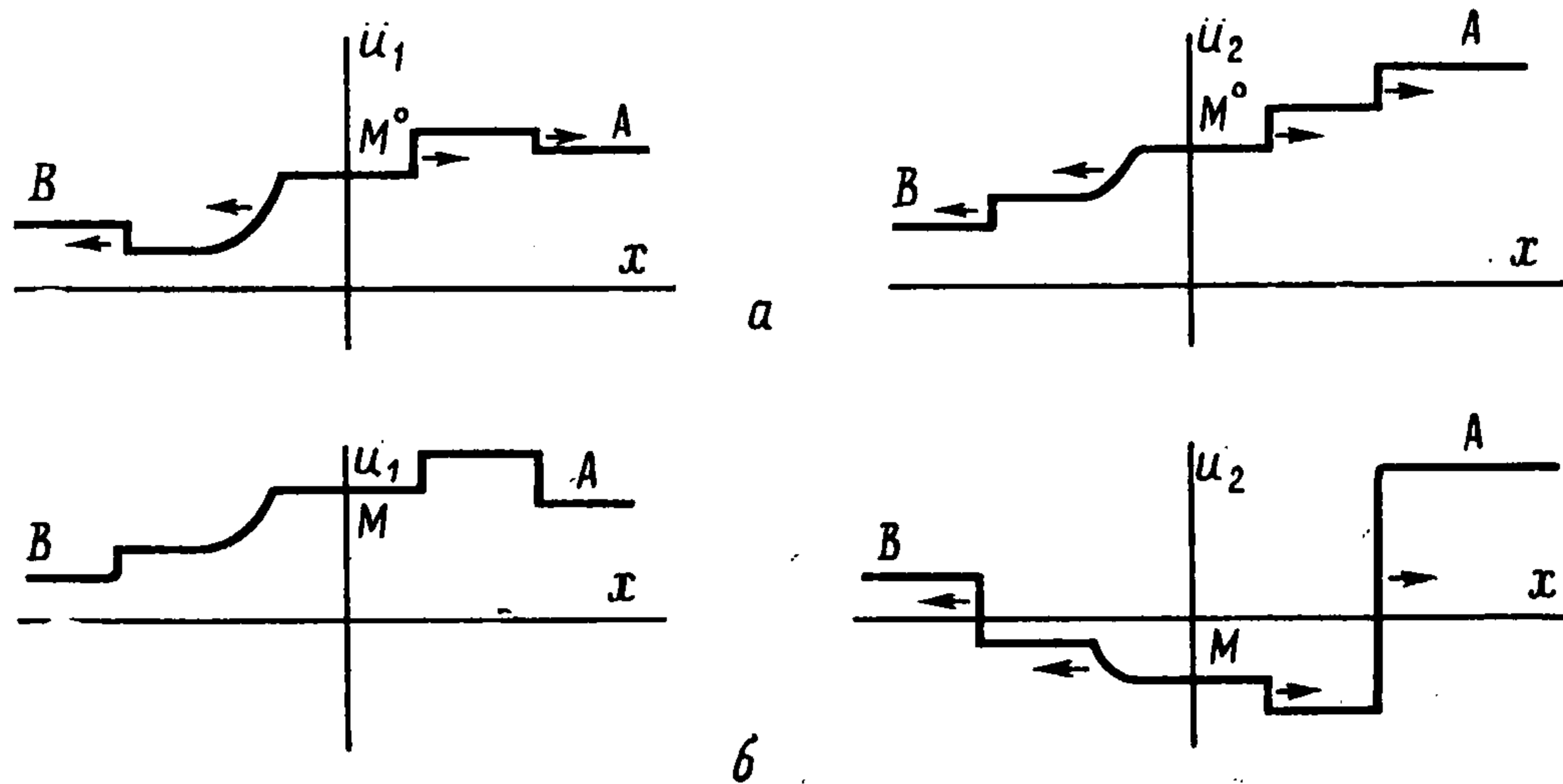
На фиг. 1 начальные состояния  $U_\alpha^A$  и  $U_\alpha^B$  отмечены точками  $A$  и  $B$ . При  $\Delta V = 0$  граничные значения  $u_\alpha^*$  согласно (3.4) дают точку  $M^\circ (U_\alpha^\circ)$ . Другие величины относительной разности скоростей  $\Delta V \neq 0$  могут дать любую другую точку плоскости  $u_\alpha$  в качестве состояния  $u_\alpha^*$  на границе контакта. Две концентрические окружности, проходящие через начальные точки  $A (U_\alpha^A)$  и  $B (U_\alpha^B)$  (фиг. 1, а), делят плоскость  $u_\alpha$  на три области. Попадание  $u_\alpha^*$  в ту или иную область ведет к различным типам решения задачи о распаде разрыва.

