Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 5, 1988

УДК 539.3 : 534.1

О КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СТЕРЖНЯ С ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ТРЕНИЕМ

Пивоварчик В. Н.

Исследуется спектр задачи, связанной с колебаниями полубесконечного стержня с внутренним (материал Фойхта) и внешним вязким трением. При некоторых условиях определяется область, в которой возможен комплексный дискретный спектр. Получены достаточные условия отсутствия комплексного дискретного спектра.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\frac{\partial^5 u}{\partial\tau\partial^4 x}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}g(x)\frac{\partial u}{\partial x}+k(x)\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=0 \tag{1}$$

$$\alpha=\nu_1\sqrt{\frac{EJ}{m}}>0,\quad k(x)=\frac{\nu_2(x)}{\sqrt{mEJ}}\geqslant 0,\quad g(x)=\frac{P(x)}{EJ}\,\tau=\sqrt{\frac{EJ}{m}}\,t$$

которое описывает колебания упругого стержня, обладающего внутренним (материал Фойхта) [1] и внешним трением. Здесь m — погонная масса, $E\nu_1$ — коэффициент внутреннего трения, $E\nu_2(x)$ — коэффициент внешнего трения, EJ — изгибная жесткость, t — время, $P(x)$ — распределенная сила натяжения (сжатия).

Краевые условия, соответствующие жестко закрепленному левому концу стержня, имеют вид

$$u(0,\tau)=du(x,\tau)/dx\,|_{x=0}=0 \tag{2}$$

После подстановки $u(x,\tau)=e^{\lambda\tau}y(\lambda,x)$ в (1) и (2) получаем задачу на полуоси

$$y^{\mathrm{IV}}+\frac{[g(x)y']'}{1+\alpha\lambda}+\frac{\lambda k(x)y}{1+\alpha\lambda}+\frac{\lambda^2 y}{1+\alpha\lambda}=0 \tag{3}$$

$$y(\lambda,0)=y'(\lambda,0)=0 \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия:

1) $k(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и

$$k(x)\geqslant 0,\quad \int_0^\infty k(x)\exp(\varepsilon x^{1+\delta})\,dx<\infty,\quad \varepsilon>0,\quad \delta>0$$

2) $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и

$$|g(x)|\leqslant g_{\max}<\infty,\quad \int_0^\infty |g(x)|\exp(\varepsilon x^{1+\delta})\,dx<\infty,$$

$$\int_0^\infty |g'(x)|\exp(\varepsilon x^{1+\delta})\,dx<\infty$$

Пусть I — интервал $(-\infty,-\alpha^{-1})$, O — окружность радиуса $r_1=\alpha^{-1}$ с центром в точке $\lambda=-\alpha^{-1}$. Очевидно, что на I и O величина $-\lambda^2/(1+\alpha\lambda)$ — вещественная, неотрицательная.

Лемма 1. Если выполнены условия 1), 2), то при $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq-\alpha^{-1}$ существует четырехзначная функция $y(\lambda,x)$, являющаяся решением уравнения (3) и удовлетворяющая условию

$$\lim_{x\to\infty} y(\lambda, x)\, e^{\beta x} = 1, \quad \beta = \left(\frac{-\lambda^2}{1+\alpha\lambda}\right)^{1/4} \tag{5}$$

Эта функция и ее производная по x аналитичны по λ при фиксированном x на четырехлистной римановой поверхности (соответствующей $\beta(\lambda)$) с точками ветвления $\lambda = 0$ и $\lambda = -\alpha^{-1}$.

Доказательство. Уравнение (3) с краевым условием (5) эквивалентно интегральному уравнению

$$y(\lambda, x) = -\int_x^\infty \frac{\sin\beta(x-t)\,dt}{\beta} \int_t^\infty \frac{\operatorname{sh}\beta(t-s)}{\beta} \times \tag{6}$$
$$\times \left\{\frac{[g(s)\,y'(\lambda, s)]'}{1+\alpha\lambda} + \frac{\lambda k(s)\,y(\lambda, s)}{1+\alpha\lambda}\right\} ds$$

