

УДК 539.3 : 534.1

АНТИПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СЛОЯ

Пряхина О. Д., Тукодова О. М.

Рассматривается антиплоская динамическая контактная задача о возбуждении полуограниченного электроупругого слоя с жестко заземленной нижней границей одиночным электродом, как простейшим преобразователем электроупругих волн. Электрод моделируется абсолютно жестким полосовым штампом. В области контакта электрода со средой заданы амплитуды сдвиговых смещений и электрический потенциал, вне этой области поверхность свободна от напряжений и нормальная компонента электрической индукции равна нулю.

Предлагается один из подходов к изучению закономерностей распространения сдвиговых электроупругих волн в среде и на поверхности, основанный на использовании метода фиктивного поглощения. Дается сравнительный анализ поведения основных характеристик задачи для связной и несвязной задач, изучается поведение амплитудно-частотных характеристик в зависимости от ширины электрода и частоты колебаний.

1. Пусть среда занимает область $-\infty \leq x, z \leq \infty, 0 \leq y \leq h$. В качестве электроупругого материала рассматриваются XY-срезы пьезокристаллов класса *6mm* гексагональной сингонии и поляризованная вдоль оси *z* пьезокерамика. Этот случай соответствует возбуждению сдвиговой поверхностной волны $w_0(x, y)e^{-i\omega t}$.

Распространение сдвиговых электроупругих волн в квазистатическом приближении для рассматриваемых материалов описывается следующей системой уравнений в безразмерных амплитудных параметрах (общий для всех характеристик множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен):]

$$(1.1) \quad \Delta w + e\Delta\varphi + \Omega^2 w = 0, \quad e\Delta w - \varepsilon\Delta\varphi = 0$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad w = w(x_1, x_2), \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2)$$

Пусть на поверхности среды ($x_2 = 1$) заданы механическая нагрузка $\tau(x_1)$ и электрическая индукция $d(x_1)$:

$$(1.2) \quad x_2 = 1, \quad \partial_2 w + e\partial_2\varphi = \tau(x_1), \quad e\partial_2 w - \varepsilon\partial_2\varphi = d(x_1)$$

а на нижней грани слоя ($x_2 = 0$) амплитуды сдвиговых смещений и электрического потенциала обращаются в нуль

$$(1.3) \quad x_2 = 0, \quad w = \varphi = 0$$

$$e = e_{15}l/c_{44}^E, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11}^S l^2/c_{44}^E, \quad \Omega^2 = \rho\omega^2 h^2 c_{44}^E$$

$$x = hx_1, \quad y = hx_2, \quad \varphi_0 = hl\varphi, \quad w_0 = hw, \quad \tau_0 = \tau c_{44}^E,$$

$$d_0 = c_{44}^E d/l$$

$c_{44}^E, e_{15}, \varepsilon_{11}^S$ — соответственно упругая, пьезоэлектрическая и диэлектрические постоянные, ω — частота колебаний, h — толщина слоя, ρ — плотность материала, φ, d, w, τ — амплитуды электрического потенциала и индукции, сдвигового смещения и напряжений соответственно ($\varphi_0, w_0, \tau_0, d_0$ — размерные величины), l — нормировочный множитель, имеющий размерность электрического поля, x, y, z — декартова система координат; ∂_1, ∂_2 означает дифференцирование по x_1, x_2 соответственно.

Решение системы (1.1) с условиями (1.2), (1.3) строится методом преобразований Фурье и имеет вид

$$(1.4) \quad U(\alpha, x_2) = K(\alpha, x_2, \Omega)Q(\alpha)$$

$$U(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \quad Q(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

$$u = \{w, \varphi\}, \quad q = \{\tau, d\}, \quad U = \{W, \Phi\}, \quad Q = \{T, D\}$$

$$(1.5) \quad K = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}, \quad K_{11} = \frac{1}{\sigma c^2} \frac{\text{sh } \sigma x_2}{\text{sh } \sigma}$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{e}{\varepsilon} K_{11}, \quad K_{22} = \frac{e^2}{\varepsilon^2} K_{11} - \frac{\text{sh } \alpha x_2}{\alpha \varepsilon \text{ch } \alpha}$$

$$(1.6) \quad \sigma^2 = \alpha^2 - k^2, \quad k^2 = \frac{\Omega^2}{c^2}, \quad c^2 = 1 + \kappa^2$$

$$\kappa^2 = \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad k_e^2 = \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}$$

Величина k_e^2 — квадрат сдвигового коэффициента электромеханической связи.

