УДК 531.66 : 534.1

КОСОЙ УДАР МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПО БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Маланов С. Б., Уткин Г. А.

Рассматривается косой удар материальной точкой по бесконечной покоящейся струне на линейно-упругом основании. Находится точное решение задачи для случая неподпружиненной струны. Для подпружиненной струны исследуются зависимости продолжительности контакта, угла отражения, расстояния, проходимого материальной точкой по струне за время контакта, и коэффициента восстановления как функций от угла падения точки на струну при различных степенях жесткости основания.

В задачах об ударном взаимодействии сосредоточенного объекта и одномерной системы [1—4] исследовался в основном прямой удар. Ниже рассматривается случай, когда имеет место скольжение сосредоточенного объекта по распределенной системе.

Рассмотрим косой удар материальной точкой массы m по бесконечной покоящейся струне с погонной плотностью ρ и натяжением T, лежащей на упругом основании жесткости k. Будем считать, что движения объектов происходят в плоскости xu, таким образом, что $u\ (x,\ t)$ — поперечное отклонение струны, $u_0\ (t)$ и $l\ (t)$ — обобщенные координаты точки по осям u и x соответственно, т. е. во время контакта имеет место равенство $u_0\ (t) = u\ (l\ (t),\ t)$. Без ограничения общности можно считать, что контакт начинается в момент времени $t = 0$, в точке $x = 0$.

В предположении малых колебаний струны, как следует из [2], задача об их совместном движении формулируется следующим образом:

(1) $$u_{tt} - a^2 u_{xx} + h^2 u = 0 \quad (a^2 = T/\rho,\ h^2 = k/\rho)$$

$$m u_0^{\cdot\cdot}\ (t) = \rho\ (a^2 - l^{\cdot 2}\ (t))\ [u_x]$$

(2) $$m l^{\cdot\cdot}\ (t) = -{}^1/_2 \rho\ (a^2 - l^{\cdot 2}\ (t))\ [u_x^2]$$

$$([A\ (x,\ t)] = A\ (l\ (t) + 0,\ t) - A\ (l\ (t) - 0,\ t))$$

(3) $$u\ (x,\ 0) = 0,\ u_t\ (x,\ 0) = 0$$

$$u_0\ (0) = 0,\ u_0^{\cdot}\ (0) = -v_1,\ l\ (0) = 0,\ l^{\cdot}\ (0) = v_2\ (|\ v_2\ | < a)$$

$$u\ (x,\ t) = \begin{cases} u_-\ (x, t), & -\infty < x < l\ (t) \\ u_0\ (t), & x = l\ (t) \\ u_+\ (x, t), & l\ (t) < x < +\infty \end{cases}$$

где $u\ (x,\ t)$ — кусочно-гладкая функция.

Для решения задачи используем интегральное преобразование Фурье по переменной x

$$U\ (\omega,\ t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u\ (x,\ t)\ e^{-2\pi i\omega x}\, dx = F\ (u\ (x,\ t))$$

Учитывая соотношения

$$F\ (u_{tt}) = U_{tt} - l^{\cdot 2}\ (t) V,\ F\ (u_{xx}) = -4\pi^2\omega^2 U - V$$

$$V = m\rho^{-1} u_0^{\cdot\cdot}\ (t)(a^2 - l^{\cdot 2}\ (t))^{-1} e^{-2\pi i\omega l(t)}$$

первое уравнение (1) преобразуем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U_{tt} + (4\pi^2\omega^2 a^2 + h^2) U = -m\rho^{-1} u_0^{\cdot\cdot}\ (t) e^{-2\pi i\omega l(t)}$$

с нулевыми начальными условиями. Решая его и возвращаясь к оригиналу, найдем [5]

(4) $$u\ (x,\ t) = -\frac{m}{2\rho a} \int_0^t u_0^{\cdot\cdot}\ (\tau)\ J_0 \left(h \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x - l\ (\tau))^2}{a^2}} \right) \times$$

$$\times\ \theta\ (a\ (t - \tau) - |\ x - l\ (\tau)\ |)\ d\tau, \quad |\ x\ | < at$$

$$u\ (x,\ t) = 0, \quad |\ x\ | > at$$

Здесь $J_0\ (y)$ — функция Бесселя, $\theta\ (y)$ — единичная функция Хевисайда. Поскольку $u\ (x,\ t) \equiv 0$ при $|\ x\ | > at$, то дальнейшее исследование будем проводить в области $|\ x\ | < at$.

