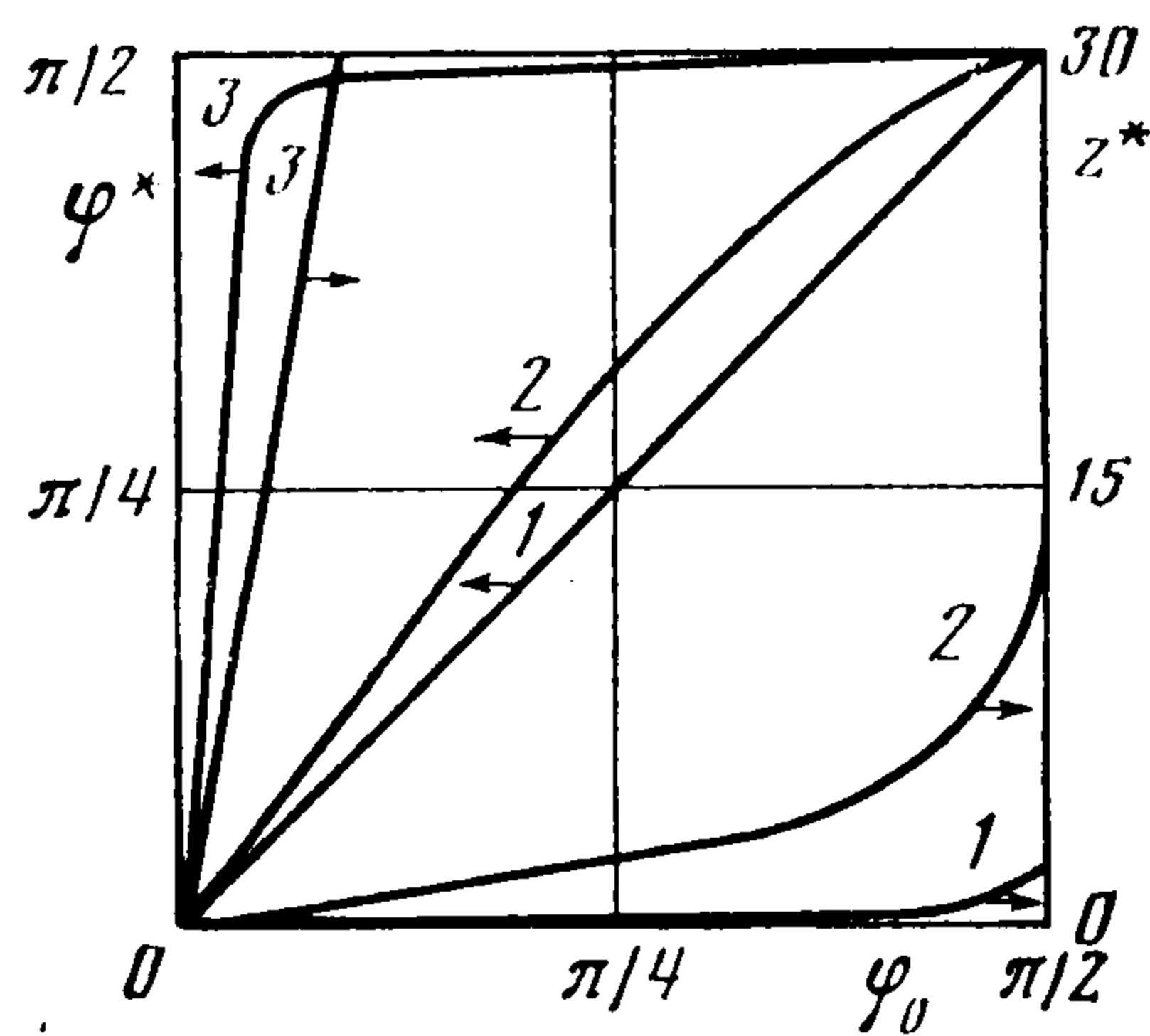


Фиг. 1



Фиг. 2

(φ_0 — угол падения материальной точки на струну, φ^* — угол отражения, τ^* — безразмерное время контакта, z^* — безразмерный путь, пройденный материальной точкой вдоль струны за время контакта, K — коэффициент восстановления энергии, β — безразмерный коэффициент жесткости основания).

