

4. Возовой Л. П., Непомнящий А. А. Об устойчивости пространственно-периодических конвективных течений в вертикальном слое с волнистыми границами // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 998—1007.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука. 1981. 568 с.
6. Лухарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука. 1985. 320 с.
7. Burkov S. E., Lifsic A. E. Stability of moving soliton lattices // Wave Motion. 1983. V. 5. No. 3. P. 197—213.

Пермь

Поступила в редакцию
27.XI.1987

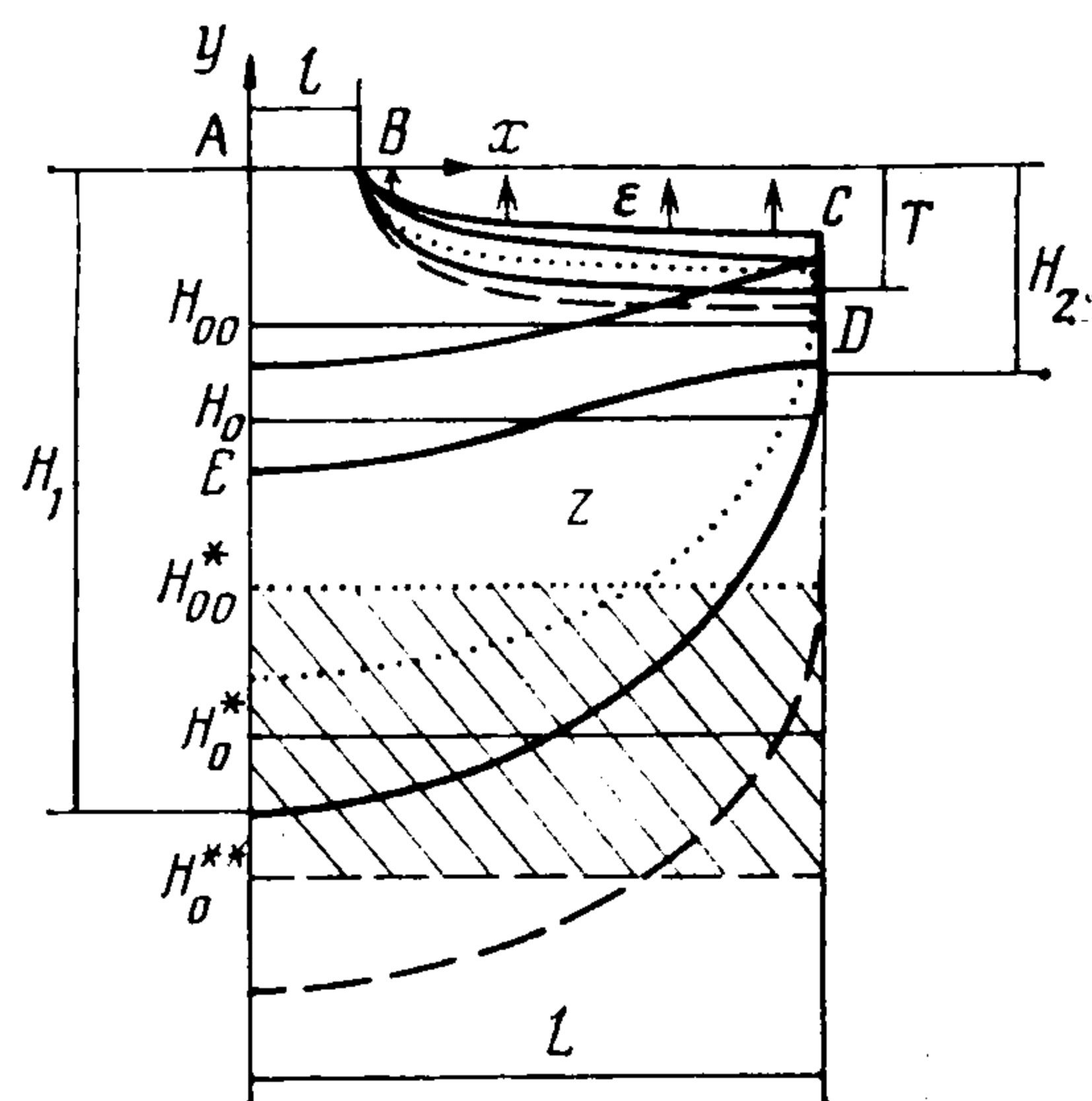
УДК 532.546.06

О КРИТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПАРЕНИЕМ В КАЙМЕ ПРЕСНЫХ ВОД НАД СОЛЕНЫМИ

Береславский Э. Н., Эмих В. Н.

