

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение. 1986. 176 с.
2. Керчман В. И. Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 45—54.
3. Александров В. М. О решении одного класса парных уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 55—58.
4. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148—158.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир. 1965. Т. 1. 615 с.; Т. 2. 537 с.
6. Зеленцова В. Б. О решении одного класса интегральных уравнений // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 815—830.
7. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит. 1952. 476 с.
8. Агрест М. И., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. М.: Атомиздат. 1965. 351 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1969. 656 с.
10. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука. 1974. 456 с.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. 742 с.
12. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физики // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 88—99.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
8.X.1987

УДК 539.375

О ДЕЙСТВИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ОСЛАБЛЕННУЮ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

Бояджи А. Г., Бурышкин М. Л., Радиолло М. В.

Изучается действие жесткого штампа на изотропную полуплоскость, ослабленную регулярной системой прямолинейных трещин. Рассматриваемая задача принципиально отличается от широкого класса задач, решенных в последнее время для симметричных тел, непериодичностью граничных условий на краю полуплоскости.

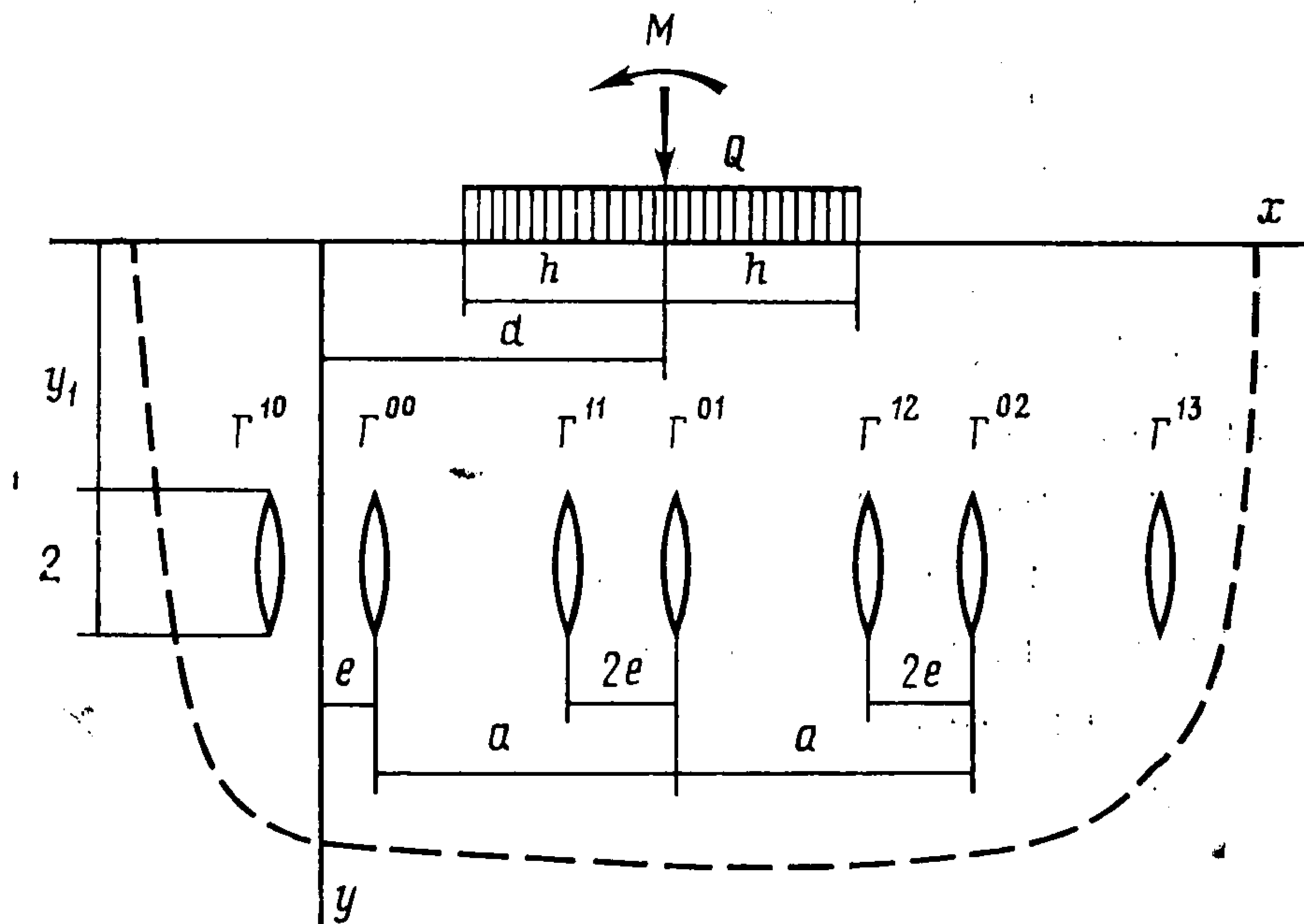
Неизвестная функция контактных давлений разыскивается в виде разложения по полиномам Чебышева. Коэффициенты этого разложения находятся из системы алгебраических уравнений, в которую преобразовывается условие совместности вертикальных перемещений штампа и его основания. Возникающая при этом серия задач о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости под действием нагрузок, приложенных к ее краю и описываемых полиномами Чебышева, решается по общей схеме учета симметрии среды. Приводятся результаты численного анализа функции контактных давлений под штампом и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин.