При фиксированных  $U_\tau^A$ ,  $U_\tau^B$  значения  $u_\tau^*$  зависят от  $\Delta V$ . Изобразим концы векторов  $\Delta V$  точками плоскости  $\Delta V_\alpha/c$  (фиг. 1, б) и разделим всю плоскость  $\Delta V_\alpha/c$  на области так, чтобы их точки давали значения  $u_\alpha^*$  в указанных на фиг. 1, а областях. Вследствие линейности зависимости  $u_\tau^*$  от  $\Delta V$  соответствующие области на плоскости  $\Delta V_\alpha/c$  тоже образованы концентрическими окружностями с центром в точке  $O_1 (-U_\alpha^\circ)$ , и проходящими через точки  $A (U_\alpha^A - U_\alpha^B)$  и  $B (U_\alpha^B - U_\alpha^A)$ . Когда точка  $u_\alpha^*$  лежит внутри кольцевой области, направо по состоянию  $A$  распространяется сначала вращательный разрыв, за ним медленная ударная волна. Налево (по состоянию  $B$ ) — вращательный разрыв, за ним медленная простая волна (фиг. 2, а). Следом за вращательным разрывом для состояний  $u_\alpha^*$  вне большей окружности в обе стороны идут медленные простые волны, для состояний  $u_\alpha^*$  внутри меньшей окружности — медленные ударные волны.

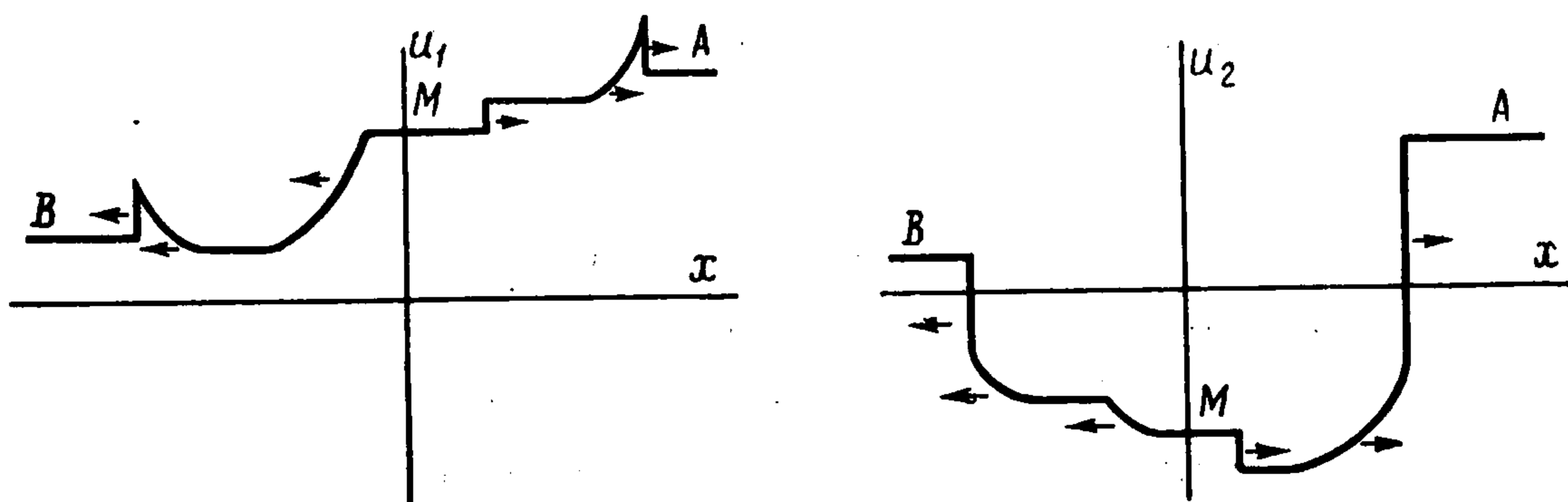
Системы волн, которые могут получиться при распаде начального разрыва в несжимаемой изотропной упругой среде при определенных условиях на вид упругого потенциала, указаны также в [10].