Решение плоской задачи об установившейся фильтрации из системы периодически расположенных каналов в кайме пресных вод над солеными, построенное [1] при некотором ограничении на интенсивность испарения со свободной поверхности, продолжается за указанные рамки путем соответствующих преобразований. Выявляется аналитически и рассчитывается для отдельных вариантов на ЭВМ критический режим течения в кайме, возникающий при определенном усилении испарения на грани вовлечения в движение соленых вод. Величина испарения считается, как и в [1, 2], пропорциональной абсциссе точек свободной поверхности. Каналы представлены прямолинейными отрезками длины $2l$.

Математически процесс моделируется краевой задачей о нахождении комплексного потенциала течения $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости фильтрации, ψ — функция тока) — аналитической функции комплексной координаты $z = x + iy$ внутри области $ABCDE$ (фиг. 1), соответствующей полупериоду течения. [Вдоль граничных участков области z выполняются условия



Фиг. 1

$$(1) \quad AB : y = 0, \varphi = 0; \quad AE : x = 0, \psi = 0; \quad CD : x = L, \psi = 0 \\ ED : \varphi - \rho y = \text{const}, \psi = 0 \quad (\rho = \rho_2/\rho_1 - 1); \quad ED : \varphi + y = 0, \psi = \varepsilon (L - x).$$

Здесь L — половина расстояния между серединами соседних каналов, ρ_1 и ρ_2 — плотности пресных и соленых вод ($\rho_1 < \rho_2$).

Кривая депрессии BC и линия раздела ED подлежат определению. Интенсивность испарения ε была подчинена в [1] неравенствам

$$(2) \quad \varepsilon < \rho, \quad \varepsilon < \varepsilon_l; \quad \varepsilon_l = l/(L - l)$$

В задаче о линзе пресных вод первое неравенство (2) вытекает из ограничения $|W| \leq \rho$ вдоль линии раздела, налагаемого предположением о неподвижности соленых вод на величину скорости фильтрации $\bar{W} = W_x + iW_y$, отнесенной к коэффициенту фильтрации. В случае же каймы некоторое превышение ε над ρ может амортизироваться в пределах участка CD (фиг. 1), не нарушая упомянутого ограничения и самой схемы течения. Вместе с тем в силу второго неравенства (2), вытекающего из ограничения $|W| < 1$ в пределах контура канала AE , возможность реализации неравенства $\varepsilon > \rho$ обусловлена соотношением $\varepsilon_l > \rho$.

При его выполнении возникает альтернатива: либо с увеличением параметра ε в интервале (ρ, ε_l) будет достигнуто значение $\varepsilon = \varepsilon^*$, превышение которого нарушит равновесие соленых вод с каймой пресных, либо такое равновесие сохранится во всем указанном интервале возрастания параметра ε .