На отрезке $\gamma = [d - h, d + h]$ оси x расположен гладкий штамп. Форма его подошвы описывается функцией $f(x)$. Действующие на него силы приведены к главному вектору Q и моменту M . Считается, что область контакта между штампом и основанием неизменна и берега трещины не взаимодействуют между собой. Ориентация трещин, расположение координатных осей, а также основные геометрические размеры и обозначения показаны на фиг. 1.

Несмотря на регулярность системы трещин, рассматриваемая среда не обладает геометрической симметрией. Она нарушается смешанными гра-

ничными условиями на краю полуплоскости. Насколько известно авторам, задача подобного класса решается впервые.

Предлагаемая схема исследования может быть распространена на многие другие классические контактные задачи для оснований периодической структуры.



Фиг. 1

Функцию контактных давлений $p(x)$ под штампом естественно искать в виде

$$(1) \quad p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x), \quad p(x) = \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = \omega(x) = (x-d)/h, \quad \xi \in [-1, 1]$$

где $T_k(\xi)$ — полиномы Чебышева первого рода и a_k ($k = 0, 1, \dots$) — искомые вещественные коэффициенты.

В соответствии с разложением (1) и принципом суперпозиции

$$(2) \quad v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(x), \quad x \in \gamma$$

$$(3) \quad \chi_k^{(js)(p)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k^{(js)(p)}(y), \quad y \in \Gamma^{js}$$

$$(p = 1, 2; j = 0, 1; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Здесь $v(x)$ и $\chi_k^{(js)(p)}(y)$ — вертикальные перемещения точек отрезка γ и претерпеваемые при переходе через отрезок Γ^{js} скачки частных производных по y от горизонтальных ($p = 1$) и вертикальных ($p = 2$) перемещений точек полуплоскости, $v_k(x)$ и $\chi_k^{(js)(p)}(y)$ — их составляющие, отвечающие нагрузке $p_k(x)$. Построение скачков $\chi_k^{(js)(p)}(y)$ полностью решает поставленную задачу.

Остановимся вначале на определении функций $\chi_k^{(js)(p)}(y)$. Соответствующая им нагрузка $p_k(x)$ приложена на отрезке γ . Напряженно-деформированное состояние естественно разложить на основное, возникающее в сплошной полуплоскости, и возмущенное, которое компенсирует напряжения, возникающие на берегах трещин в основном состоянии. Поскольку в последнем скачки при переходе через отрезки Γ^{js} отсутствуют, то представляющие интерес функции определяются из расчета одного лишь возмущенного состояния. При этом край полуплоскости свободен от на-

грузок, а к берегам трещин Γ^{js} приложены следующие нормальные и касательные усилия:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_x^{(k)js}(y) &= - \int_{d-h}^{d+h} \sigma_x^F(e_{js} - x, y) p_k(x) dx \\ \tau_{xy}^{(k)js}(y) &= - \int_{d-h}^{d+h} \tau_{xy}^F(e_{js} - x, y) p_k(x) dx \\ (e_{js} &= (-1)^j e + sa; \quad j = 0, 1; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

где под $\sigma_x^F(x, y)$ и $\tau_{xy}^F(x, y)$ понимаются соответствующие напряжения в известной задаче Фламана для сплошной полуплоскости [1].

