Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 5, 1988

УДК 539.3 : 534.1

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО ДИСКА

Попов В. А.

Методами теории сингулярных возмущений [1—3] строятся асимптотики собственных частот изгибных низкочастотных колебаний тонкого диска. Применение метода однородных решений [4] или метода суперпозиций [5] сводит рассматриваемую задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В отличие от этих подходов теория сингулярных возмущений позволяет получить в явном виде формулы для поправок к собственным частотам колебаний, найденным по классической теории пластин.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача об осесимметричных изгибных колебаниях тонкого диска радиуса a и толщины $2h$ ($\varepsilon = h/a \ll 1$) в цилиндрической системе координат (r, φ, z). Плоскости $z = \pm h$ и боковая поверхность $r = a$ свободны от напряжений.

В безразмерных координатах $\rho = r/a$, $\xi = z/h$ задача может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&(1.1) \quad (1-2\nu)\partial_\xi^2 u_r + \varepsilon\partial_\rho\partial_\xi u_z + \\
&\qquad + 2(1-\nu)\varepsilon^2\partial_\rho(\rho^{-1}\partial_\rho(\rho u_r)) + \mu u_r = 0 \\
&\qquad 2(1-\nu)\partial_\xi^2 u_z + \varepsilon\rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\xi u_r) + \\
&\qquad + (1-2\nu)\varepsilon^2\Delta u_z + \mu u_z = 0 \\
&(1.2) \quad G(\partial_\xi u_r + \partial_\rho u_z)_{\xi=\pm1} = 0 \\
&\qquad d\,[2(1-\nu)\partial_\xi u_z + 2\nu\rho^{-1}\partial_\rho(\rho u_r)]_{\xi=\pm1} = 0 \\
&(1.3) \quad d\,[2(1-\nu)\partial_\rho u_r + 2\nu(\partial_\xi u_z + \rho^{-1}u_r)]_{\rho=1} = 0 \\
&\qquad G(\partial_\xi u_r + \partial_\rho u_z)_{\rho=1} = 0 \\
&\qquad d = G/(1-2\nu), \quad \mu = \rho_1 h^2\omega^2/d, \quad \Delta = \partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho
\end{aligned}$$

где $u_r(\rho, \xi, \varepsilon)$, $u_z(\rho, \xi, \varepsilon)$ — координаты вектора смещений, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ_1 — плотность, ω — частота колебаний. Введем также безразмерную координату $\tau = (\rho - 1)/\varepsilon$.

Асимптотическое решение задачи (1.1)—(1.3) будем искать в виде суммы регулярного решения $\mathbf{v}(\rho, \xi, \varepsilon)$ и решения типа пограничного слоя $\mathbf{w}(\tau, \xi, \varepsilon)$

$$(1.4) \quad \mathbf{u} = h(\mathbf{v}(\rho, \xi, \varepsilon) + \mathbf{w}(\tau, \xi, \varepsilon))$$

$$\begin{aligned}
&(1.5) \quad \mathbf{v}(\rho, \xi, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \mathbf{v}^{(n)}(\rho, \xi) \\
&\qquad \mathbf{w}(\tau, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^m \sum_{n=0}^{N-m} \varepsilon^n \mathbf{w}^{(n)}(\tau, \xi) \\
&\qquad \mu = \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{N-4} \mu_n \varepsilon^n
\end{aligned}$$

Каждая из функций $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ является по построению асимптотическим решением с точностью до $O(\varepsilon^{N+1})$ задачи (1.1), (1.2), функция $\mathbf{w}$ экспоненциально стремится к нулю при $\tau \to -\infty$, сумма (1.4) удовлетворяет краевым условиям (1.3) с точностью до $O(\varepsilon^{N+1})$.