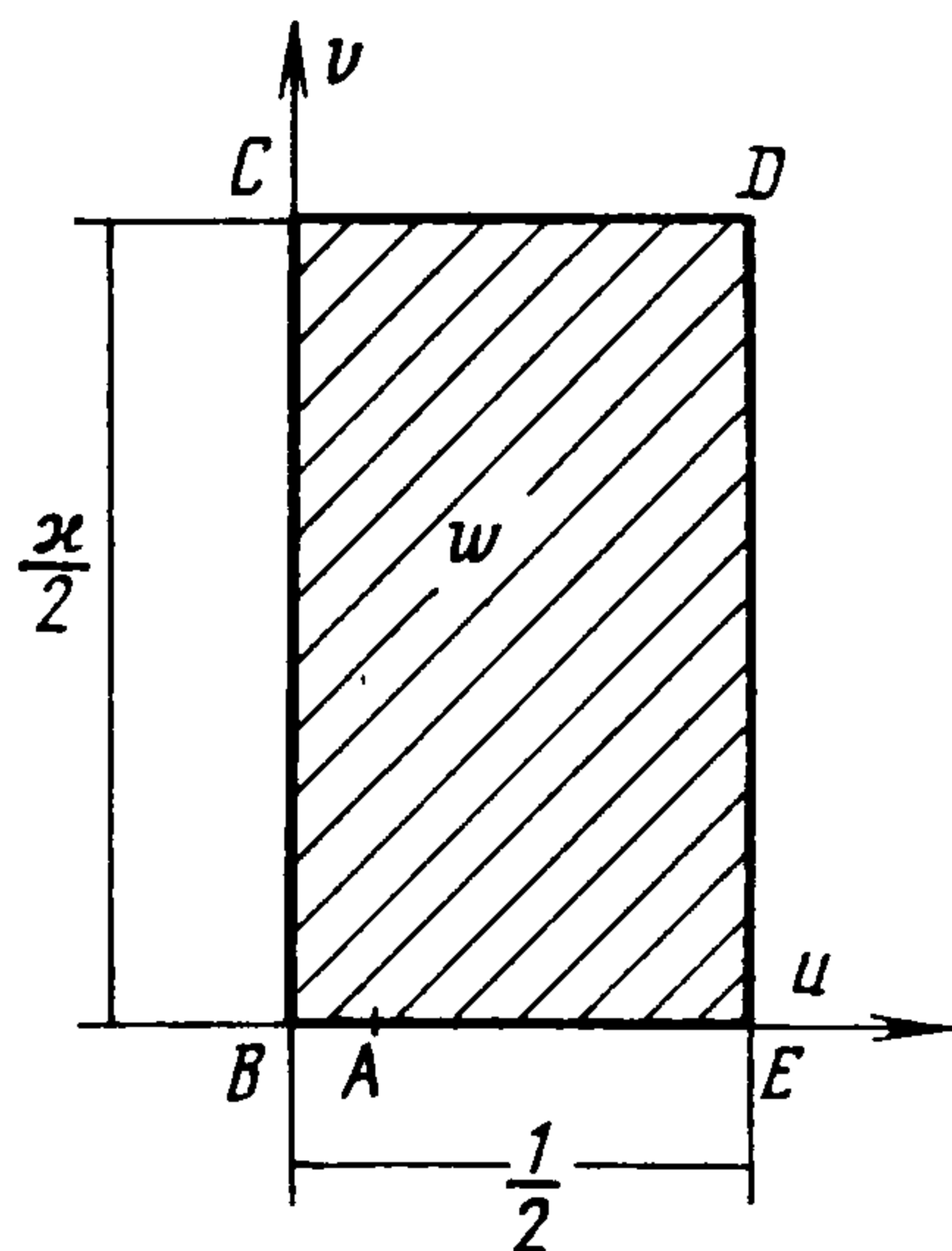
Для анализа этой ситуации преобразуем полученное ранее [1] решение применительно к соотношению $\varepsilon > \rho$. В результате основное уравнение примет вид

$$(3) \quad dz/dw = -M_0 [e^{\pi(\gamma+2\alpha w)} \vartheta_4(w + \alpha\kappa, \kappa) + e^{-\pi(\gamma+2\alpha w)} \vartheta_4(w - \alpha\kappa, \kappa)] \Delta^{-1}$$