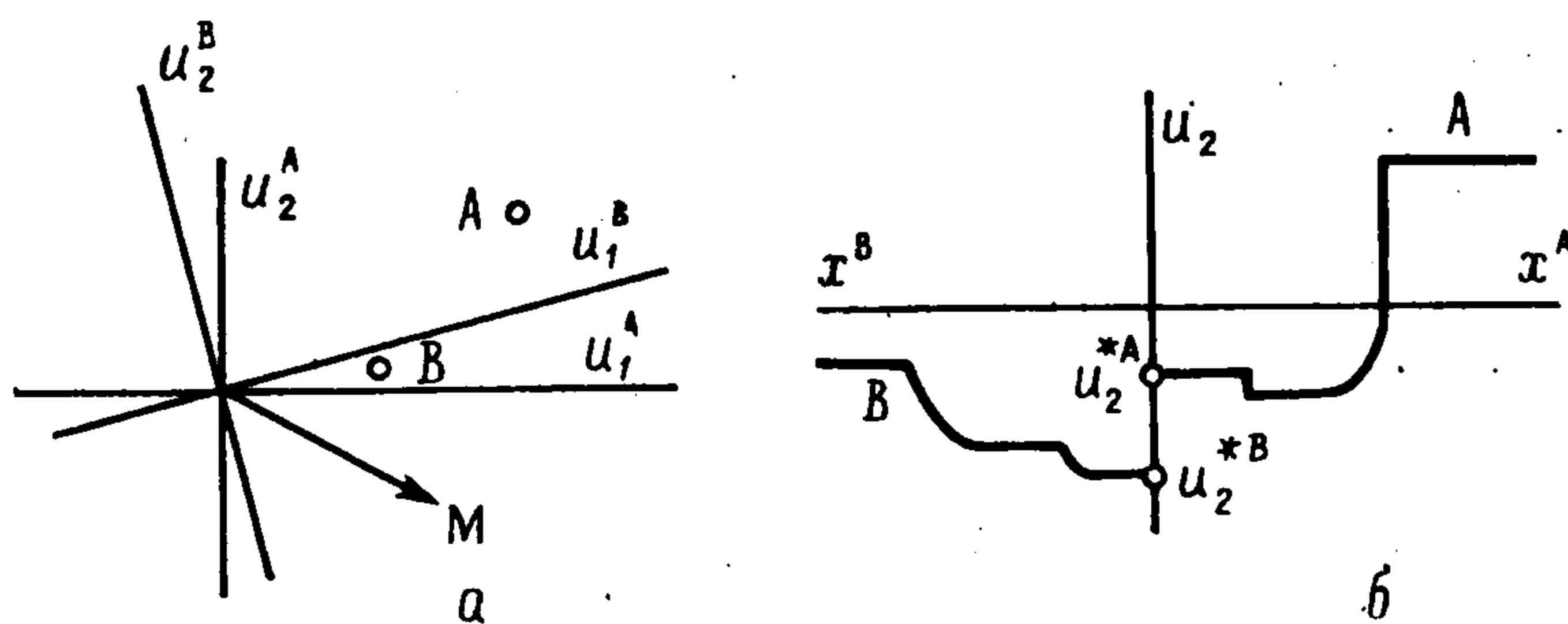
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