На фиг. 1, 2 представлены зависимости $\theta^* = \lg \tau^*(\varphi_0)$, $K = K(\varphi_0)$, $\varphi^* = \varphi^*(\varphi_0)$, $z^* = z^*(\varphi_0)$ при $\beta = 100; 1; 0,01$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Приведенные зависимости получены при $V_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = a$. При других значениях начальной скорости $V_0 < a$ качественная картина графиков не меняется.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

а) при увеличении угла падения происходит увеличение времени контакта, расстояния, проходимого материальной точкой, и коэффициента восстановления;

б) при любом $\beta \neq 0$ имеет место неравенство $\varphi^* \geq \varphi_0$;

в) при уменьшении β имеем $\tau^* \rightarrow +\infty$, $z^* \rightarrow \infty$,

$$K \rightarrow 0, \varphi^* \rightarrow \pi/2;$$

г) при $\beta \rightarrow +\infty$ имеем $\tau^* \rightarrow 0$, $z^* \rightarrow 0$, $K \rightarrow 1$, $\varphi^* \rightarrow \varphi_0$.

Как и следовало ожидать, удар материальной точкой по неподпружиненной ($h = 0$) струне абсолютно неупругий, а результаты численных исследований удара по пружиненной струне показывают, что по мере увеличения жесткости основания удар приближается к абсолютно упругому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 6. С. 449—462.
2. Маланов С. Б., Уткин Г. А. Ударное взаимодействие сосредоточенного объекта с одномерной упругой системой // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 42—46.
3. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.: Л.: Гостехиздат, 1951. 432 с.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Горький

Поступила в редакцию
2.11.1988

УДК 532.516 : 536.25

О ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С ИСКРИВЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

Непомнящий А. А.

Исследуются режимы смешанной конвекции в вертикальном слое с периодически искривленными границами. Амплитуда волнистости стенок слоя и поток жидкости вдоль слоя предполагаются малыми, число Грасгофа — близким к критическому.

Установлено, что помимо исследованных в [1, 2] пространственно-периодических движений при малой амплитуде волнистости возможны устойчивые пространственно-модулированные (квазипериодические и солитонные) волновые режимы течения, подобные модулированным конвективным структурам в горизонтальном слое [3].

1. Постановка задачи была описана ранее [1, 2]. Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением области $G > G_c$ ($G = g\beta\Theta d^3/\nu^2$ — число Грасгофа, G_c — критическое число Грасгофа), преобразованием

$$(1.1) \quad T = \frac{JG_2}{I} t_2, \quad Y = \left(\frac{JG_2}{R} \right)^{1/2} y_1$$

$$A = \left(\frac{S}{JG_2} \right)^{1/2} a_1 \exp(-ik_1 y_1)$$

приведем полученное в [2] уравнение (2.9), определяющее эволюцию огибающей системы конвективных вихрей, к следующему виду (индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной):

$$(1.2) \quad A_T = A_{YY} + 2iK_0 A_Y + (1 - K_0^2 - i\omega) A - |A|^2 A + \delta$$

$$Y \rightarrow \pm\infty, \quad |A| < \infty$$

Здесь

$$(1.3) \quad \omega = -\frac{Bq}{J(G - G_c)}, \quad \delta = \frac{DS^{1/2}}{J^{3/2}} \frac{\eta}{(G - G_c)^{3/2}}$$

$$K_0 = \left(\frac{R}{J} \right)^{1/2} \frac{k_0 - k_c}{(G - G_c)^{1/2}}$$

(q — безразмерный поток жидкости, k_0, η — волновое число и амплитуда искривления границ, k_c — критическое волновое число, B, J, D, S, R — вещественные постоянные, определенные в [2, 4]).

Подробно исследовался [1, 2] частный класс решений уравнения (1.2) вида $A = Z(T)$. Этот тип решений, согласно определению амплитудной функции, отвечает пространственно-периодическим движениям с периодом $2\pi/k_0$, «навязанным» волнистостью границ. Ниже рассматриваются другие типы устойчивых движений, не обладающие пространственной периодичностью, при малых значениях параметра δ .