Для исследования возмущенного состояния удобно использовать метод [2], опирающийся на уже апробированные схемы решения задач линейной механики для симметричных тел [3]. Поэтому будем далее считать скачки $\chi_k^{(js)(p)}(y)$ известными. Тогда несложно вычислить любые компоненты изучаемого напряженно-деформированного состояния при нагрузке $p_k(x)$. В частности

$$(5) \quad v_k'(x) = v_k^{(0)'}(x) + v_k^{(1)'}(x), \quad x \in \gamma \quad (v' = dv/dx)$$

$$(6) \quad v_k^{(0)'}(x) = \frac{2}{\pi E} \int_{d-h}^{d+h} \frac{T_k(\xi) ds}{\sqrt{1-\xi^2} (s-x)}$$

$$(7) \quad v_k^{(1)'}(x) = \frac{1}{\pi E} \sum_{p=1}^2 \sum_{j=0}^1 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{y_1}^{y_1+2} \chi_k^{(js)(p)}(y) K^{(js)(p)}(x, y) dy$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$K^{(js)(1)}(x, y) = 2(e_{js} - x) y^2 / \Delta_{js}^2$$

$$K^{(js)(2)}(x, y) = y / \Delta_{js} + y [y^2 - (e_{js} - x)^2] / \Delta_{js}^2$$

$$\Delta_{js} = (e_{js} - x)^2 + y^2$$

где верхним индексом 0 или 1 помечены величины, связанные с основным или возмущенным состоянием полуплоскости, E — модуль упругости.

Перейдем к вопросу о вычислении коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) в разложениях (1)–(3). Из обычных условий равновесия штампа сразу находятся

$$(8) \quad a_0 = Q/(\pi h), \quad a_1 = 2M/(\pi h)$$

Для определения остальных коэффициентов составим линейную систему алгебраических уравнений. Согласно условиям контакта

$$(9) \quad v(x) = V + (x - d) \varphi + f(x), \quad \forall x \in \gamma$$

где V и φ — перемещение и угол поворота штампа. Приравнивая правые части соотношений (2) и (9), дифференцируя результат и учитывая формулы (8), найдем

$$(10) \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_k v_k'(x) = \varphi + F(x), \quad x \in \gamma$$

$$(11) \quad F(x) = f'(x) - \frac{Q}{\pi h} v_0'(x) - \frac{2M}{\pi h} v_1'(x)$$

Умножим выражение (10) на $U_m(\xi) \sqrt{1-\xi^2}$, где $U_m(\xi)$ — полином Чебышева второго рода, и проинтегрируем его на отрезке γ . Повторяя эту операцию для $m = 0, 1, \dots$ и учитывая формулу (5) и вытекающее из (6)

равенство $v_k^{(0)'}(x) = 2U_{k-1}(\xi)/E$ ($k = 1, 2, \dots$), составим разрешающую систему:

$$(12) \quad \sum_{k=2}^{\infty} A_{1k} a_k = \frac{\pi}{2} \varphi + B_1$$

$$(13) \quad a_m + \frac{E}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} A_{mk} a_k = \frac{E}{\pi} B_m \quad (m = 2, 3, \dots)$$

Величины A_{mk} и B_m находятся из соотношений

$$(14) \quad A_{mk} = \int_{d-h}^{d+h} v_k^{(1)'}(x) U_{m-1}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} dx$$

$$B_m = \int_{d-h}^{d+h} F(x) U_{m-1}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} dx \quad (m = 1, 2, \dots; k = 2, 3, \dots)$$

Не останавливаясь на технической стороне численного интегрирования, укажем, что после решения системы уравнений (13) и определения коэффициентов a_k ($k = 2, 3, \dots$) их подстановка совместно с (8) в (12), (1) и (3) позволяет найти поворот штампа, функцию контактных давлений и скачки производных от перемещений на трещинах.