Применяя обратное преобразование Фурье к (1.4), получаем интегральное представление решения задачи о распространении сдвиговых электроупругих волн в слое

$$(1.7) \quad u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi, x_2) q(\xi) d\xi$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

Контур σ выбирается в соответствии с условиями излучения в [1]

2. Представление (1.7) дает интегральное уравнение исходной контактной задачи о возбуждении волн в неограниченном электроупругом слое одиночным электродом ширины $2b$, когда на поверхности среды

$$(2.1) \quad x_2 = 1, \quad u(x_1, 1) = u(x_1), \quad |x_1| \leq a$$

$$q(x_1, 1) = 0, \quad |x_1| > a; \quad a = b/h$$

$$x_2 = 0, \quad u(x_1, 0) = 0, \quad |x_1| < \infty$$

Таким образом, имеем интегральное уравнение первого рода относительно неизвестного вектора q

$$(2.2) \quad \int_{-a}^a k(x_1 - \xi) q(\xi) d\xi = u(x_1), \quad |x_1| \leq a$$

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad K(\alpha) = K(\alpha, 1)$$

Элементы матрицы $K(\alpha)$ регулярны всюду на вещественной оси, за исключением одних и тех же для всех функций полюсов $u = \pm p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), и определяются из (1.5) при $x_2 = 1$.

При $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеем следующее асимптотическое представление:

$$K_{ij}(\alpha) = c^{-2} |\alpha|^{-1} [a_{ij} + o(u^{-2})], \quad i, j = 1, 2$$

Для пьезоэлектриков класса *бтт* коэффициенты $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = e\varepsilon^{-1}$, $a_{22} = -\varepsilon^{-1}$.

Система (2.2) при указанных свойствах ядер однозначно разрешима в $L_\alpha(-a, a)$, $\alpha > 1$. Критерии единственности доказываются по анало-

гии с [1]. Не нарушая общности, будем считать, что

$$w(x_1) = A_1 e^{-i\eta x_1}, \quad \varphi(x_1) = A_2 e^{-i\eta x_1}, \quad \text{Im } \eta = 0$$

Решение системы (2.2) можно построить используя решение статической и динамической задач об антиплоском сдвиге упругого слоя. Обе эти задачи сводятся к решению интегрального уравнения

$$(2.3) \quad \int_{-a}^a s(x_1 - \xi) t(\xi) d\xi = e^{-i\eta x_1}, \quad |x_1| \leq a$$

$$s(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} S(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

В динамике

$$(2.4) \quad S(\alpha) = \text{th} \sqrt{\alpha^2 - k^2} / \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad k^2 = \Omega^2$$

В статике $S(\alpha) = \text{th } \alpha/\alpha$ ($\Omega = 0$).

Пусть $t(x_1)$ — решение уравнения (2.3) с ядром (2.4), в котором $k^2 = \Omega^2/(1 + \kappa^2)$, а $t_0(x_1)$ соответствует решению для нулевой частоты Ω . Тогда решение системы (2.2) будет определяться соотношениями

$$(2.5) \quad d(x_1) = (eA_1 - \varepsilon A_2)t_0(x_1)$$

$$(2.6) \quad \tau(x_1) = A_1 c^2 t(x_1) - e\varepsilon^{-1} d(x_1)$$

Заметим, что в статике контур σ совпадает с вещественной осью.

Решение $t(x_1)$ уравнения (2.3), (2.4) построено в [2] методом фиктивного поглощения и используется в данной работе. Другой вид решения дан в [3]. Решение $t_0(x_1)$ построено в [4] в замкнутой форме.

Очевидно, что амплитуда электрического смещения (индукции) (2.5) в отличие от амплитуды сдвиговых напряжений (2.6) от частоты Ω не зависит.

В формулах, приведенных в [2—4], искомые функции $\tau(x_1)$ и $d(x_1)$ имеют особенности на границе $\sqrt{x_1 \pm a}$.

3. При расчете устройств, использующих связь механических и электрических полей, в частности устройств на поверхностных акустических волнах, часто пренебрегают вкладом упругих волн в электрическую индукцию из-за малости коэффициента электромеханической связи. В этом случае решение задачи имеет вид