Интегрируя по частям, получаем для $\omega(\lambda, x) = y(\lambda, x)\, e^{\beta x}$ интегральное уравнение

$$\omega(\lambda, x) = 1 + \Omega(\lambda, \omega(\lambda, s)) \tag{7}$$

$$\Omega(\lambda, \omega(\lambda, s)) = -\lambda \int_x^\infty \frac{\sin\beta(x-t)\,dt}{\beta^2(1+\alpha\lambda)} \int_t^\infty \operatorname{sh}\beta(t-s)\; e^{\beta(x-s)} k(s)\,\omega(\lambda, s)\,ds +$$
$$+ \int_x^\infty \frac{e^{\beta(x-t)}\sin\beta(x-t)}{\beta(1+\alpha\lambda)} g(t)\,\omega(\lambda, t)\,dt + \int_x^\infty \frac{\sin\beta(x-t)\,dt}{\beta(1+\alpha\lambda)} \times$$
$$\times \int_t^\infty \operatorname{ch}\beta(t-s)\, e^{\beta(x-s)} g'(s)\,\omega(\lambda, s)\,ds -$$
$$- \int_x^\infty \frac{\sin\beta(x-t)\,dt}{(1+\alpha\lambda)} \int_t^\infty \operatorname{sh}\beta(t-s)\, e^{\beta(x-s)} g(s)\,\omega(\lambda, s)\,ds$$

Ищем решение в виде ряда

$$\omega(\lambda, x) = \omega_0(\lambda, x) + \omega_1(\lambda, x) + \ldots \tag{8}$$
$$\omega_0(\lambda, x) = 1, \quad \omega_{n+1}(\lambda, x) = \Omega(\lambda, \omega_n(\lambda, s))$$

Воспользуемся очевидными грубыми оценками

$$|e^{\beta(x-s)}\sin\beta(x-t)\operatorname{sh}\beta(t-s)| \leqslant e^{2|\beta|s}, \quad |e^{\beta(x-t)}\sin\beta(x-t)| \leqslant$$
$$\leqslant e^{2|\beta|t}, \quad |e^{\beta(x-s)}\sin\beta(x-t)\operatorname{ch}\beta(t-s)| \leqslant e^{2|\beta|s}$$

Тогда из (8) следует

$$|\omega_{n+1}(\lambda, x)| \leqslant \left|\frac{\lambda}{\beta^2(1+\alpha\lambda)}\right| \int_x^\infty dt \int_t^\infty d\,s e^{2|\beta|s} k(s)\,|\omega_n(\lambda, s)|\,ds +$$
$$+ \frac{1}{|\beta(1+\alpha\lambda)|} \int_x^\infty e^{2|\beta|t} |g(t)|\,|\omega_n(\lambda, t)|\,dt + \frac{1}{|\beta(1+\alpha\lambda)|} \int_x^\infty dt \int_t^\infty e^{2|\beta|s} \times$$
$$\times |g'(s)|\,|\omega_n(\lambda, s)|\,ds + \frac{1}{|1+\alpha\lambda|} \int_x^\infty dt \int_t^\infty e^{2|\beta|s} |g(s)|\,|\omega_n(\lambda, s)|\,ds$$

Интегрируя по частям в первом, третьем и четвертом членах правой части последнего неравенства, получим

$$|\omega_{n+1}(\lambda, x)| \leqslant \int_x^\infty F(\lambda, t)\,|\omega_n(\lambda, t)|\,dt$$

$$F(\lambda, t) = \left|\frac{\lambda}{\beta^2(1+\alpha\lambda)}\right| e^{2|\beta|t} k(t)\, t +$$
$$\left|\frac{1}{1+\alpha\lambda}\right| e^{2|\beta|t} |g(t)| \left(t + \frac{1}{|\beta|}\right) + \left|\frac{1}{\beta(1+\alpha\lambda)}\right| e^{2|\beta|t} |g'(t)|\, t$$

Отсюда следует, что

$$(9) \qquad |\omega(\lambda, x)| \leqslant G(\lambda, x), \quad |\omega(\lambda, x) - 1| \leqslant G(\lambda, x) - 1$$

$$G(\lambda, x) = \exp \int_x^\infty F(\lambda, t)\, dt$$

т. е. утверждение леммы справедливо для функции $y(\lambda, x)$.