Приведем некоторые численные результаты для чисто периодической системы трещин ($e = a/4$) и плоского штампа $f(x) = 0$, нагруженного центральной силой Q ($M = 0$).

Данные о коэффициентах интенсивности K_n нормальных напряжений в верхней ($n = 1$) и нижней ($n = 2$) вершинах трещин Γ^{00} ($N = 1$), Γ^{11} ($N = 2$), Γ^{01} ($N = 3$) при $a = 4$, различных соотношениях между другими параметрами и фиксированном значении $Q/h = 1$ собраны в табл. 1, где приведены значения $10^3 \cdot K_n$. Целесообразно указать, что коэффициенты K_n определяются по скачкам $\chi^{(js)(x)}(y)$ на соответствующих трещинах при помощи известных соотношений [4] и в частном случае одиночной трещины, расположенной в изотропной плоскости и нагруженной единичным внутренним давлением, равны единице.

Таблица 1

y_1	h	$N = 1$		2		3	
		$n = 1$	2	1	2	1	2
0,125	1	161	73	29	41	2	13
	0,25	40	21	5	9	0	4
	0,5	81	40	12	18	0	7
0,25	1	119	60	37	44	5	16
	2	248	112	102	102	8	34
	3	264	180	168	93	54	78
0,5	3	231	153	126	81	78	87

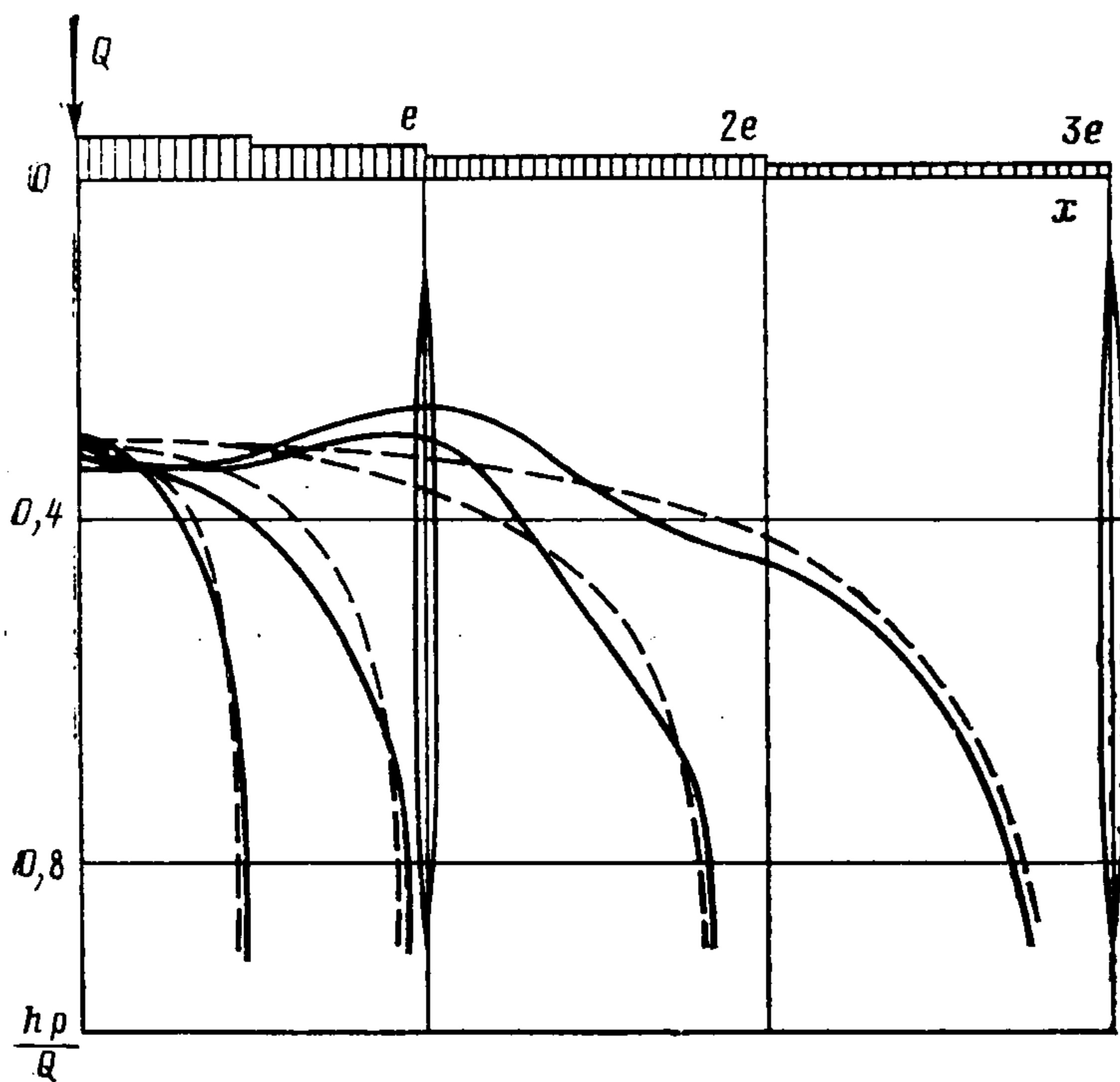
Далее считается, что $a = 4$, $y_1 = 0,25$ и $d = 0$.