6. Влияние анизотропии среды на решение. Когда среда по обе стороны от границы раздела обладает анизотропией ( $g^A = g^B = g \neq 0$ ), становится более сложной геометрия областей, состоящих из граничных значений  $u_{\alpha}^*$ , приводящих к различным типам решения. Эти области и соответствующие им решения задачи о волнах, идущих от границы, изображены в [8] для сред с  $\kappa > 0$  и в [9] для  $\kappa < 0$ . Например, для состояния  $u_{\alpha}^*$ , изображенного на фиг. 1 точкой  $M$ , в отсутствие анизотропии имеем решение, показанное на фиг. 2, б, а при  $g \neq 0$  решение изображено на фиг. 3.

Если же  $g^A \neq g^B$ , то при непрерывности на границе вектора  $u_{\tau}^{*A} = u_{\tau}^{*B}$  вследствие различной ориентации осей  $u_{\alpha}^A$  и  $u_{\alpha}^B$  (фиг. 4, а) ве-

личины компонент этого вектора для области  $A$  и области  $B$  различны, что тоже внесет свой вклад в различие типов решения (фиг. 4, б).

7. **Задача о соударении ударных волн.** На основе полученного решения можно исследовать также задачи об отражении и преломлении волн на границе раздела двух сред, о соударении ударных волн и т. д. Например, по покоящейся среде, обладающей предварительной деформацией  $U_\alpha^\circ$ ,  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ , навстречу одна другой идут две ударные волны. Пусть интенсивности этих волн таковы, что за фронтом волны, идущей справа налево (в отрицательном направлении оси  $x$ ), деформированное состояние приобретает компоненты  $U_\alpha^A$ , а за фронтом волны, идущей навстречу, компоненты деформации имеют величины  $U_\alpha^B$ . При соударении этих волн на границе столкновения должны получиться новые величины для компонент деформации:  $u_\alpha^* = U_\alpha^A + U_\alpha^B - U_\alpha^\circ$ .

Так как  $U_\alpha^A$ ,  $U_\alpha^B$  любые, то состояние  $u_\alpha^*$  на границе может изображаться любой точкой плоскости  $u_\alpha$ . Далее, как и прежде, следует решать две задачи для полупространства, в которых начальное деформированное состояние задано величинами  $U_\alpha^{A,B}$ , а на границе оно внезапно меняется на  $u_\alpha^*$  и далее сохраняется. Вид решения получается, например, таким, как на одной из фиг. 2,3.

Нужно при этом помнить, что согласно [1, 3, 5], ударные волны при отсутствии предварительной деформации  $U_\alpha^\circ$  могут существовать лишь в средах с  $\kappa < 0$ , при  $U_\alpha^\circ \neq 0$  — в любых.

Отметим, что решение всех изложенных задач базируется на решении автомоделной задачи о внезапном изменении деформации на границе упругого полупространства. При решении этой задачи [8, 9] обнаружилось, что при некоторых соотношениях между анизотропией и начальной деформацией может появиться, хотя и небольшая, область значений  $u_\alpha^*$ , для которых решение неединственно. Для этих значений  $u_\alpha^*$  нужны дополнительные исследования. Такое исследование проведено в [11] и позволяет указать то из двух возможных решений, которому следует отдать предпочтение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
2. Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
3. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейноупругих средах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 523—534.
4. Свешникова Е. И. Простые волны в нелинейно упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642—646.
5. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Исследование ударной адиабаты квазиперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831—840.
6. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 110—115.
7. Куликовский А. Г. Об уравнениях, описывающих распространение квазиперечных волн в слабоанизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597—604.
8. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Автомоделная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284—291.
9. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985. С. 133—145.
10. Волков Л. Г. Задача о распаде разрыва для несжимаемого изотропного упругого тела // Динамические задачи механики сплошной среды. Новосибирск: АН СССР, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1983. Вып. 63. С. 33—46.
11. Чугайнова А. П. О формировании автомоделного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692—697.

Москва

Поступила в редакцию  
30.III.1988