УДК 539.3

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОГО КОЛЬЦА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ

Кобелев В. В.

Рассматривается задача максимизации критической нагрузки потери устойчивости упругого нерастяжимого кругового кольца, подверженного гидростатическому давлению. Недеформированное кольцо имеет форму окружности единичного радиуса, а его толщина и, следовательно, изгибная жесткость, изменяются вдоль дуги. Распределение толщины подлежит отысканию из условия максимума критической нагрузки потери устойчивости при условии, что масса кольца остается постоянной. Доказано, что кольцо постоянной толщины имеет максимальную нагрузку потери устойчивости среди всех круговых колец равной массы.

1. Основные уравнения и формулировка задачи оптимизации. Рассмотрим условия потери устойчивости кругового кольца, испытывающего действие равномерно распределенной сжимающей гидростатической нагрузки. Известно, что при действии гидростатического давления элементарные векторы нагрузки остаются нормальными к изогнутой оси кольца, а работа этой нагрузки равна произведению давления на разность площадей, ограниченных кольцом в деформированном и недеформированном состояниях. Следовательно, внешняя нагрузка консервативна и явление потери устойчивости можно исследовать статическим методом.

Предположим, что одна из главных центральных осей симметрии поперечного сечения лежит в плоскости кривизны кольца. При достижении сжимающей нагрузкой критического значения Λ исходная круговая форма кольца становится неустойчивой и возникает возмущенная форма равновесия. Предположим, что изгиб происходит в плоскости кривизны кольца. Тогда безразмерная критическая нагрузка равна минимальному значению отношения Релея [1]:

$$\Lambda = \min R\,[\tau^n],\quad R\,[\tau^n] = \langle \tau^n\,(w'' + w)^2\rangle \,/\, \langle w'^2 - w^2\rangle \tag{1.1}$$

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)\,ds$$

Минимум в (1.1) разыскивается среди всех периодических (с периодом 2π) дважды непрерывно дифференцируемых функций w, таких, что

$$\langle w\rangle = \langle w \sin s\rangle = \langle w \cos s\rangle = 0. \tag{1.2}$$

Отметим, что w имеет смысл безразмерного нормального прогиба. Через $\tau = \tau(s)$ обозначена безразмерная 2π-периодическая функция, пропорциональная площади поперечного сечения кольца, такая, что

$$\langle\tau\rangle = 1,\quad \tau(s) > 0 \tag{1.3}$$

Первое условие (1.3) выражает требование постоянства массы кольца. Величина τ^n пропорциональна изгибной жесткости кольца. Показатель степени n принимает значения 1, 2 и 3. Случаи $n = 1$ и $n = 3$ описывают ситуации, когда форма поперечного сечения афинно преобразуется так, что меняется один из геометрических размеров сечения (изменяется соответственно ширина или высота сечения), а $n = 2$ отвечает подобному изменению формы сечения ([2], § 1.4).

Задача оптимизации формулируется следующим образом: требуется отыскать такое распределение $\tau(s)$, удовлетворяющее условию (1.3), что критическая нагрузка потери устойчивости принимает максимальное значение

$$\Lambda^* = \max_\tau \Lambda \tag{1.4}$$

Докажем, что оптимальным является кольцо постоянной толщины и имеет место неравенство

$$\Lambda \leqslant \Lambda^* = 3 \tag{1.5}$$

причем знак равенства достигается только для кольца постоянной толщины. Неравенство (1.5) относится к изопериметрическим неравенствам относительно собственных значений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений; некоторые общие методы исследований изопериметрических неравенств описаны в [3—5].

2. Преобразование вариационной формулировки и общие свойства краевой задачи. Прежде чем переходить к доказательству неравенства (1.5) отметим некоторые факты, существенные для дальнейшего изложения. Заметим, что Λ — минимальное положительное собственное значение самосопряженной краевой задачи с периодическими граничными условиями

$$(2.1)\qquad y'' + y + \lambda\tau^{-n}y = 0 \qquad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

В этом можно убедиться, выписав уравнения Эйлера функционала (1.1) и положив в них $y = \tau^n(w'' + w)$.