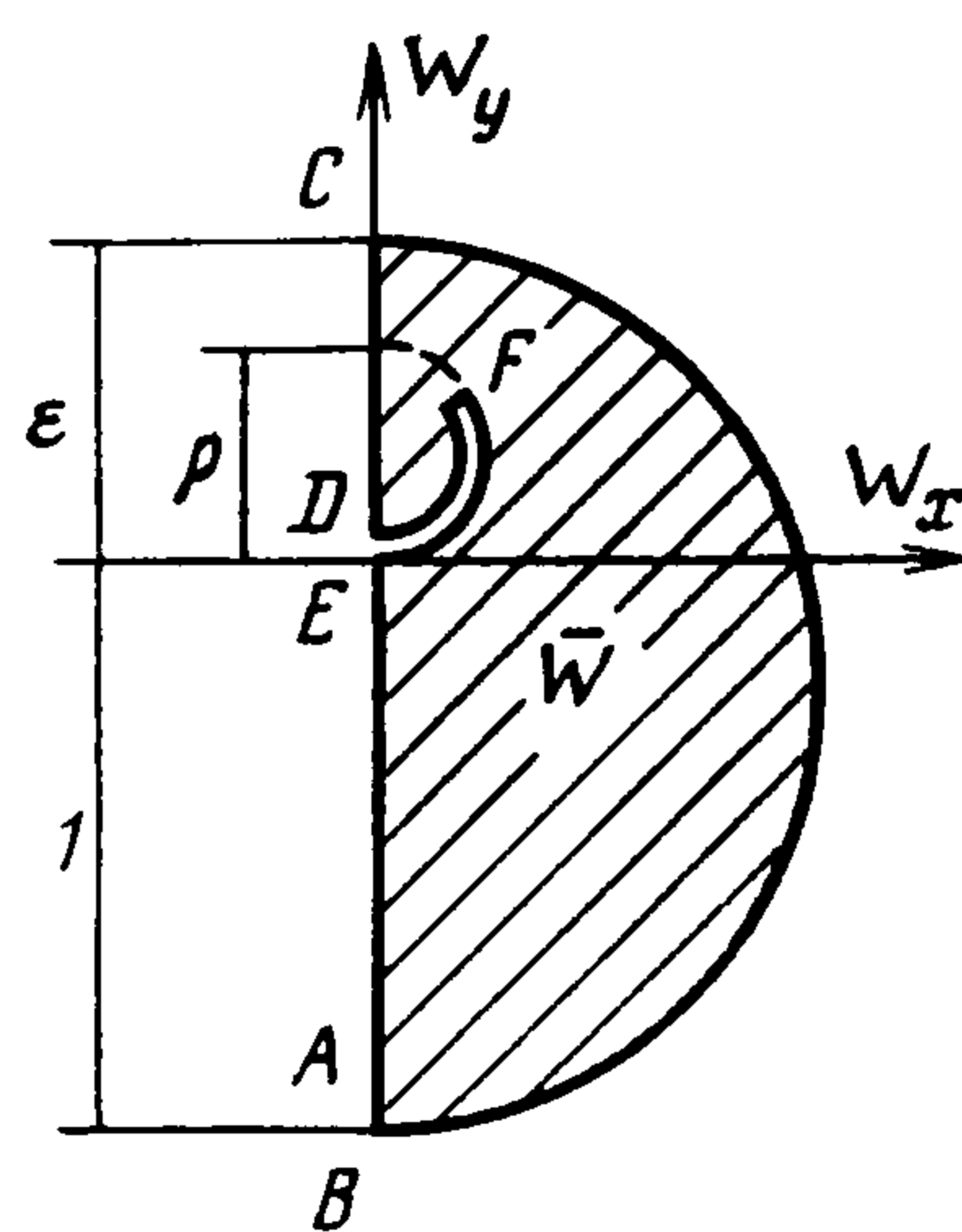
$$M_0 > 0, \quad \alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\varepsilon - \rho}{\rho(1 + \varepsilon)}}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\varepsilon(\varepsilon - \rho)}{1 + \rho}}$$

$$\kappa = K'/K, \quad \Delta = \vartheta_4(w, \kappa) \sqrt{a^2 - \operatorname{sn}^2(2Kw, k)}, \quad a = \operatorname{sn}(2Kw_A, k)$$

Здесь ϑ_1 и ϑ_4 — тета-функции [3], K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода при модуле k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$ соответственно, sn — эллиптическая функция Якоби. Область параметрической переменной $w = u + iv$ представлена на фиг. 2.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для точки D ($v = \kappa/2$) на линии раздела ED ($w = 1/2 + iv, 0 \leq v \leq \kappa/2$) равенство (3) дает соотношение

$$(4) \quad (dz/dv)_D = 2M \operatorname{sh} \pi\beta \vartheta_2(\alpha\kappa, \kappa) / [\vartheta_3(0, \kappa) \sqrt{1 - a^2k^2}], \quad M = \sqrt{k} M_0,$$

$$\beta = \alpha + \gamma$$

На основании (4) и с учетом свойств тета-функции ϑ_2 заключаем

$$(dy/dx)_D = 0, \quad \alpha\kappa \neq 1/2 + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, принятая в [1] и реализуемая при $\varepsilon < \rho$ схема течения в кайме с горизонтальной касательной к линии раздела в точке D сохраняется и для значений $\varepsilon > \rho$, удовлетворяющих неравенству $\alpha\kappa < 1/2$ и второму соотношению (2).