2. Будем искать периодические по Y и T решения задачи (1.2) в виде ряда по степеням δ :

$$(2.1) \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sum_{m=-n+1}^{n+1} A_m^{(n)} \exp[im(\Delta Y - \Omega T + \Phi_0)]$$

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \Omega^{(n)}$$

выбрав в качестве нулевого приближения

$$A_1^{(0)} = (1 - K^2)^{1/2}; \quad \Omega^{(0)} = \omega; \quad K = K_0 + \Delta$$

Подставим разложения (2.1) в (1.2) и будем приравнять слагаемые одного порядка по δ . Можно убедиться, что при выполнении условия $K^2 < 1/3$ задача разрешима во всех порядках по δ , за исключением резонансного случая $\Delta = \omega = 0$. Величины $A_m^{(n)}$ отличны от нуля, только если m и n разной четности, разложение для Ω содержит только члены с четными n . Заметим, что коэффициенты $A_m^{(n)}$ и $\Omega^{(n)}$ содержат множитель $|H^{-n}|$, где

$$H = 2(1 - 3K^2) \Delta^2 + 2i\omega(1 - K^2) + (\Delta + i\omega)^2$$

поэтому фактически малым параметром, по которому производится разложение функций, является $\delta |H|^{-1}$.

Решение (2.1) описывает бегущую волну со средним волновым числом $k_c + KR^{-1/2} [(J(G - G_c))]^{1/2}$, промодулированную в пространстве с периодом $2\pi R^{1/2} [J\Delta(G - G_c)]^{-1/2}$.

С целью исследования устойчивости наложим на периодическое решение A малое возмущение a , эволюция которого описывается задачей с периодическими коэффициентами. Нормальные возмущения имеют вид функций Флоке

$$\begin{aligned} a &= a_1(Y, T) \exp(iQY + \lambda T) + a_2(Y, T) \exp(-iQY + \lambda T) \\ a_i(Y + 2\pi\Delta^{-1}, T) &= a_i(Y, T) \\ a_i(Y, T + 2\pi\Omega^{-1}) &= a_i(Y, T); \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Наиболее опасными оказываются возмущения с малыми Q , которые при $Q \rightarrow 0$ переходят в нейтральное возмущение $a_1 = a_2 = A_Y$, $\lambda = 0$, соответствующее бесконечно малому изменению постоянной φ_0 . Для этих возмущений

$$(2.2) \quad \operatorname{Re}\lambda = sQ^2 + \dots, \quad s = -(1 - 3K^2)(1 - K^2)^{-1} + \delta^2 s^{(2)} + \dots$$

(явное выражение для $s^{(2)}(K, K_0, \omega)$ вследствие его громоздкости не приводим). Из выражения (2.2) следует, что решения (2.1) при малых δ устойчивы при $K_- < K < K_+$, где

$$K_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{3} \delta^2 s^{(2)} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, K_0, \omega \right) \right]$$

3. Как уже отмечалось выше, малым параметром в разложениях (2.1) является отношение $\delta/|H|$. В резонансном случае $|H| \sim \delta$ (т. е. $\Delta \sim \delta^{1/2}$, $\omega \sim \delta$) описанный в п. 2 подход становится неэффективным. В этом случае, однако, можно использовать то обстоятельство, что амплитуда A — медленная функция пространственной координаты и времени.

Ограничиваясь случаем $K_0^2 < 1/3$, аналогично [3] получаем эволюционное уравнение для фазы Φ комплексной переменной A :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Phi_{\tau} &= \Phi_{XX} - \sin \Phi - F; \quad X \rightarrow \pm\infty, \quad |\Phi_X| < \infty \\ \tau &= \delta T (1 - K_0^2)^{-1/2}, \quad F = \delta^{-1} \omega (1 - K_0^2)^{1/2} \\ X &= \delta^{1/2} Y (1 - K_0^2)^{1/4} (1 - 3K_0^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Не зависящие от координаты X решения задачи (3.1) соответствуют изучавшимся ранее [1, 2] пространственно-периодическим движениям. Здесь рассмотрим новые классы течений, описываемые решениями, зависящими от координаты X .

Рассмотрим сначала стационарные пространственно-модулированные течения. Уравнение (3.1) при $\Phi_{\tau} = 0$ описывает движение маятника под действием постоянного момента силы (роль времени играет координата X); его решения могут быть выражены через эллиптические функции.