$$(3.1) \quad d(x_1) = -\varepsilon A_2 t_0(x_1)$$

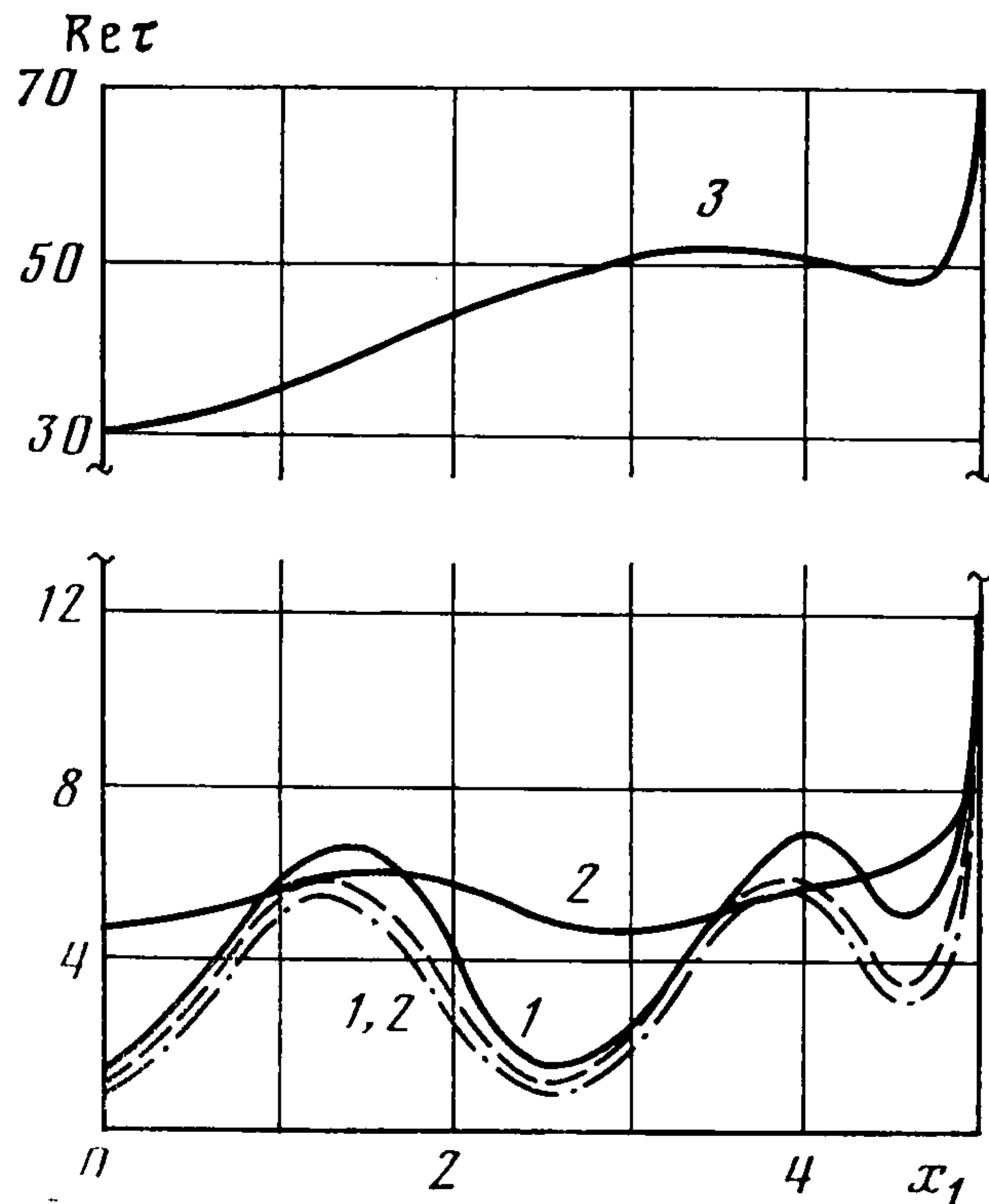
$$(3.2) \quad \tau(x_1) = A_1 t_*(x_1) + eA_2 t_0(x_1)$$

Здесь $t_*(x_1)$ — решение уравнения (2.3) с ядром (2.4), т. е. решение динамической задачи об антиплоском сдвиге упругого слоя.