Известно, ([6], гл. VI, § 3), что собственные значения краевой задачи (2.1) простые или двойные и их можно расположить в виде неубывающей последовательности λ_0, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots$ ($\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$), так, что собственная функция, соответствующая собственному значению λ_i, имеет на полуинтервале $[0, 2\pi)$ i нулей, если i четно и $i + 1$ нулей, если i нечетно. Далее, $\lambda_0 < \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Равному нулю двукратно вырожденному собственному значению соответствуют собственные функции $\cos s$ и $\sin s$. Физический смысл имеют третье и четвертое собственные значения. А именно, безразмерная критическая нагрузка потери устойчивости Λ равняется третьему собственному числу $\Lambda = \lambda_3$, которое может быть двукратным: $\Lambda = \lambda_3 = \lambda_4$.

Обозначим $u(s)$ и $v(s)$ собственные функции краевой задачи (2.1), соответствующие собственным значениям λ_3 и λ_4. Эти функции 4 раза изменяют знак на полуинтервале $[0, 2\pi)$. Будем предполагать их ортонормированными

$$(2.2)\qquad \langle u^2\tau^{-n}\rangle = \langle v^2\tau^{-n}\rangle = 1, \quad \langle uv\tau^{-n}\rangle = 0$$

Собственные числа краевой задачи (2.1) могут быть охарактеризованы как экстремальные значения вариационной задачи:

$$(2.3)\qquad \lambda_3 = \min_{y\in\Pi(\tau)} I[y] \equiv I[u] \qquad \lambda_4 = \min_{y\in\Pi_\perp(\tau)} I[y] \equiv I[v]$$

$$I[z] = 2\pi\langle z'^2 - z^2\rangle$$

$$\Pi(\tau) = \{y \mid y \in C^2[0, 2\pi), \quad y(s) = y(s + 2\pi)$$

$$\langle y\rangle = \langle y\sin s\rangle = \langle y\cos s\rangle = 0, \quad \langle\tau^{-n}y^2\rangle = 1\}$$

$$\Pi_\perp(\tau) = \{y \mid y \in \Pi(\tau), \quad \langle yu\tau^{-n}\rangle = 0\}$$

В частности

$$\Lambda_* = \min_{y\in\Pi(1)} I[y] = \min_{y\in\Pi_\perp(1)} I[y] = 2\pi\langle u_0'^2 - u_0^2\rangle = 2\pi\langle v_0'^2 - v_0^2\rangle = 3$$

$$u_0 = \sqrt{2}\cos 2s, \quad v_0 = \sqrt{2}\sin 2s$$

3. Доказательство изопериметрического неравенства. Докажем, что для любой функции $\tau(s)$, такой, что выполняются условия (1.3), справедливо неравенство $\lambda_3 \leqslant \Lambda_*$, причем знак равенства достигается только для $\tau(s) = 1$.

Действительно, поскольку $\lambda_3 \leqslant \lambda_4$, для произвольных функций сравнения $u_1 \in \Pi(\tau)$, $u_2 \in \Pi(\tau)$ имеем

$$(3.1)\qquad \lambda_3 \equiv \frac{\lambda_3 + \lambda_3}{2} \leqslant \frac{2\pi\langle u_1'^2 + u_2'^2 - u_1^2 - u_2^2\rangle}{\langle\tau^{-n}(u_1^2 + u_2^2)\rangle}$$

В частности, можно положить

$$(3.2)\qquad u_1 = C^{-1/2}(u_0\cos\theta + v_0\sin\theta)$$

$$u_2 = C^{-1/2}(-u_0\sin\theta + v_0\cos\theta)$$

$$2C = \langle\tau^{-n}(u_0^2 + v_0^2)\rangle > 0$$

$$\cos 2\theta\,\langle\tau^{-n}(u_0^2 - v_0^2)\rangle + \sin 2\theta\,\langle\tau^{-n}u_0v_0\rangle = 0$$

Тогда правая часть неравенства (3.1) равна

$$(3.3)\qquad \frac{2\pi\langle u_0'^2 + v_0'^2 - u_0^2 - v_0^2\rangle}{\langle\tau^{-n}(u_0^2 + v_0^2)\rangle} \leqslant \frac{2\pi\langle u_0'^2 + v_0'^2 - u_0^2 - v_0^2\rangle}{\langle u_0^2 + v_0^2\rangle} \equiv \Lambda_*$$