Для определения устойчивости стационарных модулированных движений необходимо исследовать спектр линеаризованной задачи для возмущений $\varphi(X) \exp \lambda \tau$, наложенных на решение Φ , которая представляет собой задачу Штурма — Лиувилля (уравнение Шредингера). Хорошо известно, что наибольшее значение λ соответствует знакопостоянной функции φ . В то же время уравнение всегда обладает решением $\varphi = \Phi_X$, $\lambda = 0$. Отсюда следует, что стационарное движение устойчиво, если функция $\Phi(X)$ монотонная. При $F = 0$ устойчивы солитонные решения

$$(3.2) \quad \Phi = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm X}$$

и решения с $\Phi(X + L) = \Phi(X) \pm 2\pi$, а решения, для которых $\Phi(X + L) = \Phi(X)$, неустойчивы. При $F \neq 0$ все стационарные решения, кроме $\Phi = \Phi_{\pm} = -\arcsin F$ ($|F| < 1$), неустойчивы.

Перейдем к рассмотрению решений

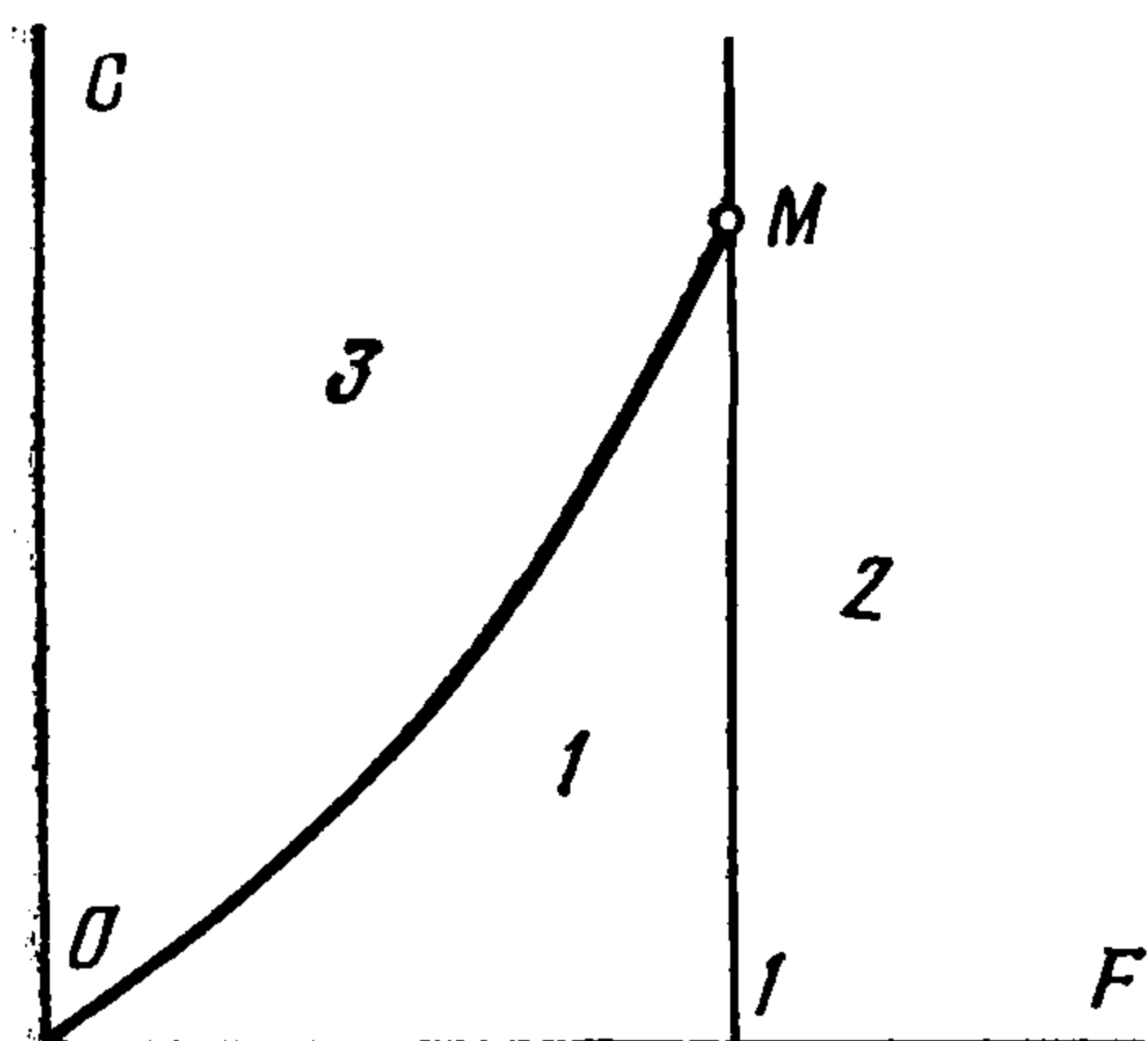
$$(3.3) \quad \Phi = \Phi(\xi), \quad \xi = X - c\tau$$