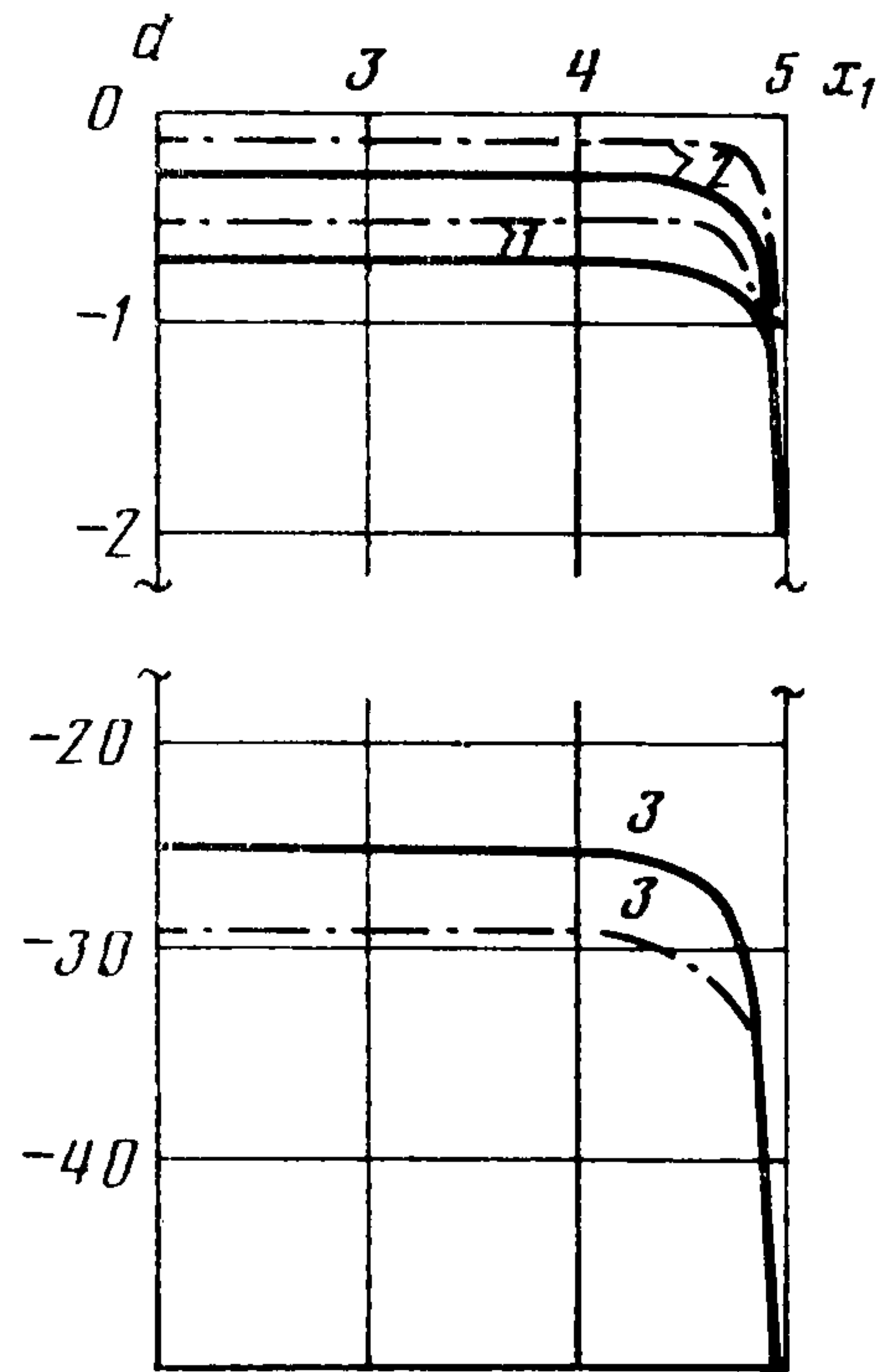
При заданном нулевом потенциале ($A_2 = 0$) сдвиговые напряжения не будут зависеть от электрических свойств среды и поведение $\tau(x_1)$ будет совпадать с соответствующей характеристикой чисто упругой задачи, при этом $d(x_1) \equiv 0$. При $A_2 \neq 0$ функция $\tau(x_1)$ будет определяться суперпозицией решений статической и динамической задач теории упругости. Амплитуда же электрической индукции для несвязной задачи будет по-прежнему оставаться действительной величиной и от частоты зависеть не будет.

На фиг. 1, 2 приведены зависимости $\text{Re } \tau$ и d от x_1 для связной (сплошные линии) и несвязной (штрихпунктирные) электромеханических задач при $A_1 = A_2 = 1$ ($\eta = 0$), $\Omega = 4$, $a = 5$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют

Cd S ($k_e = 0,19$), ZnO ($k_e = 0,32$) и ЦТС-19 ($k_e = 0,58$). Штриховой линией на фиг. 1 для сравнения дано поведение $\text{Re } \tau(x_1)$ для чисто упругой задачи, что соответствует решению (3.2) при $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ ($\eta = 0$). Расхождение между распределением контактных напряжений и электрической индукции в зоне контакта для материалов с различным коэффициентом электромеханической связи возрастает с ростом k_e . Для пьезокристаллов, обладающих малым коэффициентом электромеханической



Фиг. 1



Фиг. 2

связи, таких, как Cd S, вкладом упругих волн в электрическую индукцию можно пренебречь, что существенно упрощает построение решений подобных задач.