Уравнение (2) перепишем в виде

$$\frac{a+l^{\cdot}(t)}{a-l^{\cdot}(t)}=\frac{a+l^{\cdot}(0)}{a-l^{\cdot}(0)}\exp\left(-\frac{\rho a}{m}\int_0^t[u_x^2]\,dt\right)$$

Отсюда следует, что если $|l^{\cdot}(0)|<a$, то для функции $l(t)$, удовлетворяющей уравнению (2), имеет место неравенство

$$|l^{\cdot}(t)|\leqslant a \tag{5}$$

Можно показать, что для $\tau\in[0,t]$

$$\theta(a(t-\tau)-|x-l(\tau)|)=\begin{cases}\theta(a(t-\tau)-x+l(\tau)), & x>l(t)\\ \theta(a(t-\tau)+x-l(\tau)), & x<l(t)\end{cases} \tag{6}$$

Действительно, если $x>l(t)$ и $x>l(\tau)$, то равенство (6) очевидно. Если $l(t)<$ $<x<l(\tau)$, то, используя неравенство (5), приходим к цепочке неравенств

$$0<l(\tau)-x<l(\tau)-l(t)\leqslant|l^{\cdot}(\xi)|(t-\tau)\leqslant a(t-\tau)\quad(\tau\leqslant\xi\leqslant t)$$

Отсюда $a(t-\tau)\pm(x-l(\tau))>0$, т. е.

$$\theta(a(t-\tau)-|x-l(\tau)|)=\theta(a(t-\tau)-x+l(\tau))$$

Аналогично доказывается равенство (6) и при $x<l(t)$.

Из соотношений (4), (6) получаем

$$u_{\pm}(x,t)=-\frac{m}{2\rho a}\int_0^{\tau_{\pm}}u_0^{\cdot\cdot}(\tau)J_0\left(h\left[(t-\tau)^2-\frac{(x-l(\tau))^2}{a^2}\right]^{1/2}\right)d\tau \tag{7}$$

где $\tau_{\pm}$ определяются из равенств $t-\tau_{\pm}=\pm(x-l(\tau_{\pm}))/a$.

Отметим, что $\tau_-=\tau_+=t$ при $x=l(t)$.

Используя условие непрерывности $u_0(t)=u(l(t),t)$ и краевое условие (2), из (7) получаем нелинейную систему интегродифференциальных уравнений

$$u_0(t)=-\frac{m}{2\rho a}\int_0^t u_0^{\cdot\cdot}(\tau)J_0(hy)\,d\tau \tag{8}$$

$$l^{\cdot\cdot}(t)=-\frac{m}{2\rho a}u_0^{\cdot\cdot}(t)\left(\frac{u_0^{\cdot\cdot}(t)\,l^{\cdot}(t)}{a^2-l^{\cdot 2}(t)}-\frac{h}{a^2}\int_0^t u_0^{\cdot\cdot}(\tau)\frac{J_1(hy)}{y}(l(t)-l(\tau))\,d\tau\right)$$

$$(y=[(t-\tau)^2-(l(t)-l(\tau))^2/a^2]^{1/2})$$

с начальными условиями (3).

Рассмотрим более подробно предельный случай $h=0$, соответствующий косому удару материальной точкой по струне без упругого основания. Система уравнений (8) перепишется в виде:

$$u_0(t)=-\frac{m}{2\rho a}\int_0^t u_0^{\cdot\cdot}(\tau)\,d\tau,\quad l^{\cdot\cdot}(t)=-\frac{m\ddot{u}_0^2(t)\,l^{\cdot}(t)}{2\rho a\,(a^2-l^{\cdot 2}(t))}$$

Интегрируя эту систему, приходим к соотношениям:

$$u_0(t)=\frac{v_1 m}{2\rho a}\left[\exp\left(-\frac{2\rho at}{m}\right)-1\right]$$

$$a^2\ln\frac{l^{\cdot}(t)}{v_2}-\frac{l^{\cdot 2}(t)-v_2^2}{2}=-\frac{v_1^2}{2}\left[1-\exp\left(-\frac{4\rho at}{m}\right)\right],\quad v_2\neq 0$$