На фиг. 2 показаны функции контактных давлений под штампами различной длины (штриховые линии отвечают сплошной полуплоскости). Видно, что для коротких штампов, расположенных между трещинами, влияние последних сводится к увеличению контактных давлений в средней и уменьшению их в крайних зонах подошвы. Для длинных штампов наличие трещин в полуплоскости приводит к характерной осцилляции, связанной с уменьшением контактных давлений над трещинами и увеличением — между ними.

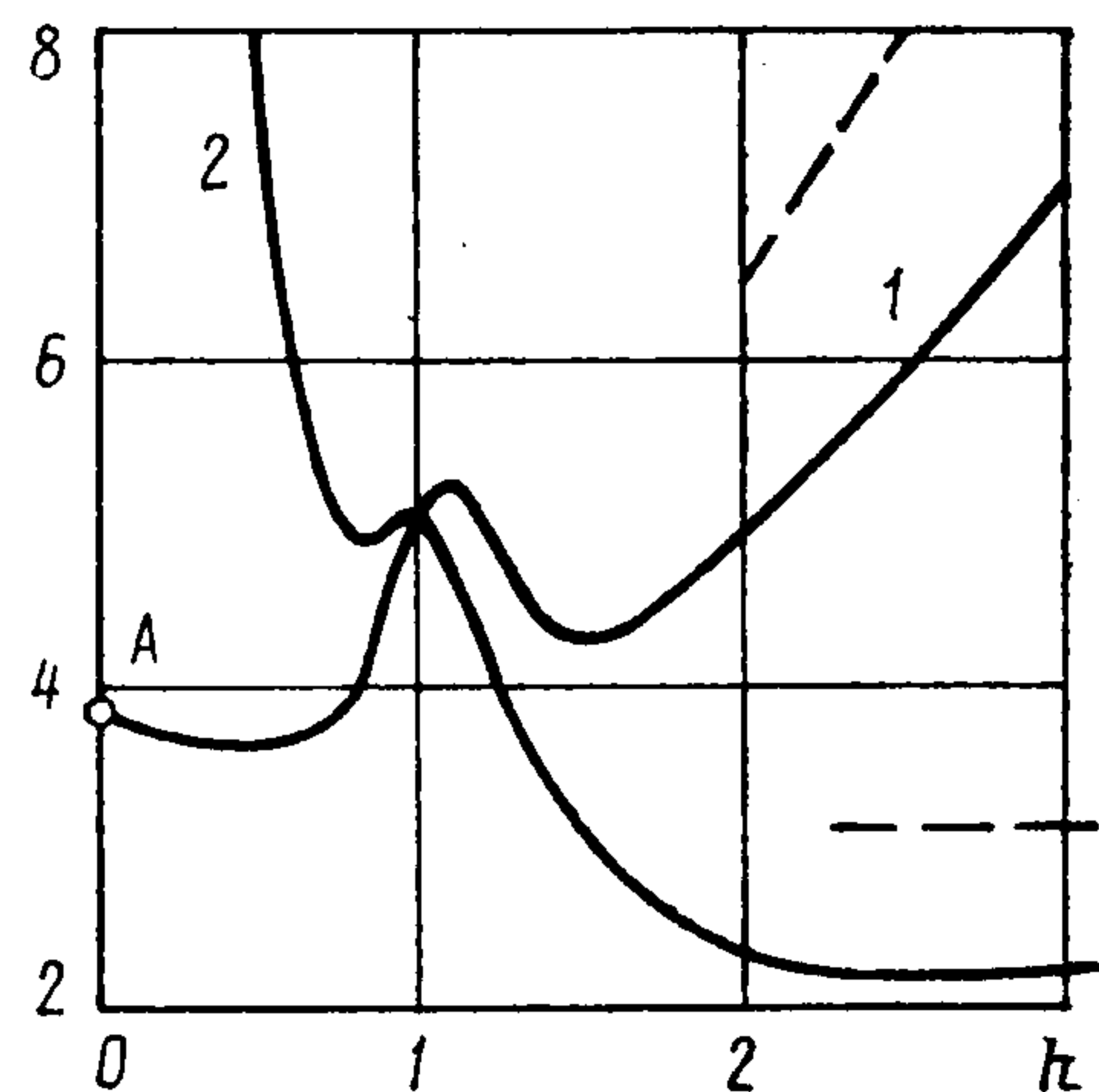
Если предположить, что трещины предварительно были нагружены равномерным внутренним давлением интенсивностью q , то для инженерных приложений, в которых берега трещин могут контактировать друг с другом, представляют интерес те значения Q^* или Q^*/h , при которых трещины начинают закрываться. Очевидно, что для $Q \leq Q^*$