При $\alpha\kappa = 1/2$ уравнение (3) на линии раздела ED запишется в виде

$$dz/dv = 2M \operatorname{sh} [\pi(\beta + iv/\kappa)] \vartheta_4(iv, \kappa) /$$

$$/ [\vartheta_2(iv, \kappa) \sqrt{1 - a^2 + a^2k'^2 \operatorname{sn}^2(2Kv, k')}]$$

Отсюда вытекает равенство

$$(5) \quad dy/dx = \operatorname{cth} \pi\beta \operatorname{tg} (\pi v/\kappa)$$

и следовательно, в отмеченном случае крутизна линии раздела монотонно возрастает при движении к точке D , которая становится теперь точкой заострения: согласно (5), имеем в ней $dy/dx = \infty$.

Соответствующие трансформации происходят и с годографом скорости. Для их обнаружения воспользуемся зависимостью для комплексной скорости фильтрации $W = W_x - iW_y = d\omega/dz$ вдоль линии раздела

$$W = -i\rho \operatorname{ch} \pi\beta V(v), \quad 0 \leq v \leq \kappa/2$$

$$V(v) = \begin{cases} \Lambda(0, v) \Lambda^{-1}(\beta, v), & \alpha\kappa < 1/2 \\ i \sin(\pi v/\kappa) \operatorname{csch} \pi(\beta + iv/\kappa), & \alpha\kappa = 1/2 \end{cases}$$

$$\Lambda(\beta, v) = e^{\pi(\beta+2i\alpha v)} \vartheta_3(iv + \alpha\kappa, \kappa) - e^{-\pi(\beta+2i\alpha v)} \vartheta_3(iv - \alpha\kappa, \kappa)$$

Отсюда для точки D получаем $W = 0$ при $\alpha\kappa < 1/2$, $W = -i\rho$ при $\alpha\kappa = 1/2$. Это означает, что при $\varepsilon > \rho$ годограф не претерпевает принципиальных изменений по сравнению со случаем $\varepsilon < \rho$, пока $\alpha\kappa < 1/2$. Отличие состоит лишь в том, что теперь на про-

должности участка EFD — разреза по дуге окружности $|\overline{W} - i\rho/2| = \rho^2/4$ — находится участок CD (фиг. 3). На него, в точку $\overline{W} = i\rho$, и выходит при $\alpha\kappa = 1/2$ вершина F упомянутого разреза. Сюда же в силу изложенного выше переходит из начала координат точка D ; в результате из годографа выпадает полукруг $|\overline{W} - i\rho/2| < \rho^2/4$.

При $\alpha\kappa = 1/2$ имеем в указанной точке $W_y = -(dp/dy)/(\rho_1 g) - 1 = \rho$, т. е. $dp/dy = -\rho_2 g$: градиент понижения давления по направлению потока становится здесь равным градиенту гидростатического давления в зоне покоящихся соленых вод. Вовлечь их в движение должно в подобной ситуации дополнительное сколь угодно малое усиление испарения. Отмеченный предельный случай отражает, следовательно, критический режим течения в кайме на грани нарушения динамического равновесия фильтрующихся пресных вод с подстилающими кайму солеными водами.

Для выявления предпосылок реализации такого режима исследуем связь между исходной глубиной H_0 поверхности соленых вод и максимально допустимым в схеме каймы значением ε^* параметра ε при фиксировании в каждом конкретном варианте трех остальных входных физических параметров схемы: L , l и ρ .