2. Построение внутреннего решения. Подстановка асимптотического разложения (1.5) для $\mathbf{v}$ и μ в уравнения (1.1), (1.2) и группировка членов при одинаковых степенях ε приводит к следующим краевым задачам для функций $v_r^{(k)}$ и $v_z^{(k)}$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$:

$$(2.1)\qquad (1-2\nu)\,\partial_\xi^2 v_r^{(k)} + \partial_\rho\partial_\xi v_z^{(k-1)} + P_r^{(k-2)}(\rho,\xi) = 0$$

$$(\partial_\xi v_r^{(k)} + \partial_\rho v_z^{(k-1)})_{\xi=\pm 1} = 0$$

$$(2.2)\qquad 2(1-\nu)\,\partial_\xi^2 v_z^{(k)} + \rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\xi v_r^{(k-1)}) + P_z^{(k-2)}(\rho,\xi) = 0$$

$$[2(1-\nu)\,\partial_\xi v_z^{(k)} + 2\nu\rho^{-1}\partial_\rho(\rho v_r^{(k-1)})]_{\xi=\pm 1} = 0$$

$$P_r^{(k-2)}(\rho,\xi) = 2(1-\nu)\,\partial_\rho(\rho^{-1}\partial_\rho(\rho v_r^{(k-2)})) + \sum_{n=0}^{k-4}\mu_n v_r^{(k-n-4)}$$

$$P_z^{(k-2)}(\rho,\xi) = (1-2\nu)\,\Delta v_z^{(k-2)} + \sum_{n=0}^{k-4}\mu_n v_z^{(k-n-4)}$$

Здесь и далее все величины с отрицательными индексами считаются равными нулю. Кроме того, выражение, объединенное знаком суммы, при суммировании от $n = i$ до $n = j$ при $j < i$ также равно нулю.

Рассматривается случай изгибных колебаний диска, следовательно,

$$v_r^{(k)}(\rho,-\xi) = -v_r^{(k)}(\rho,\xi),\quad v_z^{(k)}(\rho,-\xi) = v_z^{(k)}(\rho,\xi)$$

В этом случае решение задачи (2.1) представимо в виде

$$(2.3)\qquad v_r^{(k)}(\rho,\xi) = \frac{1}{1-2\nu}\Big[-\int_0^\xi(\partial_\rho v_z^{(k-1)}(\rho,\eta) + (\xi-\eta)\,P_r^{(k-2)}(\rho,\eta))\,d\eta +$$

$$+ 2\nu\xi\partial_\rho v_z^{(k-1)}(\rho,1) + \xi\int_0^1 P_r^{(k-2)}(\rho,\eta)\,d\eta\Big]$$

При выполнении условия разрешимости

$$(2.4)\qquad \frac{1-2\nu}{\rho}\,\partial_\rho(\rho v_r^{(k-1)}(\rho,1)) + \int_0^1 P_z^{(k-2)}(\rho,\xi)\,d\xi = 0$$

решение задачи (2.2) описывается формулой

$$(2.5)\qquad v_z^{(k)}(\rho,\xi) = f_k(\rho) - \frac{1}{2(1-\nu)}\int_0^\xi\Big[\frac{1}{\rho}\,\partial_\rho(\rho v_r^{(k-1)}(\rho,\eta)) +$$

$$+ (\xi-\eta)\,P_z^{(k-2)}(\rho,\eta)\Big]\,d\eta$$

где $f_k(\rho)$ — произвольная функция, не зависящая от ξ.

Из формул (2.3), (2.5) определяем при помощи интегрирования

$$(2.6)\qquad v_r^{(k)}(\rho,\xi) = \xi f'_{k-1}(\rho) + (1-\nu)^{-1}\,({}^1\!/_6\,(2-\nu)\xi^3 -$$

$$-\ \xi)\partial_\rho\Delta f_{k-3} + V_r^{(k,\,k-5)}(\rho,\xi)$$

$$v_z^{(k)}(\rho,\xi) = f_k(\rho) + {}^1\!/_2\nu\xi^2\,(1-\nu)^{-1}\Delta f_{k-2} + V_z^{(k,\,k-4)}(\rho,\xi)$$

Функции $\mathbf{V}^{(k,\,n)}$ зависят от $f_i(\rho)$ при $i \leqslant n$; при $n < 0$ $\mathbf{V}^{(k,\,n)} = 0$.