4. На вещественной оси $K_{ij}(\alpha)$ имеют одни и те же для всех функций полюсы $\alpha = \alpha(\Omega)$, соответствующие значению волнового числа поверхностной волны, распространяющейся на поверхности пьезоэлектрика. Эти полюсы и определяют дисперсионные кривые задачи

$$\alpha = [\Omega^2 (1 + \kappa^2)^{-1} - \pi^2 (1/2 + n)^2]^{1/2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

которые на любой частоте позволяют указать количество и фазовые скорости возникающих поверхностных волн

$$V = \sqrt{c_{44}/\rho\Omega}/\alpha = V_t\Omega/\alpha$$

(V_t — скорость поперечных объемных волн без учета пьезоэффекта).

Частотами запираания (образования стоячих волн при $\alpha = 0$ [5]) являются

$$\Omega = \sqrt{1 + \kappa^2} (\pi/2 + \pi n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Очевидно, что параметр κ^2 вносит поправку в фазовую скорость распространения сдвиговых волн, что приводит к ее увеличению. Заметим, что дисперсионные кривые для несвязной задачи и соответствующей упругой задачи совпадают.

5. Зная распределение сдвиговых напряжений и электрической индукции в области контакта, можно определить возникающее электроупругое волновое поле в среде и на поверхности. После подстановки (1.5),

2.5), (2.6) в (1.7) имеем

$$(5.1) \quad w(x_1, x_2) = \frac{A_1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\text{sh } \sigma x_2}{\sigma \text{ ch } \sigma} T(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{e}{\varepsilon} w(x_1, x_2) - \frac{eA_1 - \varepsilon A_2}{2\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh } \alpha x_2}{\alpha \text{ ch } \alpha} T_0(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

Сдвиговая волна пьезоактивна и вместе с потенциалом электрического поля описывается осциллирующей функцией.

В несвязной задаче

$$(5.2) \quad w(x_1, x_2) = \frac{A_1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\text{sh } \sigma_0 x_2}{\sigma_0 \text{ ch } \sigma_0} T_*(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad \sigma_0^2 = \alpha^2 - \Omega^2$$

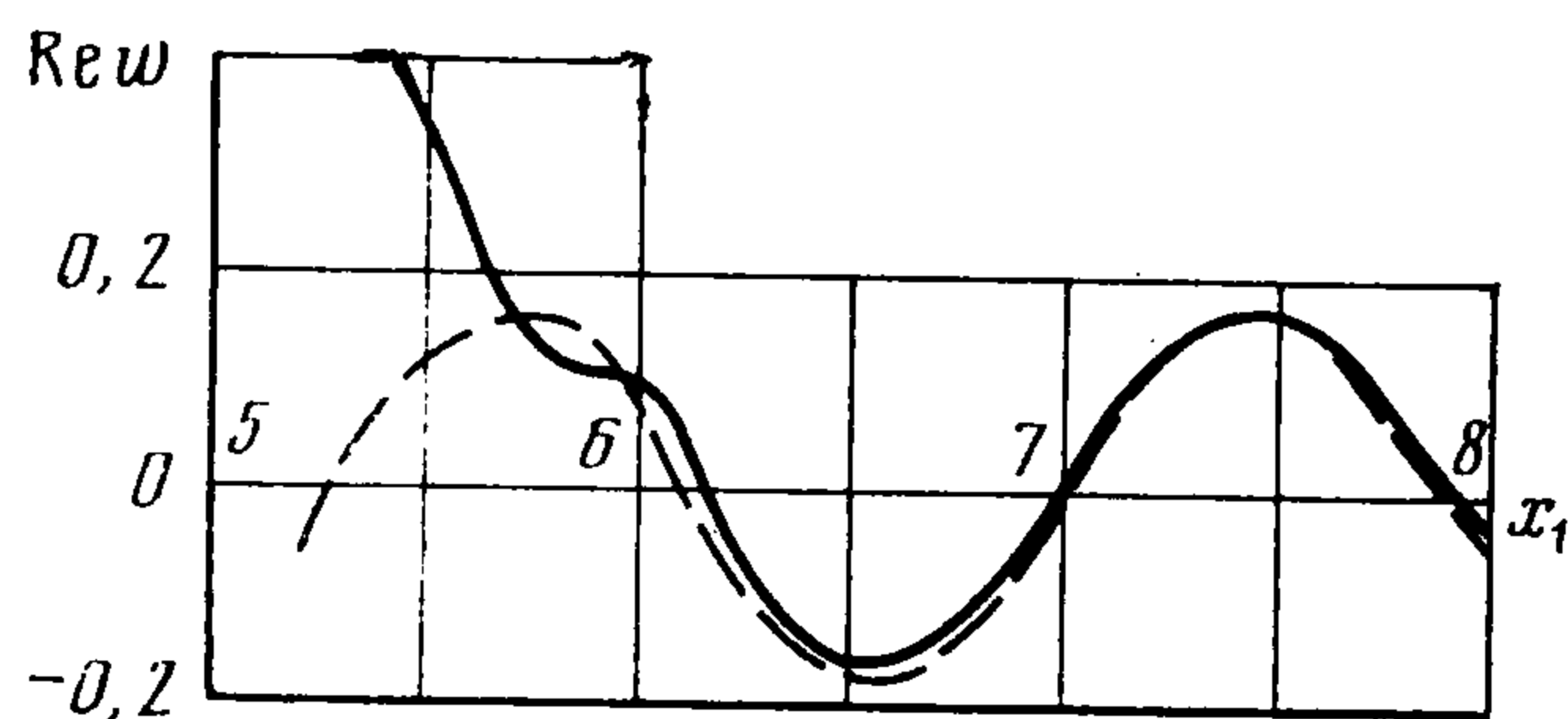
$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{A_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh } \alpha x_2}{\alpha \text{ ch } \alpha} T_0(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