соответствующих бегущим модулированным волнам. Запишем задачу (3.1) в виде

$$(3.4) \quad \Phi_{\xi\xi} + c\Phi_{\xi} - \sin \Phi - F = 0; \quad \xi \rightarrow \pm\infty, \quad |\Phi_{\xi}| < \infty$$

Уравнение (3.4) описывает движение маятника с трением под действием постоянного момента сил [5]. Близкая задача рассматривалась при изучении свойств солитон-

ных решеток в распределенных джозефсоновских переходах [6, 7]. Области существования решений различных типов показаны на фигуре; координаты точки M : $F = 1$, $c = 1,19$ [7]. В областях 1, 2 существуют периодические решения задачи (3.4); при заданном F период монотонно нарастает с ростом c . В случае $F > 1$ периодические решения (3.3) при $c \rightarrow \infty$ переходят в решение



$$\Phi = -2 \operatorname{Arctg} \left\{ (1 + (F^2 - 1)^{1/2}) \cdot \operatorname{tg} [2(F^2 - 1)^{1/2} (\tau - \tau_0)] F^{-1} \right\}$$

не зависящее от координаты X . Если же $F < 1$, при неограниченном нарастании пространственного периода фазовая скорость стремится к некоторой предельной. На границе, разделяющей области 1 и 3, существует солитонное решение, экспоненциально приближающееся при $\xi \rightarrow \pm \infty$ к предельным значениям

$$(3.5) \quad \Phi(-\infty) = \Phi_+ - 2\pi, \quad \Phi(+\infty) = \Phi_+$$

Заметим, что вблизи этой границы решения с конечным, но большим периодом сходны с периодической цепочкой солитонов. На границе между областями 2 и 3 также существует солитон с предельными значениями (3.5), однако его асимптотика на бесконечности степенная. Наконец, в областях 1 и 3 существуют солитонные решения с асимптотикой

$$(3.6) \quad \Phi(-\infty) = \Phi_+, \quad \Phi(+\infty) = \Phi_- = \arcsin F - \pi$$

а в области 3 — также солитоны с асимптотикой

$$(3.7) \quad \Phi(-\infty) = \Phi_+ - 2\pi, \quad \Phi(+\infty) = \Phi_-$$

Эти типы решений описывают «фронт» вытеснения неустойчивого движения с $\Phi = \Phi_-$ устойчивым движением с $\Phi = \Phi_+$.

Устойчивость решений (3.3) в системе отсчета, движущейся с волной, определяется спектром краевой задачи

$$(3.8) \quad \lambda \varphi = \varphi_{\xi\xi} + c \varphi_{\xi} - \cos \Phi(\xi) \varphi \\ \xi \rightarrow \pm \infty, \quad |\varphi_{\xi}| < \infty$$

В случае периодических Φ функции φ имеют вид функций Флоке. Нетрудно установить неустойчивость солитонных решений (3.6), (3.7), связанную с непрерывным спектром. Для периодических решений и солитонов типа (3.5) устойчивость установлена в [7].