Условие разрешимости (2.4) при учете формул (2.5), (2.6) сводится к уравнению для $f_l(\rho)$ $(l = k-4)$

$$(2.7)\qquad \Delta^2 f_l = c_1 M_l(\rho) + G_{l,\,l-2}(\rho)$$

$$c_1 = \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)},\quad M_l(\rho) = \sum_{n=0}^{l}\mu_n f_{l-n}(\rho)$$

Функции $G_{l,j}(\rho)$ зависят от $f_n(\rho)$ при $n \leqslant j$; при $j < 0$ $G_{l,j} = 0$. Продолжая вычисления, находим

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & V_r^{(k,\,k-5)}(\rho, \xi) = \frac{1}{240(1-\nu)(1-2\nu)}\Big\{[-3(1-\nu)(3-\nu)\xi^5 + \\
& + 50(3-2\nu)\xi^3 - 60(7-2\nu)\xi]\, M'_{k-5} + \\
& + \frac{1}{1-\nu}[{}^1/_{14}(1-\nu)^2(4-\nu)\xi^7 - {}^1/_5(7\nu^3 - 10\nu^2 - 26\nu + 24)\xi^5 + \\
& + (43 - 30\nu - 8\nu^2)\xi^3 + 4(2\nu^2 + 15\nu - 27)\xi]\, \partial_\rho \Delta M_{k-7}\Big\} + \\
& + V_r^{(k,\,k-9)}(\rho, \xi) \\
& V_z^{(k,\,k-4)}(\rho, \xi) = \frac{\xi^2}{16(1-\nu)(1-2\nu)}\Big\{[2(1+4\nu) - (1-\nu^2)\xi^2]\, M_{k-4} + \\
& + \frac{1}{30(1-\nu)}[(1-\nu)^2(2+\nu)\xi^4 + 2(7\nu^3 + 3\nu^2 - 2\nu - 3)\xi^2 + \\
& + 6(1+4\nu)]\,\Delta M_{k-6}\Big\} + V_z^{(k,\,k-8)}(\rho, \xi) \\
& G_{l,\,l-2}(\rho) = c_2 \Delta M_{l-2}(\rho) + c_3 \mu_0{}^2 f_{l-4} + G_{l,\,l-5}(\rho) \\
& c_2 = \frac{7\nu - 17}{10(1-2\nu)}, \quad c_3 = \frac{33\nu^2 + 424\nu - 422}{700(1-2\nu)^2}
\end{aligned}
$$

Вектор усилий $\mathbf{F}(\xi, \varepsilon)$ на боковой поверхности, отвечающей смещениям $v(\rho, \xi, \varepsilon)$, находим из формул

$$
\begin{aligned}
(2.9)\qquad & \mathbf{F}(\xi, \varepsilon) = d \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{F}^{(k)}(\xi) \\
& F_r^{(k)}(\xi) = [2(1-\nu)\partial_\rho v_r^{(k-1)} + 2\nu(\partial_\xi v_z^{(k)} + \rho^{-1} v_r^{(k-1)})]_{\rho=1} \\
& F_z^{(k)}(\xi) = (1-2\nu)(\partial_\xi v_r^{(k)} + \partial_\rho v_z^{(k-1)})_{\rho=1}
\end{aligned}
$$

Подстановка выражений (2.6)—(2.8) приводит к формулам

$$
\begin{aligned}
(2.10)\qquad & F_r^{(k)}(\xi) = -\frac{3\xi}{c_1}\left[f''_{k-2} + \nu f'_{k-2} + \left(\frac{2-\nu}{6}\xi^2 - 1\right)\partial_\rho \Delta f_{k-4}\right]_{\rho=1} + \\
& + \left(\xi^3 - \frac{6-\nu}{2(1-\nu)}\xi\right) M_{k-4}(1) + \\
& + \frac{1}{120(1-\nu)^2}\{[-9(1-\nu)^2\xi^5 + 2(7 + 6\nu - 23\nu^2)\xi^3 - \\
& - 6(1+4\nu)(2-\nu)\xi]\,\Delta M_{k-6} + (1-\nu)[3(1-\nu)(3-\nu)\xi^5 - \\
& - 50(3-2\nu)\xi^3 + 60(7-2\nu)\xi]\, M'_{k-6}\}_{\rho=1} + F_r^{(k,\,k-8)}(\xi) \\
& F_z^{(k)}(\xi) = \frac{1-\xi^2}{4}\Big\{-\frac{6}{c_1}\partial_\rho \Delta f_{k-3} + \left(\xi^2 - \frac{7-2\nu}{1-\nu}\right) M'_{k-5} - \\
& - \frac{1}{60(1-\nu)^2}[3(1-\nu)^2\xi^4 + 2(8\nu^2 + 9\nu - 12)\xi^2 + \\
& + 4(27 - 15\nu - 2\nu^2)]\,\partial_\rho \Delta M_{k-7}\Big\}_{\rho=1} + F_z^{(k,\,k-9)}(\xi)
\end{aligned}
$$