Аналогичное исследование уравнения, полученного дифференцированием уравнения (6) по x, приводит к заключению леммы для функции $y'(\lambda, x)$.

Очевидно, при значениях λ, не принадлежащих интервалу I и окружности O, $\beta(\lambda)$ имеет четыре значения, два из которых лежат в правой полуплоскости. Следовательно, две из ветвей функции $y(\lambda, x)$ при таких λ интегрируемы с квадратом по x. Обозначим $y_1(\lambda, x)$, $y_2(\lambda, x)$ ветви функции $y(\lambda, x)$, удовлетворяющие условиям

$$(10) \qquad \lim_{x\to\infty} y_1(\lambda, x) e^{|\beta| x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y_2(\lambda, x) e^{i|\beta| x} = 1$$

при λ, лежащих на интервале $J = (-\infty, -2\alpha^{-1})$ и верхней полуокружности O. Аналитические продолжения этих функций на область, внешнюю к окружности O, с разрезом от $-\infty$ до $-2\alpha^{-1}$ интегрируемы с квадратом по x.

Введем решение уравнения (3),

$$\psi_1(\lambda, x) = y_1'(\lambda, 0) y_2(\lambda, x) - y_2'(\lambda, 0)\, y_1(\lambda, x)$$

Нули функции $\psi_1(\lambda, 0)$, лежащие вне окружности O, но не на интервале J, соответствуют собственным значениям задачи (3), (4). При этом ввиду аналитичности $\psi_1(\lambda, 0)$ они образуют дискретное множество, не имеющее точки сгущения в конечной области.

Определим функцию

$$\psi_2(\lambda, x) = y_1'(\lambda, 0)\, y_3(\lambda, x) - y_3'(\lambda, 0) y_1(\lambda, x)$$

где $y_3(\lambda, x)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to\infty} y_3(\lambda, x) e^{-i|\beta| x} = 1$$

при λ, лежащих на верхней полуокружности O. Нули этой функции, лежащие внутри окружности O, но не на отрезке $[-2\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}]$, соответствуют собственным значениям. Дискретное множество этих собственных значений может иметь точкой сгущения нулей только $\lambda = -\alpha^{-1}$, что следует из возможности аналитического продолжения функции $\psi_2(\lambda, 0)$.

Лемма 2. Непрерывный спектр лежит на окружности O и интервале I.

Этот результат следует из существования при λ, лежащих на I и O ($\lambda \neq 0$), решения уравнения (3)

$$\begin{aligned}\psi(\lambda, x) = {} & [y_2'(\lambda, 0) y_3(\lambda, 0) - y_3'(\lambda, 0)\, y_2(\lambda, 0)] y_1(\lambda, x) + \\ & + [y_1(\lambda, 0)\, y_3'(\lambda, 0) - y_1'(\lambda, 0) y_3(\lambda, 0)] y_2(\lambda, x) + \\ & + [y_1'(\lambda, 0) y_2(\lambda, 0) - y_1(\lambda, 0) y_2'(\lambda, 0)] y_3(\lambda, x)\end{aligned}$$

удовлетворяющего условиям (4) и имеющего следующую асимптотику при $x \to \infty$:

$$\psi(\lambda, x) = a_1 e^{-|\beta| x} + a_2 e^{i|\beta| x} + a_3 e^{-i|\beta| x} + o(1)$$

Однако без дополнительных условий, по-видимому, нельзя исключить возможность существования собственных значений, «утопленных в непрерывном спектре», что известно (например, [2]) для других спектральных задач. Такие собственные значения находятся в точках I и O, где

$$(11) \qquad y_i(\lambda, 0) = y_i'(\lambda, 0) = 0$$

Здесь под $y_i(\lambda, x)$ подразумевается ветвь функции $y(\lambda, x)$, убывающая при $x \to \infty$ при данном λ.

Вопрос о существовании спектра в правой полуплоскости представляет интерес в связи с вопросом устойчивости исходной задачи (1), (2). Из леммы 2 следует отсутствие непрерывного спектра в правой полуплоскости.