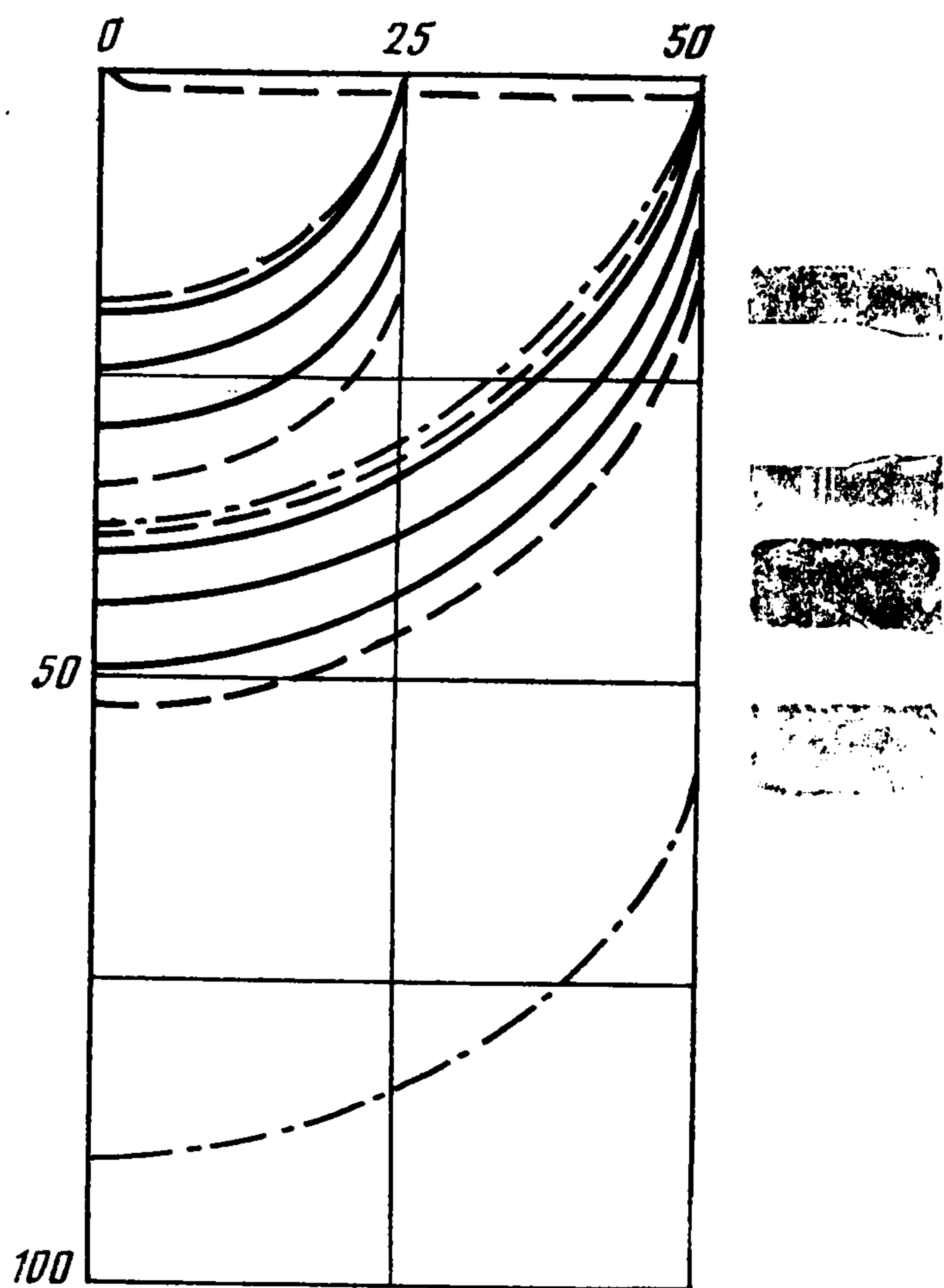
Как установлено в [1], каждому значению $\varepsilon \in (0, \rho)$ соответствует величина $H_0 = H_{00}(L, l, \rho, \varepsilon)$, при которой кайма распадается на цепочку линз, связанных в угловых точках (фиг. 1). Это значение при $H_0 = H_{00}$ будет, следовательно, предельным значением ε^* параметра ε . Зависимость $\varepsilon^*(H_0)$ оказывается возрастающей, и по достижении величиной H_0 некоторого значения H_{00}^* вырождение каймы произойдет при максимально возможном в схеме линзы значении $\varepsilon^* = \rho$. Такая предельная линза и соответствующая ей исходная глубина соленых вод схематично обозначены на фиг. 1 пунктиром.

В случае $H_0 > H_{00}^*$ кайма формируется также при $\varepsilon > \rho$. Именно для таких глубин и должен возникать отмеченный выше критический режим течения, если вызывающее его значение $\varepsilon = \varepsilon^*$ находится в интервале (ρ, ε_l) .