Функции $F^{(k,\,n)}$ зависят от $f_l(\rho)$ при $l \leqslant n$. Краевым условиям (1.3) можно удовлетворить с точностью до $O(\varepsilon^4)$, потребовав выполнения следующих условий для функций $f_n(\rho)$ при $n = 0$ и $n = 1$

$$
(2.11)\qquad (f_n'' + \nu f_n')_{\rho=1} = \partial_\rho(\Delta f_n)|_{\rho=1} = 0
$$

Следовательно, в разложении (1.5) для функции w можно положить $m = 4$.

Общее решение задачи (2.7), (2.11) для функции $f_0(\rho)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
(2.12)\qquad & f_0(\rho) = \alpha_0(I(p\rho) - J(p\rho)), \quad p = (c_1\mu_0)^{1/4} \\
& J(p\rho) = J_0(p\rho)/J_1(p), \quad I(p\rho) = I_0(p\rho)/I_1(p)
\end{aligned}
$$

где α_0 — произвольная постоянная, J_0, J_1 — функция Бесселя, I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя, число p — один из положительных корней уравнения

(2.13) $$p\,(J\,(p) + I\,(p)) = 2\,(1 - \nu)$$

Для удобства последующих вычислений определим постоянную α_0 из условия нормировки

$$\int_0^1 \rho f_0^2(\rho)\,d\rho = 1$$

откуда находим

$$\alpha_0 = \sqrt{2}\,[I^2(p) + J^2(p) - 2p^{-1}\,(I\,(p) + J\,(p))]^{-1/2}$$

Задача (2.7), (2.11) для функции $f_1\,(\rho)$ разрешима при выполнении условия $\mu_1 = 0$. При этом задачи для f_0 и f_1 совпадают и можно положить $f_1 = 0$.

Для нахождения функций $f_n\,(\rho)$ и чисел μ_n при $n > 1$ необходимо рассмотреть погранслойное решение $\mathbf{w}$.

3. Построение погранслойного решения. Обозначим через $\sigma\,(\tau, \xi, \varepsilon)$ тензор напряжений, отвечающих смещениям $\mathbf{w}$. Используя асимптотическое разложение (1.5) вектор-функции $\mathbf{w}$, получаем следующие формулы для членов асимптотики тензора $\boldsymbol{\sigma}$:

(3.1) $$\sigma\,(\tau, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^4 d \sum_{n=0}^{N-4} \varepsilon^n \sigma^{(n)}\,(\tau, \xi)$$

$$\sigma_{rr}^{(k)}\,(\tau, \xi) = \sigma_{rr}^{(k,\,0)} + 2\nu T_{k-1}, \quad \sigma_{zz}^{(k)}\,(\tau, \xi) = \sigma_{zz}^{(k,\,0)} + 2\nu T_{k-1}$$

$$\sigma_{rr}^{(k,\,0)}\,(\tau, \xi) = 2\,(1 - \nu)\partial_\tau w_r^{(k)} + 2\nu\partial_\xi w_z^{(k)}$$

$$\sigma_{zz}^{(k,\,0)}\,(\tau, \xi) = 2\,(1 - \nu)\partial_\xi w_z^{(k)} + 2\nu\partial_\tau w_r^{(k)}$$

$$\sigma_{rz}^{(k)}\,(\tau, \xi) = (1 - 2\nu)(\partial_\xi w_r^{(k)} + \partial_\tau w_z^{(k)})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}\,(\tau, \xi) = 2\nu\,(\partial_\tau w_r^{(k)} + \partial_\xi w_z^{(k)}) + 2\,(1 - \nu)\,T_{k-1}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(k)} = \sigma_{z\varphi}^{(k)} = 0$$

$$T_k\,(\tau, \xi) = \sum_{n=0}^{k} w_r^{(n)}\,(\tau, \xi)\,(-\tau)^{k-n}$$

Уравнения для компонент тензора $\sigma^{(k)}$ в полубесконечной полосе $D = \{\tau < 0,\ |\,\xi\,| < 1\}$ приводятся к виду