Очевидно, что в случае несвязной задачи потенциал — убывающая функция x_1 (как в статической упругой задаче), а сдвиговая волна перестает быть пьезоактивной.

Отметим, что $T(\alpha)$, $T_0(\alpha)$, $T_*(\alpha)$ — трансформанты Фурье функций $t(x_1)$, $t_0(x_1)$, $t_*(x_1)$ соответственно.

Интегралы в (5.1), (5.2) вычисляются интегрированием по прямоугольному контуру σ по аналогии с [6]. В дальней зоне удобнее пользоваться асимптотическими формулами.

На фиг. 3 приведена зависимость $\text{Re } w$ от x_1 для CdS ($k_e = 0,19$, $\Omega = 4$, $a = 5$, $A_1 = A_2 = 1$). Сплошная кривая получена интегрированием по формуле (5.1) по контуру σ , а штриховая — при помощи теории вычетов (подынтегральная функция (5.1) имеет единственный для данной частоты вещественный полюс $\alpha = 3,6$).



Фиг. 3

Очевидно, что [при $x_1 > 6,5$ волновое поле удобнее рассчитывать по асимптотическим формулам. Отметим, что в области контакта электрода со средой значения w , φ близки к единице. Максимальная погрешность порядка 10% имеет место на краю электрода.

6. Рассмотрим теперь чисто «электрическую» задачу, когда на поверхности среды вместо условий (2.1) заданы следующие граничные условия:

$$(6.1) \quad x_2 = 1, \quad \varphi(x_1, 1) = \varphi(x_1), \quad |x_1| \leq a$$

$$d(x_1) = 0, \quad |x_1| > a; \quad \tau(x_1) = 0, \quad -\infty < x_1 < \infty$$

В этом случае имеем интегральное уравнение относительно неизвестной функции $d(x_1)$:

$$(6.2) \quad \int_{-a}^a k(x_1 - \xi) d(\xi) d\xi = \varphi(x_1), \quad |x_1| \leq a$$

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K_{22}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

$$K_{22}(\alpha) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} \frac{\text{th } \sigma}{\sigma} - \frac{\text{th } \alpha}{\alpha} \right)$$

Решение уравнения (6.2) для $\varphi(x_1) = Ae^{-\eta|x_1|}$ также имеет вид, приведенный в [2], при этом функция $K_{22}(\alpha)$ представляется в виде отношения

$$K_{22}(\alpha) = - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + B^2 \varepsilon c^2}} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^2 - z_k^2}{\alpha^2 - p_k^2}$$