$$l(t)\equiv 0,\ v_2=0$$

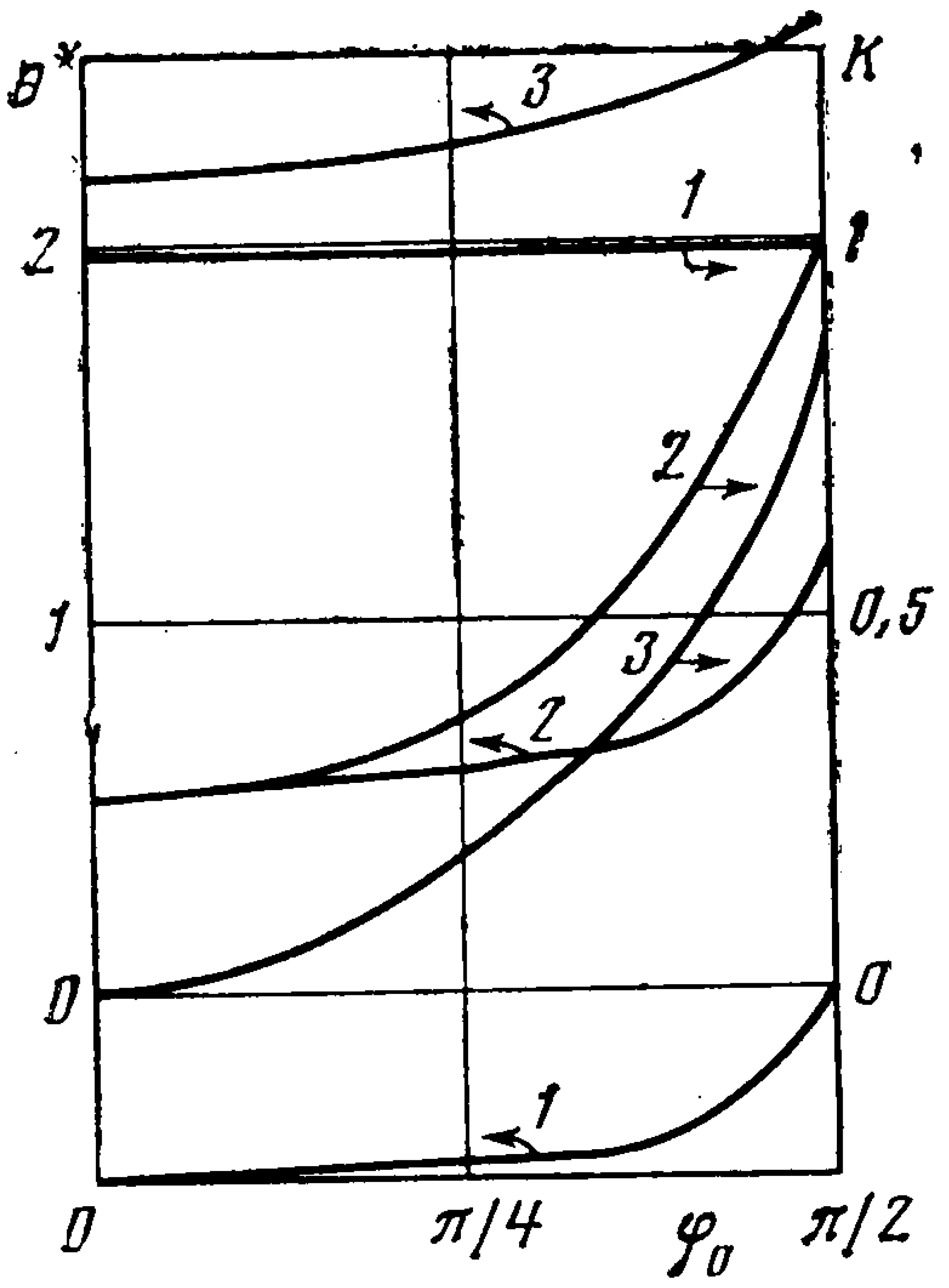
Время контакта t^* определяется из соотношения [2] $u_0^{\cdot\cdot}(t^*)=0$ и в этом предельном случае оно бесконечно. Скорость движения материальной точки $l^{\cdot}(t)$ асимптотически стремится к величине v^*, определяемой из соотношения