(3.2) $$\partial_\tau \sigma_{rr}^{(k,\,0)} + \partial_\xi \sigma_{rz}^{(k)} = Q_r^{(k-1)}$$

$$\partial_\tau \sigma_{rz}^{(k)} + \partial_\xi \sigma_{zz}^{(k,\,0)} = Q_z^{(k-1)}$$

$$Q_r^{(k)}\,(\tau, \xi) = -2\,\partial_\tau T_k - \sum_{n=0}^{k} (-\tau)^{k-n}\,(\sigma_{rr}^{(n)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}) - S_r^{(k-3)}$$

$$Q_z^{(k)}\,(\tau, \xi) = -\,2\nu\partial_\xi T_k - \sum_{n=0}^{k} (-\tau)^{k-n}\,\sigma_{rz}^{(n)} - S_z^{(k-3)}$$

$$\mathbf{S}^{(k)}\,(\tau, \xi) = \sum_{n=0}^{k} \mu_n \mathbf{w}^{(k-n)}$$

На сторонах $\xi = \pm 1$ и $\tau = 0$ заданы краевые условия

(3.3) $$\sigma_{rz}^{(k)}\,(\tau, \pm 1) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(k,\,0)}\,(\tau, \pm 1) = -2\nu T_{k-1}\,(\tau, \pm 1)$$

(3.4) $$\sigma_{rr}^{(k,\,0)}\,(0, \xi) = -2\nu T_{k-1}\,(0, \xi) - F_r^{(k+4)}\,(\xi)$$

$$\sigma_{rz}^{(k)}\,(0, \xi) = -F_r^{(k+4)}\,(\xi)$$

Задачи (3.2)—(3.4) являются краевыми задачами двумерной теории упругости об изгибе полубесконечной полосы D. Условия существования экспоненциально затухающих решений этих задач изучены в [6—9]. Эти условия могут быть записаны в виде

$$(3.5)\qquad \langle F_z^{(k+4)}(\xi)\rangle = -2\nu \int_{-\infty}^{0} T_{k-1}(\tau,\xi)\,d\tau\,\Big|_{\xi=-1}^{1} - \iint Q_z^{(k-1)}(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi$$

$$(3.6)\qquad \langle F_r^{(k+4)}(\xi)\,\xi\rangle = \iint (\tau Q_z^{(k-1)} - \xi Q_r^{(k-1)})\,d\tau\,d\xi - 2\nu\,\langle \xi T_{k-1}(0,\xi)\rangle + 2\nu \int_{-\infty}^{0} T_{k-1}(\tau,\xi)\,\tau\,d\tau\,\Big|_{\xi=-1}^{1}$$

Здесь и далее угловые скобки означают интегрирование по ξ от $\xi=-1$ до $\xi=1$, двойные интегралы вычисляются по области D.

Умножим второе из уравнений (3.2) на τ и проинтегрируем по области D. После интегрирования по частям с учетом условий (3.3) получаем

$$\iint (\sigma_{rz}^{(k)} + Q_z^{(k-1)}\tau)\,d\tau\,d\xi = -2\nu \int_{-\infty}^{0} \tau T_{k-1}(\tau,\xi)\,d\tau\,\Big|_{\xi=-1}^{1}$$

Подставляя в эту формулу выражение для $Q_z^{(k-1)}$, приходим к соотношению

$$\sum_{n=0}^{k} \iint (-\tau)^{k-n}\sigma_{rz}^{(n)}\,d\tau\,d\xi = \iint S_z^{(k-4)}\tau\,d\tau\,d\xi$$

Тогда условие (3.5) преобразуется к виду

$$\langle F_z^{(k+4)}(\xi)\rangle = \iint (S_z^{(k-4)} + \tau S_z^{(k-5)})\,d\tau\,d\xi$$

Отсюда при $k<4$ получаем краевое условие для $f_l(\rho)$ $(l=k+1\leqslant 4)$ вида

$$(3.7)\qquad (\partial_\rho \Delta f_l)_{\rho=1} = -\frac{34-9\nu}{20(1-2\nu)}\,M'_{l-2}(1)$$

Условие (3.6) может быть записано в виде

$$(3.8)\qquad \langle \xi F_r^{(k+4)}(\xi)\rangle = -\sum_{n=0}^{k-1} \iint (-\tau)^{k-n-1}(\tau\sigma_{rz}^{(n)} - \xi\sigma_{rr}^{(n)} + \xi\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)})\,d\tau\,d\xi + \iint (\xi S_r^{(k-4)} - \tau S_z^{(k-4)})\,d\tau\,d\xi$$