предложенное выше решение остается справедливым. Проведенные численные исследования показали, что первыми закрываются трещины Γ^{00} и Γ^{10} .

Зависимости Q^*/q и $Q^*/(hq)$ от h изображены соответственно линиями 1 и 2 на фиг. 3. Штрихами отмечены их асимптоты, имеющие очевидный физический смысл. Ордината точки А линии 1 отвечает штампу нулевой длины и совпадает со значением Q^* в аналогичной задаче, сформулированной для рассматриваемой полуплоскости, которая загружена силой, приложенной в начале координат. Всплески графиков 1 и 2



Фиг. 2



Фиг. 3

вблизи значения $h = 1$ объясняются тем, что влияние контактных давлений, возникающих над трещиной, на ее раскрытие согласно решению задачи Фламана незначительно.

В заключение отметим, что при решении системы (13) применяется метод редукции. Ее уровень существенно зависит от величины параметра h/a .

Для коротких штампов, т. е. при малых значениях h/a , суммы (1)–(3) сходятся весьма быстро, что позволяет с приемлемой точностью сохранить в них небольшое число (k_0) слагаемых. Это утверждение иллюстрируется данными табл. 2. В ней приведены значения $10^3 \cdot p(x)$, где $p(x)$ — контактные давления в точках $x_j = jh/5$ ($j = 0, 1, \dots, 4$), которые вычислены при разных значениях числа k_0 для $e = 1, h = 1$.

Таблица 2

k_0	$j = 0$	1	2	3	4
4	355	360	375	411	513
6	333	344	377	434	544
10	336	344	374	436	546
14	335	344	375	435	547

Для более длинных штампов число коэффициентов a_k ($k = 2, 3, \dots, k_0 - 1$), определяемых из системы (13), следует увеличивать пропорционально величине h/a .

ЛИТЕРАТУРА

1. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высш. шк. 1966. 227 с.
2. Бурыйкин М. Л., Радиолло М. В. Обобщенная периодическая задача теории упругости для трещиноватой полуплоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 265–274.
3. Бурыйкин М. Л. Общая схема решения неоднородных линейных задач для симметричных механических систем // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 849–861.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Данышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка. 1976. 443 с.