$$\ln(v^*/v_2)=(v^{*2}-v_1^2-v_2^2)/2a^2\quad(v_2\neq 0)$$

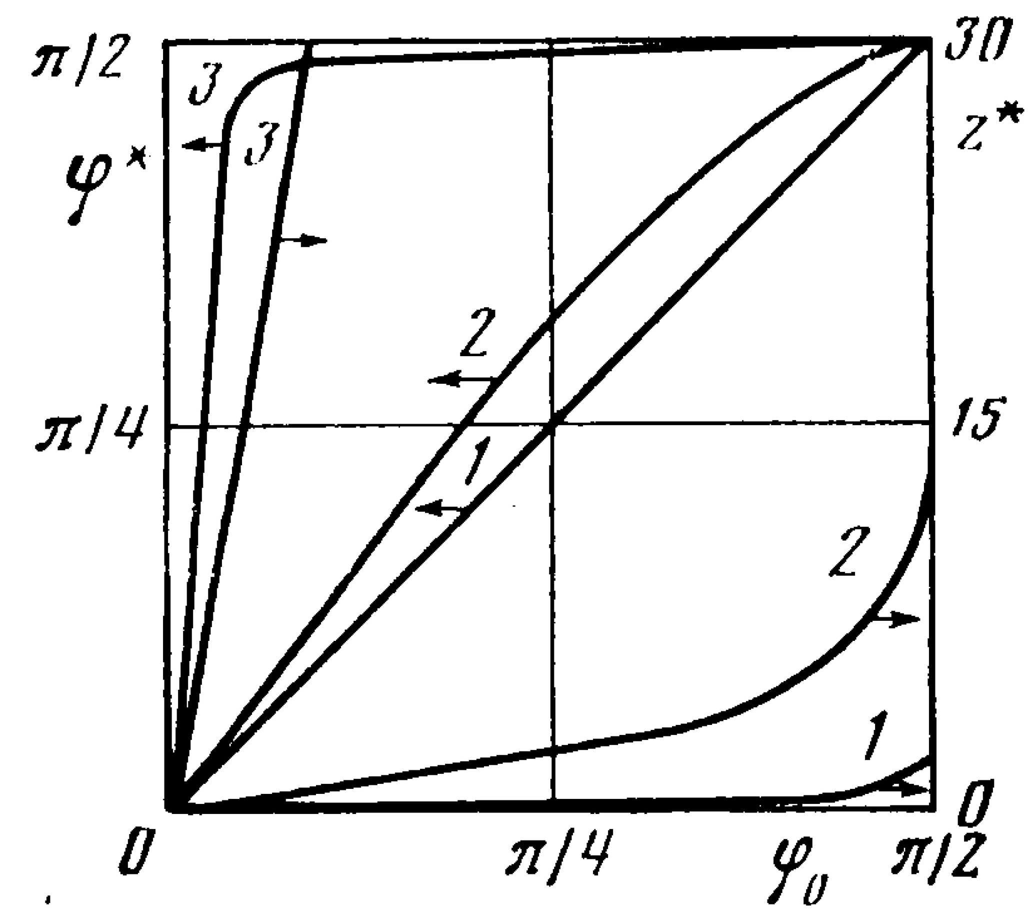
В случае $h\neq 0$ аналитическое исследование системы (8) существенно усложняется, и поэтому решение ее проводилось численными методами. Для более удобной интерпретации результатов численного исследования введем следующие обозначения:

$$\varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{v_2}{v_1},\quad\varphi^*=\operatorname{arctg}\frac{l^{\cdot}(t^*)}{u_0^{\cdot}(t^*)},\quad\tau^*=\frac{2\rho at^*}{m}$$

$$z^*=\frac{2\rho l(t^*)}{m},\quad K=\frac{l^{\cdot 2}(t^*)+u_0^{\cdot 2}(t^*)}{v_1^2+v_2^2},\quad\beta=\frac{hm}{2\rho a}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

(φ_0 — угол падения материальной точки на струну, φ^* — угол отражения, τ^* — безразмерное время контакта, z^* — безразмерный путь, пройденный материальной точкой вдоль струны за время контакта, K — коэффициент восстановления энергии, β — безразмерный коэффициент жесткости основания).

На фиг. 1, 2 представлены зависимости $\theta^* = \lg\tau^*(\varphi_0)$, $K = K(\varphi_0)$, $\varphi^* = \varphi^*\cdot(\varphi_0)$, $z^* = z^*(\varphi_0)$ при $\beta = 100; 1; 0{,}01$ (кривые *1, 2, 3* соответственно). Приведенные зависимости получены при $V_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = a$. При других значениях начальной скорости $V_0 < a$ качественная картина графиков не меняется.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

а) при увеличении угла падения происходит увеличение времени контакта, расстояния, проходимого материальной точкой, и коэффициента восстановления;

б) при любом $\beta \neq 0$ имеет место неравенство $\varphi^* \geqslant \varphi_0$;

в) при уменьшении β имеем $\tau^* \to +\infty$, $z^* \to \infty$,

$K \to 0$, $\varphi^* \to \pi/2$;

г) при $\beta \to +\infty$ имеем $\tau^* \to 0$, $z^* \to 0$, $K \to 1$, $\varphi^* \to \varphi_0$.

Как и следовало ожидать, удар материальной точкой по неподпружиненной ($h = 0$) струне абсолютно неупругий, а результаты численных исследований удара по подпружиненной струне показывают, что по мере увеличения жесткости основания удар приближается к абсолютно упругому.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 6. С. 449—462.
2. *Маланов С. Б., Уткин Г. А.* Ударное взаимодействие сосредоточенного объекта с одномерной упругой системой // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 42—46.
3. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
4. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 432 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Горький

Поступила в редакцию 2.II.1988

УДК 532.516 : 536.25

О ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С ИСКРИВЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

Непомнящий А. А.

Исследуются режимы смешанной конвекции в вертикальном слое с периодически искривленными границами. Амплитуда волнистости стенок слоя и поток жидкости вдоль слоя предполагаются малыми, число Грасгофа — близким к критическому.