При $k=0$ правая часть (3.8) равна нулю. Из соотношений (3.1)—(3.4) следуют равенства

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = \nu(\sigma_{rr}^{(n)} + \sigma_{zz}^{(n)}) + 2(1+\nu)(1-2\nu)T_{n-1}\qquad (n\geqslant 0)$$

$$\iint \tau^l \sigma_{rz}^{(0)}\,d\tau\,d\xi = \iint \tau^l \xi\sigma_{rr}^{(0)}\,d\tau\,d\xi = 0\qquad (l\geqslant 0)$$

$$2\iint \xi\sigma_{zz}^{(0)}\,d\tau\,d\xi + \langle \xi^2 F_z^{(4)}(\xi)\rangle = 0$$

(доказательство проводится при помощи интегрирования по частям уравнений (3.2) с соответствующими множителями). Из этих формул следует, что при $k=1$ условия (3.8) приводятся к виду

$$(3.9)\qquad \langle \xi F_r^{(k+4)}(\xi) - {}^1/_2\nu\xi^2 F_z^{(k+3)}(\xi)\rangle = 0$$

Условия (3.8) при $k = 2$ также приводятся к виду (3.9) при помощи аналогичных, но более громоздких выкладок. Из (3.9) и (2.10) получаем второе краевое условие для функций $f_l(\rho)$ при $l = k + 2 \leqslant 4$

$$(3.10)\qquad (f_l'' + \nu f_l')_{\rho=1} = \frac{1}{20(1-2\nu)}\Big\{4(4+\nu)(1-2\nu)\partial_\rho \Delta f_{l-2} - (24+\nu) M_{l-2} - \frac{87(\nu^2+1)+316\nu}{140(1-\nu)}\mu_0 \Delta f_{l-4} + \frac{779-60\nu-19\nu^2}{28}\mu_0 f_{l-4}'\Big\}_{\rho=1}$$

4. Вычисление асимптотики собственных значений. Рассмотрим краевые задачи (2.7), (3.7), (3.10) для функций $f_l(\rho)$ при $l > 1$. Решения $f_l(\rho)$ определены с точностью до слагаемого $\alpha_l f_0$ (решения однородной задачи), поэтому удобно определить постоянную α_l из дополнительного условия ортогональности

$$(4.1)\qquad \int_0^1 \rho f_0(\rho) f_l(\rho)\, d\rho = 0$$

Умножим уравнение (2.7) на $\rho f_0(\rho)$ и проинтегрируем по ρ от 0 до 1. После интегрирования по частям с учетом условий (4.1) приходим к формуле, определяющей величину μ_l

$$(4.2)\qquad c_1\mu_l = -\int_0^1 \rho f_0(\rho) G_{l,\,l-2}(\rho)\, d\rho + [\partial_\rho(\Delta f_l) f_0 - (f_l'' + \nu f_l') f_0']_{\rho=1}$$

При $l \leqslant 3$, в частности, получаем

$$(4.3)\qquad c_1\mu_2 = \mu_0 p c_2 \alpha_0^2 [p + 7(1-\nu)^2 (I(p) - J(p))/(7\nu - 17)],\quad \mu_3 = 0$$

Решения краевых задач для $f_2(\rho)$ и $f_3(\rho)$ имеют вид

$$f_2(\rho) = a_2 J(p\rho) + b_2 I(p\rho) + k_- \rho J_1(p\rho)/J_1(p) + k_+ \rho I_1(p\rho)/I_1(p) + \alpha_2 f_0(\rho),\quad f_3(\rho) = 0$$

$$k_\pm = \alpha_0 (c_1\mu_2 \pm c_2\mu_0 p^2)/(4p^3)$$

$$a_2 = k_-(2/p + J(p)) + \delta,\quad b_2 = -k_+(2/p + I(p)) + \delta$$

$$\delta = \frac{9\nu - 34}{20(1-2\nu)p^2}\alpha_0\mu_0$$

Из формулы (4.1) определяем

$$\alpha_2 = \alpha_0 [(b_2 - a_2)(I(p) + J(p))/p + a_2(1 + J^2(p)) + b_2(1 - I^2(p)) + (k_- + k_+)(pI(p)J(p) - I(p) - J(p))/p^2]/2$$