Итак, наряду с пространственно-периодическими движениями с длиной волны, наведенной искривлением границ, в слое с волнистыми границами при малой амплитуде волнистости возможны устойчивые квазипериодические движения (модулированные волны), пространственный спектр которых содержит дискретный набор волновых чисел. При фиксированных значениях внешних параметров задачи движения данного класса составляют однопараметрическое семейство. Если $|F| > 1$ (поток жидкости вдоль слоя $|q|$ больше некоторого критического), при увеличении периода модуляции они переходят в исследованные ранее [1, 2] пространственно-периодические бегущие волны. Если же $|F| < 1$ (поток жидкости меньше критического), при увеличении периода модуляции квазипериодические решения переходят в солитонное решение с непрерывным пространственным спектром Фурье; оно асимптотически приближается к периодическому на больших расстояниях, но содержит при конечных значениях пространственной координаты устойчивый движущийся локальный дефект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левина Г. В., Непомнящий А. А. О режимах смешанной конвекции в вертикальном слое с нестационарно деформируемыми границами // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 402—410.
2. Возовой Л. П., Непомнящий А. А. Об устойчивости смешанно-конвективных движений в вертикальном слое с волнистыми границами // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 935—941.
3. Couillet P. Commensurate-incommensurate transition in nonequilibrium systems // Phys. Rev. Letters. 1986. V. 56. No. 7. P. 724—727.

4. Возовой Л. П., Непомнящий А. А. Об устойчивости пространственно-периодических конвективных течений в вертикальном слое с волнистыми границами // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 998—1007.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука. 1981. 568 с.
6. Лухарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука. 1985. 320 с.
7. Burkov S. E., Lifsic A. E. Stability of moving soliton lattices // Wave Motion. 1983. V. 5. No. 3. P. 197—213.