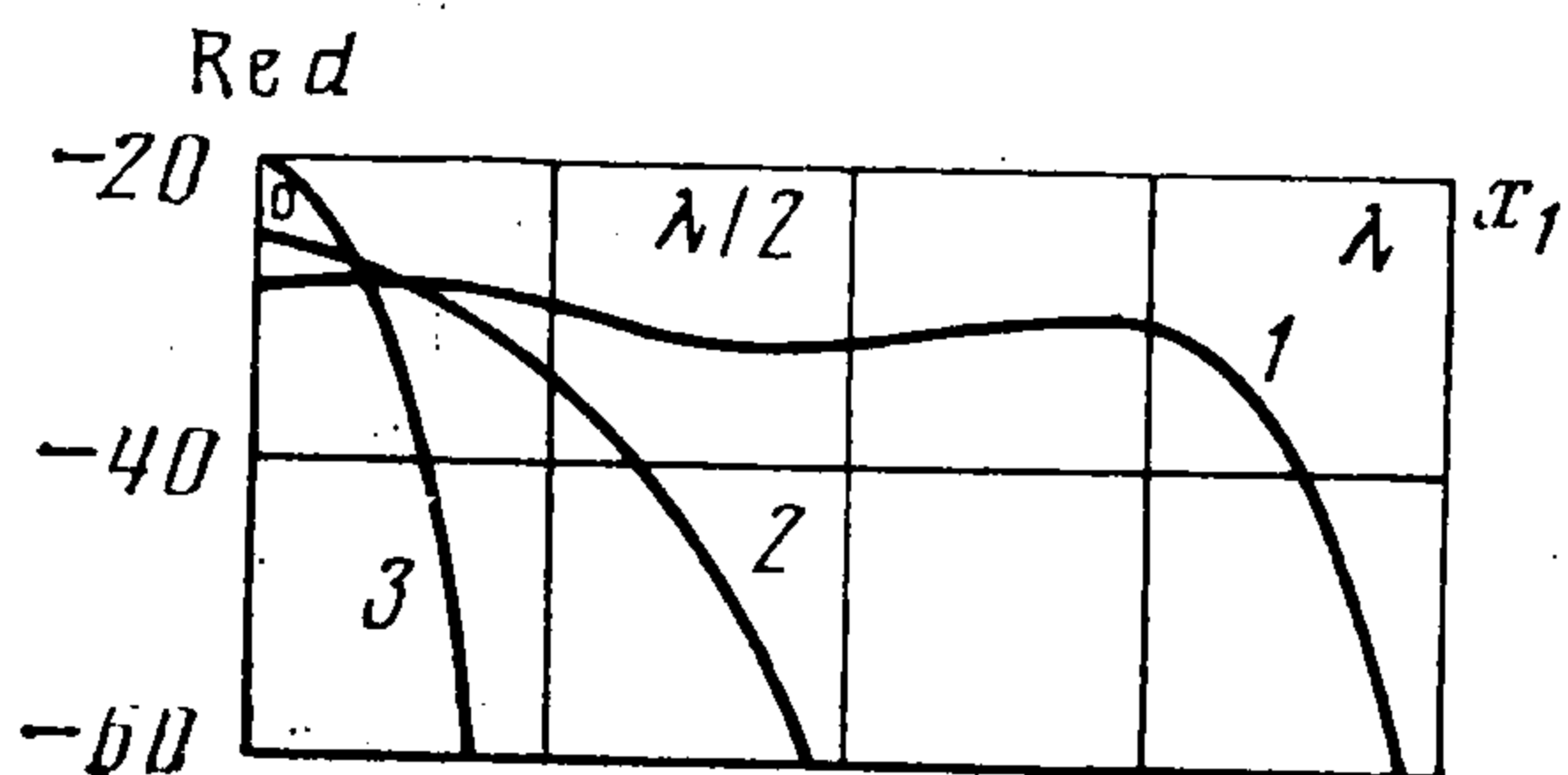
где z_k, p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — соответственно вещественные и комплексные нули, полюсы $K_{22}(\alpha)$, расположенные выше контура σ .

Электроупругое волновое поле будет описываться формулами (1.7), которые при учете условий (6.1), после определения $d(x_1)$, запишем в виде