Из формулы (4.2) при $l = 4$ находим

$$c_1\mu_4 = {}^1/_{40}(1-2\nu)^{-1}\{2\mu_0[(24+\nu) f_0' f_2 - (34 - 9\nu) f_0 f_2'] - 20(1-\nu)\mu_2 f_0 f_0' + \nu(8-\nu)\mu_0 f_0'^2\}_{\rho=1} - c_3\mu_0^2 - c_2\int_0^1 \rho f_0 (\mu_0 \Delta f_2 + \mu_2 \Delta f_0)\, d\rho$$

В табл. 1 приведены значения μ_0, μ_2 и μ_4 для первых шести частот колебаний при $\nu = {}^1/_3$. Полученные формулы позволяют находить уточненные значения для собственных частот при выполнении условий

$$|\varepsilon^2\mu_2/\mu_0| < 1,\quad |\varepsilon^2\mu_4/\mu_2| < 1$$

откуда $\varepsilon < \min(\sqrt{|\mu_0/\mu_2|}, \sqrt{|\mu_2/\mu_4|})$. Для первой частоты колебаний метод применим при $\varepsilon < {}^1/_4$, для второй — при $\varepsilon < {}^1/_8$.

Таблица 1

№	μ_0	μ_2	μ_4
1	$0{,}275\cdot10^2$	$-0{,}338\cdot10^3$	$0{,}520\cdot10^4$
2	$0{,}494\cdot10^3$	$-0{,}275\cdot10^5$	$0{,}182\cdot10^7$
3	$0{,}257\cdot10^4$	$-0{,}328\cdot10^6$	$0{,}497\cdot10^8$
4	$0{,}820\cdot10^4$	$-0{,}188\cdot10^7$	$0{,}508\cdot10^9$
5	$0{,}201\cdot10^5$	$-0{,}721\cdot10^7$	$0{,}307\cdot10^{10}$
6	$0{,}418\cdot10^5$	$-0{,}216\cdot10^8$	$0{,}133\cdot10^{11}$

Таблица 2

№	$N=4$	6	8	[10]
1	0,1815	0,1811	0,1811	0,1811
2	0,7703	0,7617	0,7619	0,7615
3	1,756	1,711	1,714	1,711
4	3,138	2,991	3,007	2,999
5	4,914	4,548	4,612	4,587
6	7,085	6,310	6,509	6,438

В табл. 2 приведены значения $\Omega = \omega l\sqrt{\rho_1/G}$ при $\nu = {}^1/_3$, $\varepsilon = 0{,}02$ для первых шести собственных частот колебаний; в последнем столбце даны значения Ω по уточненной теории Миндлина [10].

Значения Ω при $N = 4$ соответствуют найденным по классической теории пластин. При $N = 6$ и $N = 8$ получаем уточненные значения Ω.

Замечания. 1°. Аналогично строится асимптотическое решение для случая колебаний, симметричных относительно срединной плоскости, а также при других краевых условиях на боковой поверхности диска.

2°. Граничные условия (3.7), (3.10) для функций f_l (ρ) могут быть получены из результатов работы [11]. Необходимо отметить, однако, что описанный выше метод позволяет строить асимптотическое решение в случае пластин произвольной формы [3] и переменной толщины, когда результаты работы [11] неприменимы.

Автор благодарит В. В. Кучеренко за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 553 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668—686.
3. *Кучеренко В. В., Попов В. А.* Асимптотика решений задач теории упругости в тонких областях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 1. С. 58—61.
4. *Аксентян О. К., Селезнева Т. Н.* Определение частот собственных колебаний круглых плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 112—119.
5. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
6. *Гусейн-Заде М. И.* О плоской задаче теории упругости для полуполосы // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 124—133.
7. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Об условиях затухания и предельном поведении на бесконечности решений системы уравнений теории упругости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 3. С. 550—553.
8. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
9. *Gregory R. D., Wan F. Y. M.* Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elasticity. 1984. V. 14. № 1. P. 27—64.
10. *Deresiewicz H., Mindlin R. D.* Axially symmetric flexural vibrations of a circular disk // J. Appl. Mech. 1955. V. 222. № 1. P. 86—88.
11. *Gregory R. D., Wan F. Y. M.* On plate theories and Saint-Venant's principle // Intern. J. Solids & Structures. 1985. V. 21. № 10. P. 1005—1024.

Москва

Поступила в редакцию
27.VII.1987