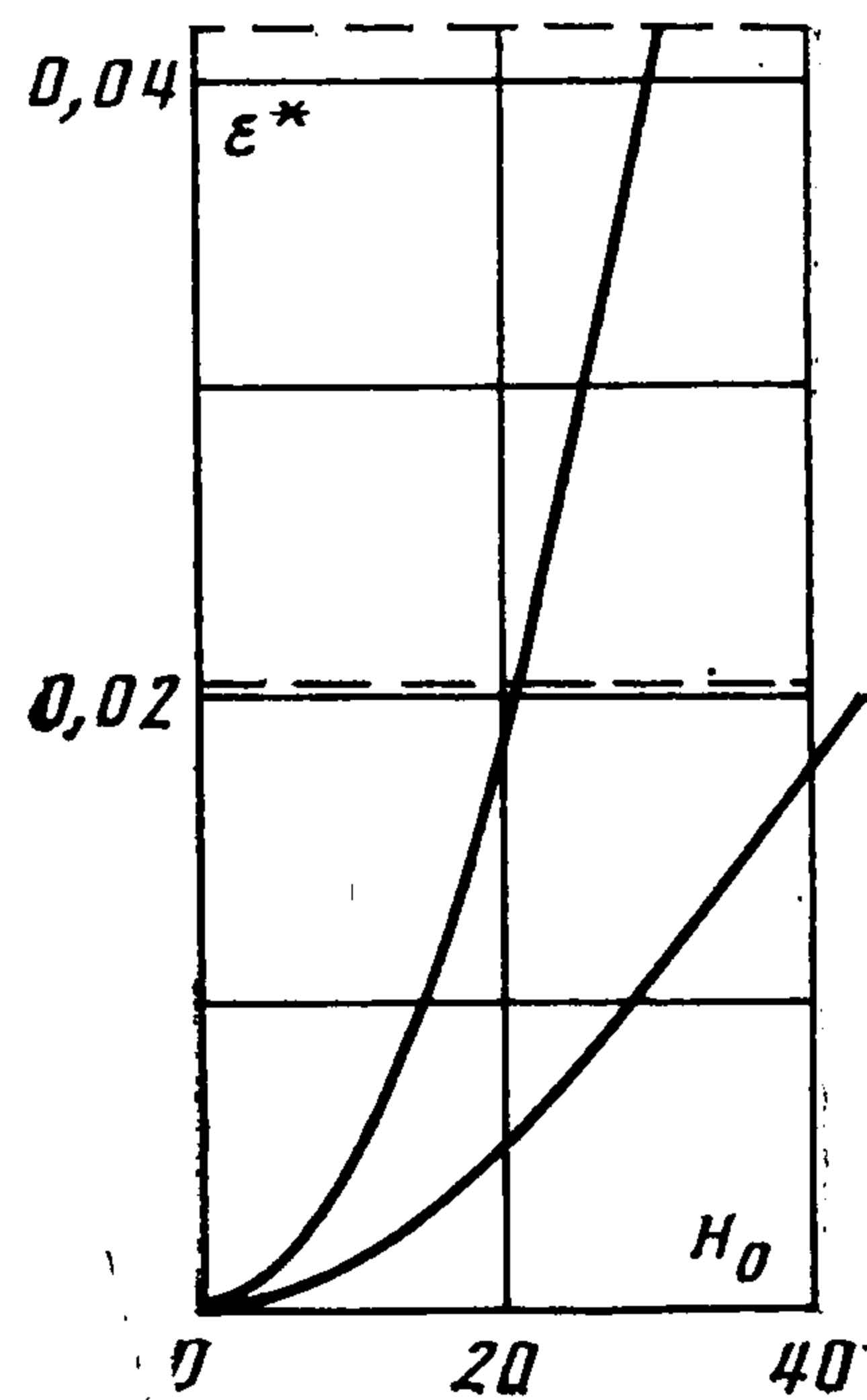
Исследование этого режима производилось посредством числовых расчетов по зависимостям, полученным из представлений (3) при $\alpha\kappa = 1/2$. В результате обнаружилось, что при условленном фиксировании величин L , l и ρ для каждого расчетного значения параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_l)$ критический режим возникает при определенном значении $H_0 = H_0^* > H_{00}^*$. Величина H_0^* возрастает с ростом ε : расширение диапазона возможного изменения испарения происходит, как и в случае $\varepsilon < \rho$, за счет увеличения глубины залегания соленых вод.