Последнее неравенство следует из (1.3). Действительно, поскольку $u_0^2 + v_0^2 = 2$, то $\langle\tau^{-h}(u_0^2 + v_0^2)\rangle = 2\langle\tau^{-n}\rangle$. Из неравенства Гельдера о средних ([7], теорема 211, где положено $r = -n$, $s = 1$) имеем

$$\langle\tau^{-n}\rangle^{-1/n} \leqslant \langle\tau\rangle = 1$$

Отсюда следует, что $\langle\tau^{-n}\rangle \geqslant 1$, причем равенство достигается только для функции, тождественно равной единице. Итак, цепочка неравенств (3.1), (3.3) установлена, а с нею доказано и неравенство (1.5).

Замечания. В [8] развит общий метод установления достаточных условий локального оптимума и простых собственных значений; достаточные условия локального оптимума, как нетрудно проверить, в исследованной задаче удовлетворяются.

Неравенство (1.5) в случае $n = 1$ следует из более общего неравенства. Неравенство (1.5) останется справедливым, если в функционале Релея τ^{-n} заменить на произвольную вогнутую функцию $\Phi(\tau)$, для которой $\Phi(\bar{\tau}) \geqslant \overline{\Phi(\tau)}$, $\Phi(1) = 1$, где $\bar{\tau}$ — среднее значение ([7], гл. 6). Линейная функция, очевидно, вогнутая: $\Phi(\bar{\tau}) = \overline{\Phi(\tau)}$. Действительно, доказательство следует из цепочки неравенств

$$\Lambda_* = \min R[\Phi(\bar{\tau})] \geqslant R[\overline{\Phi(\tau)}] = \overline{R[\Phi(\tau)]} \geqslant \Lambda$$

Первое неравенство вытекает из определения вогнутых функций, второе — из экстремального свойства собственных значений. Минимум разыскивается среди всех допустимых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Budiansky B., Frauenthal J. C., Hutchinson J. W.* On optimal arches // Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. No 4. P. 880—882.
2. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
3. *Bandle C.* Isoperimetric inequalities and applications. Boston: Pitman. 1980. 228 p.
4. *Payne L. E.* Isoperimetric inequalities and their applications // SIAM Rev. 1967. V. 9. No 3. P. 453—488.
5. *Tadjbakhsh I., Keller J. B.* Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. No 1. P. 159—164.
6. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1 М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 347 с.
7. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
8. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Достаточные условия экстремума в задачах оптимизации собственных значений // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 657—667.

Москва

Поступила в редакцию
2.X.1987

УДК 539.3 : 620.19

МЕХАНОЭЛЕКТРОТЕРМОДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛАХ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Юзевич В. Н.

Получена замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих взаимосвязанные механотермодиффузионные, электромагнитные и химические процессы в электропроводных телах с точечными дефектами, разделенных переходным слоем, который моделируется несопротивляющейся изгибу физической поверхностью. С использованием обобщенных условий сопряжения контактирующих фаз найдена для твердых деформируемых тел формула, аналогичная эмпирическому соотношению Антонова.

Напряженно-деформированное состояние элементов конструкций из соединенных металлических частей (например, биметаллы) при воздействии внешней агрессивной среды, нагрева, облучения потоками частиц существенно зависит от процессов перераспределения примесей, химических реакций, электропереноса, а также генерации и рекомбинации точечных дефектов в объеме тел и приповерхностных слоях [1, 2]. Во многих практически важных случаях состояние тел и процессы в тонких приповерхностных областях при наличии перечисленных воздействий оказывают решающее влияние на характер поведения тел в целом [1] и необходимо разрабатывать соответствующие модели механики сплошной среды.

1. Модель системы тел. Рассматривается движение системы двух контактирующих электропроводных тел, которые находятся в силовых, температурных и электромагнитных полях. Трением и проскальзыванием между телами пренебрегаем. Каждое тело — однофазная смесь химических компонент, в число которых входят точечные дефекты (вакансии и внедренные в междоузлия атомы). Ограничимся рассмотрением в системе упругодеформационных, тепловых и электромагнитных процессов, диф-