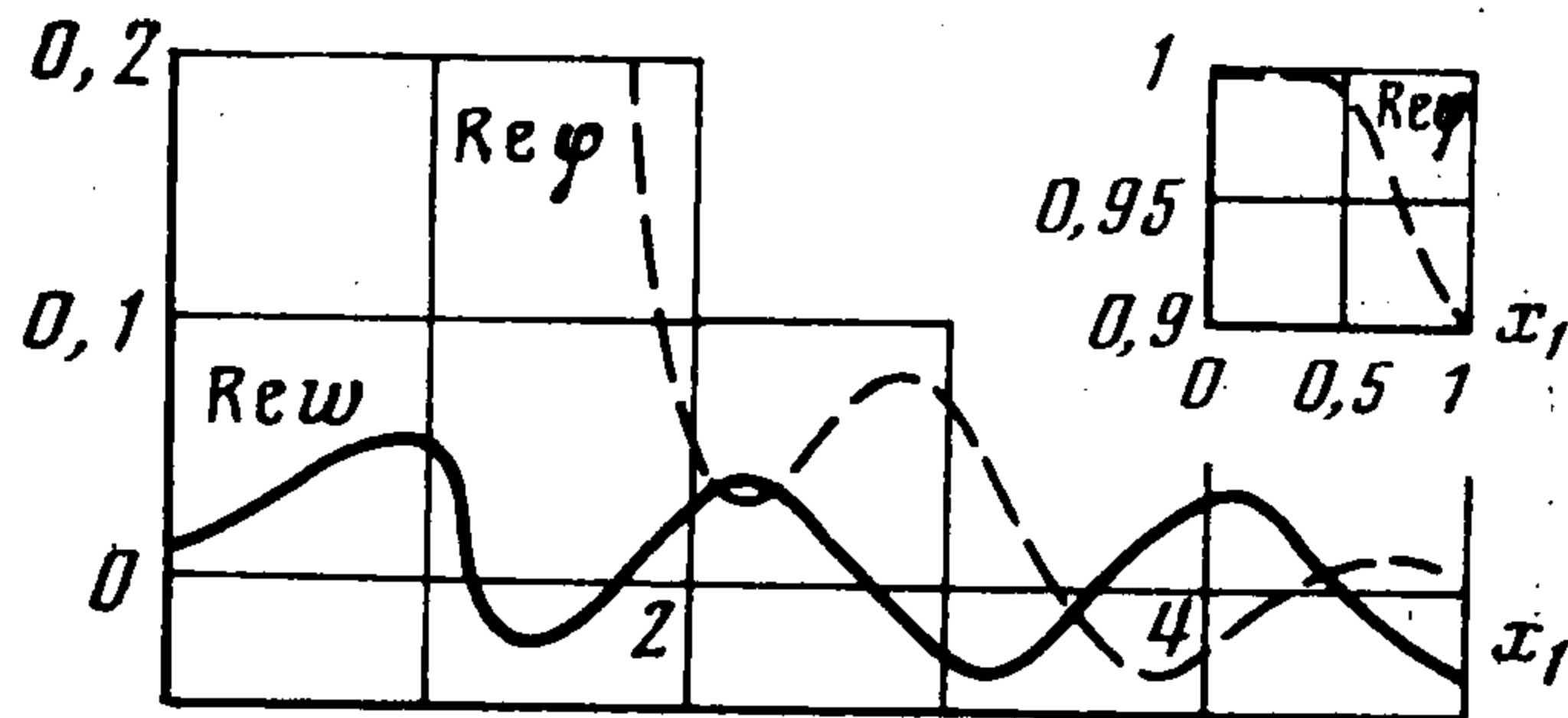
$$(6.3) \quad w(x_1, x_2) = \frac{eA}{2\varepsilon c^2 \pi} \int_{\sigma} \frac{\text{sh } \sigma x_2}{\sigma \text{ch } \sigma} D(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

$$(6.4) \quad \varphi(x_1, x_2) = \frac{A}{2\pi\varepsilon} \left\{ ew(x_1, x_2) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh } \alpha x_2}{\alpha \text{ch } \alpha} D(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha \right\}$$

На фиг. 4 приведены зависимости $\text{Re } d$ от x_1 при разной ширине электрода, соизмеримого с длиной волны λ ($a = \lambda, \lambda/2, \lambda/4$) при частоте $\Omega = 4$,



Фиг. 4



Фиг. 5

для ЦТС-19 (кривые 1, 2, 3). Отметим, что в этом случае $d(x_1)$ является осциллирующей функцией и зависит от частоты Ω в отличие от соответствующей характеристики электромеханической задачи (фиг. 2).

На фиг. 5 показано поведение амплитудных функций $w(x_1, 1)$ и $\varphi(x_1, 1)$ при $x_2 = 1, \Omega = 4, a = 1$ ($A = 1, \eta = 0$) для ZnO. В области контакта электрода со средой величина $\varphi(x_1, 1)$ близка к единице, т. е. к заданной амплитуде потенциала, величина $w(x_1, 1)$ близка к нулю. Максимальная погрешность — на краю электрода (порядка 20% при $a = 1$) и уменьшается с увеличением ширины электрода $2a$ (при $a = 5$ погрешность вблизи края составляет 10%).

Авторы благодарят И. И. Воровича за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 319 с.
2. Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477—484.
3. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
4. Александров В. М., Чебаков М. И. О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 790—798.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка. 1981. 283 с.
6. Глушкова Н. В., Калинин В. В., Селезнев М. Г. и др. Методика и результаты расчетов волнового поля вблизи вибрационного источника, распределенного на поверхности однородного полупространства // Вопросы возбуждения сейсмических волн вибрационным источником. Новосибирск: Ин-т геол. и геофиз. СО АН СССР. 1976. С. 41—52.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
9.VII.1987