При таком характере зависимости $H_0^*(\varepsilon)$ должна существовать величина $H_0^{**} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_l} H_0^*$ — верхняя граница значений H_0 , для которых увеличение ε приведет в конечном итоге к дестабилизации соленых вод. В случае же $H_0 > H_0^{**}$ последние останутся неподвижными под стационарным потоком пресных вод в кайме при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_l)$ — в пределах выполнения ограничения $|W| < 1$ на AE . Для указанных значений глубины H_0 течение в кайме описывается посредством функций dz/dw и $d\omega/dw$, выражения для которых при $\varepsilon < \rho$ получены в [1]; при $\varepsilon > \rho$ первая из этих функций представлена формулами (3).

L	$10^3 \rho$	H_0	$10^3 \varepsilon^*$	H_1	H_2	T	$10^4 k$	$10^4 a$
25	10	14,07	10,00	18,99	0,626	0,626	0	749
		15,00	11,21	19,90	0,832	0,698	27	694
		20,00	18,98	24,53	6,338	1,221	2078	444
		25,00	30,56	29,30	12,08	2,265	4399	198
		30,05	41,17	34,25	17,42	4,957	5603	8,7
50	10	28,48	10,00	38,35	1,597	1,597	0	252
		30,00	10,93	39,82	1,877	1,702	11	222
		35,00	14,20	44,49	6,521	2,428	681	134
		40,00	17,88	49,15	12,44	3,516	1777	51,8
		43,31	19,91	52,32	16,16	4,921	2321	9,8
50	1	27,27	1,00	37,22	0,141	0,141	0	469
		35,00	1,58	44,39	6,684	0,216	1174	394
		81,56	19,91	89,61	57,40	4,865	9003	8,1



Фиг. 4



Фиг. 5

В таблице приведены результаты расчета характерных размеров каймы H_1 , H_2 и T в критическом режиме при $l = 1$, трех комбинациях величин L , ρ и нескольких значениях величины H_0 , заключенных в пределах интервала (H_{00}^*, H_{00}^{**}) реализации режима (фиг. 1). Левый конец интервала H_{00}^* предвычисляется в каждом варианте по формулам для линзы при $\varepsilon^* = \rho$. Что касается правого конца, то, как уже отмечалось, при соответствующем ему значении $\varepsilon^* = \varepsilon_l$ нарушится условие $|W| < 1$ вдоль участка AE и последний вместе со всем годографом вырождается в точку $\bar{W} = i$ (фиг. 3). Тенденция к такому вырождению отражена и в таблице: при $H_0 \rightarrow H_{00}^{**}$, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_l$ имеем $a \rightarrow 0$ и, таким образом, в плоскости w (фиг. 2) участок AE стягивается в точку $w = 0$. В связи с этим увеличение параметра ε при вычислениях лимитировалось значением $\varepsilon_0^* = \varepsilon_l - 0,0005$. Определяемую для него величину H_0 можно рассматривать как некоторое приближение значения H_{00}^{**} .

На фиг. 4 изображены линии раздела, рассчитанные для табличных комбинаций входных параметров. В сериях со значением $\rho = 0,01$ крайние варианты представлены штриховыми, а в случае $\rho = 0,001$ — штрихпунктирными линиями. Кривая при $H_0 = 35$; $\rho = 0,001$ не строилась, поскольку она весьма близка к линии раздела при $H_0 = 35$; $\rho = 0,01$; $L = 50$; это обнаруживается и при сравнении указанных вариантов по табличным значениям H_1 и H_2 . Сама же дестабилизация соленых вод меньшей плотности происходит при почти пропорциональном ослаблении интенсивности испарения, а следовательно, и процесса фильтрации в кайме; сообразно с этим уменьшается и максимальная глубина T свободной поверхности каймы. Депрессионные кривые во всех расчетных вариантах близки между собой по форме, а в масштабах графика мало различаются и по расположению, в связи с чем на фиг. 4 построена только одна такая кривая — для линзы при $L = 50$; $\rho = 0,01$.

Описанная выше зависимость ε^* иллюстрируется на фиг. 5 при $\rho = 0,01$ верхней ($L = 25$) и нижней ($L = 50$) линиями. Штриховыми горизонталями отмечены соответствующие предельные значения параметра $\varepsilon = \varepsilon_l$.

Авторы благодарят Н. С. Колодея за помощь при вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береславский Э. Н., Эмих В. Н. Задача о фильтрации из системы каналов в кайме пресных вод над солеными с испарением // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 446—454.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 664 с.
3. Янке Э., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.