Пермь

Поступила в редакцию
27.XI.1987

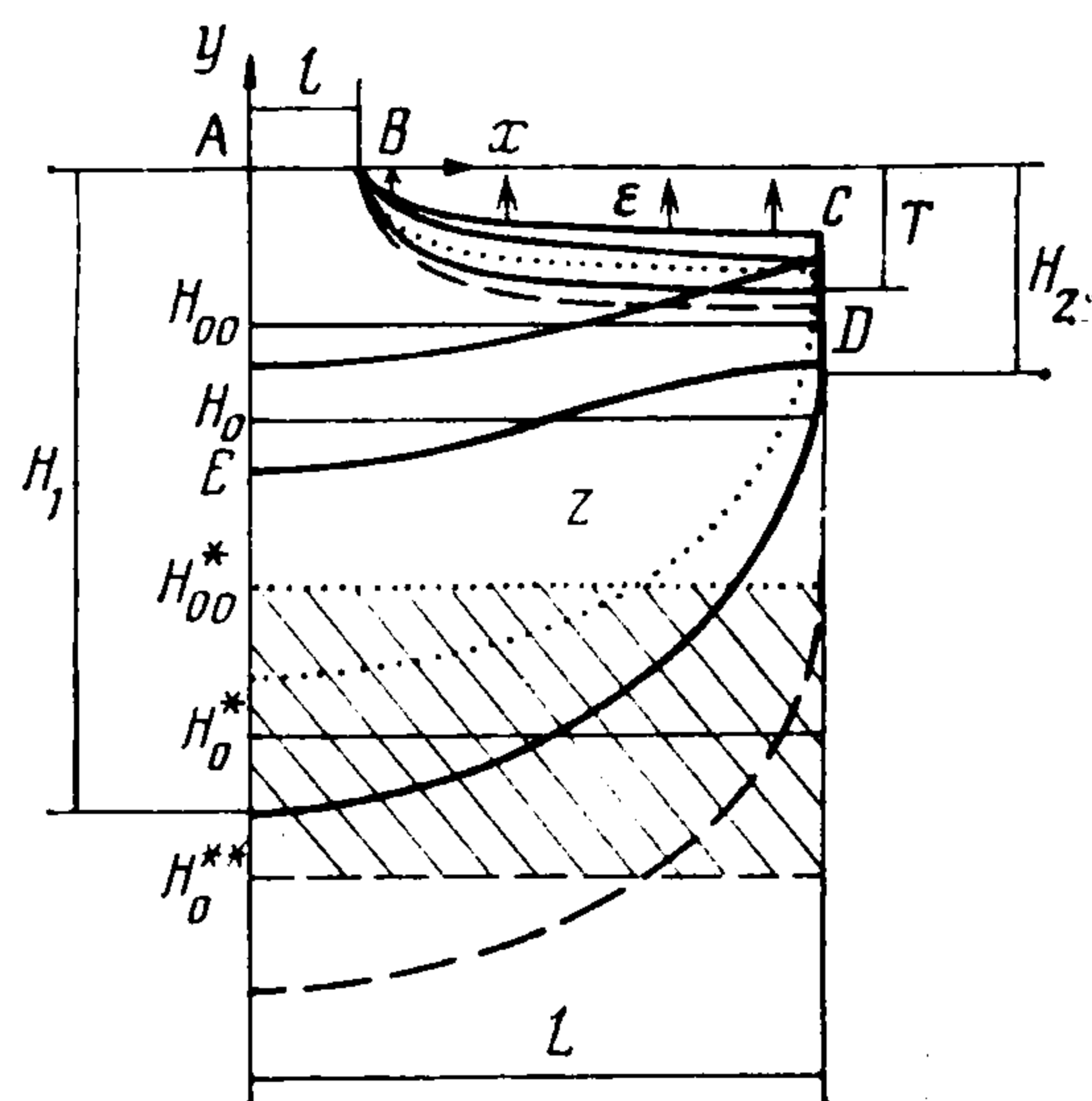
УДК 532.546.06

О КРИТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПАРЕНИЕМ В КАЙМЕ ПРЕСНЫХ ВОД НАД СОЛЕНЫМИ

Береславский Э. Н., Эмих В. Н.

Решение плоской задачи об установившейся фильтрации из системы периодически расположенных каналов в кайме пресных вод над солеными, построенное [1] при некотором ограничении на интенсивность испарения со свободной поверхности, продолжается за указанные рамки путем соответствующих преобразований. Выявляется аналитически и рассчитывается для отдельных вариантов на ЭВМ критический режим течения в кайме, возникающий при определенном усилении испарения на грани вовлечения в движение соленых вод. Величина испарения считается, как и в [1, 2], пропорциональной абсциссе точек свободной поверхности. Каналы представлены прямолинейными отрезками длины $2l$.

Математически процесс моделируется краевой задачей о нахождении комплексного потенциала течения $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости фильтрации, ψ — функция тока) — аналитической функции комплексной координаты $z = x + iy$ внутри области $ABCDE$ (фиг. 1), соответствующей полупериоду течения. [Вдоль граничных участков области z выполняются условия



Фиг. 1

$$(1) \quad AB : y = 0, \varphi = 0; \quad AE : x = 0, \psi = 0; \quad CD : x = L, \psi = 0 \\ ED : \varphi - \rho y = \text{const}, \psi = 0 \quad (\rho = \rho_2/\rho_1 - 1); \quad ED : \varphi + y = 0, \psi = \varepsilon (L - x).$$

Здесь L — половина расстояния между серединами соседних каналов, ρ_1 и ρ_2 — плотности пресных и соленых вод ($\rho_1 < \rho_2$).

Кривая депрессии BC и линия раздела ED подлежат определению. Интенсивность испарения ε была подчинена в [1] неравенствам

$$(2) \quad \varepsilon < \rho, \quad \varepsilon < \varepsilon_l; \quad \varepsilon_l = l/(L - l)$$

В задаче о линзе пресных вод первое неравенство (2) вытекает из ограничения $|W| \leq \rho$ вдоль линии раздела, налагаемого предположением о неподвижности соленых вод на величину скорости фильтрации $\bar{W} = W_x + iW_y$, отнесенной к коэффициенту фильтрации. В случае же каймы некоторое превышение ε над ρ может амортизироваться в пределах участка CD (фиг. 1), не нарушая упомянутого ограничения и самой схемы течения. Вместе с тем в силу второго неравенства (2), вытекающего из ограничения $|W| < 1$ в пределах контура канала AE , возможность реализации неравенства $\varepsilon > \rho$ обусловлена соотношением $\varepsilon_l > \rho$.

При его выполнении возникает альтернатива: либо с увеличением параметра ε в интервале (ρ, ε_l) будет достигнуто значение $\varepsilon = \varepsilon^*$, превышение которого нарушит равновесие соленых вод с каймой пресных, либо такое равновесие сохранится во всем указанном интервале возрастания параметра ε .