Теорема 1. Если выполнены условия 1), 2) и

$$\int_0^\infty g_+(x)\,x\,dx < \ln 2, \quad g_+(x) = \begin{cases} g(x), & g(x) \geqslant 0 \\ 0, & g(x) < 0 \end{cases} \tag{12}$$

то в правой полуплоскости нет собственных значений задачи (3), (4).

Доказательство. Докажем сначала, что собственные значения в правой полуплоскости (если такие есть) вещественные. Домножим уравнение (3), записанное для собственной функции $\psi_i(\lambda_j, x)$ (λ_j — некоторое собственное значение), на $(1 + \alpha\lambda_j)\overline{\psi_i(\lambda_j, x)}$ и проинтегрируем от $x = 0$ до $x = \infty$, тогда получим

$$(1 + \alpha \operatorname{Re} \lambda_j) I_i^{(1)} + \operatorname{Re} \lambda_j I_i^{(2)} + [(\operatorname{Re} \lambda_j)^2 - (\operatorname{Im} \lambda_j)^2] I_i^{(3)} = I_i^{(4)} \tag{13}$$

$$\alpha \operatorname{Im} \lambda_j I_i^{(1)} + \operatorname{Im} \lambda_j I_i^{(2)} + 2 \operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Re} \lambda_j I_i^{(3)} = 0 \tag{14}$$

$$I_i^{(1)} = \int_0^\infty |\psi_i''(\lambda_j, x)|^2 dx, \quad I_i^{(2)} = \int_0^\infty k(x) |\psi_i(\lambda_j, x)|^2 dx$$

$$I_i^{(3)} = \int_0^\infty |\psi_i(\lambda_j, x)|^2 dx, \quad I_i^{(4)} = \int_0^\infty g(x) |\psi_i'(\lambda_j, x)|^2 dx$$

При $\operatorname{Re} \lambda_j \geqslant 0$ из равенства (14) следует $\operatorname{Im} \lambda_j = 0$.

Согласно результатам работы [3] число собственных значений задачи (3), (4) в правой полуплоскости равно [1] числу собственных значений в правой полуплоскости этой задачи при

$$k(x) \equiv 0, \ \eta = 1 \ \text{и} \ \alpha = 0.$$

По теореме Пуанкаре решения $y_1(\lambda, \eta, x)$ и $y_2(\lambda, \eta, x)$ — целые функции η при фиксированных x и $\lambda \neq -\alpha^{-1}$ (η не входит в краевые условия (10)). Аналогично, производные $y_1'(\lambda, \eta, x)$, $y_2'(\lambda, \eta, x)$, являющиеся решениями продифференцированного по x уравнения (3) при $k(x) \equiv 0$ с краевыми условиями

$$\lim_{x\to\infty} y_1'(\lambda, \eta, x) e^{|\beta| x} = -|\beta|, \quad \lim_{x\to\infty} y_2'(\lambda, \eta, x) e^{i|\beta| x} = -i|\beta|$$

— целые функции η. Следовательно, и решение $\psi_1(\lambda, \eta, x)$ — целая функция η. Кроме того, по лемме 1 функция $\psi_1(\lambda, \eta, 0)$ аналитична по λ ($\lambda \neq -\alpha^{-1}$) при фиксированном η.

По теореме о неявной функции, задаваемой аналитическим уравнением ([3], с. 473), нули $\lambda_j(\eta)$ функции $\psi_1(\lambda, \eta, 0)$ в правой полуплоскости кусочно-аналитичны по η. Так как нули этой функции в правой полуплоскости простые (столкновения в правой полуплоскости не происходят), то они аналитичны по η. При $\eta = 0$ собственные значения в правой полуплоскости отсутствуют. Очевидно, отрицательная часть $g(x)$ не увеличивает числа собственных значений в правой полуплоскости (она смещает влево собственные значения в правой полуплоскости).

---

[1] *Пивоварчик В. Н.* О спектре квадратичных пучков неограниченных операторов, связанных с задачами устойчивости. Киев, 1988. 83 с.— Деп. УкрНИИНТИ 13. 01.88, № 217-Ук88.

Положим $g(x) = \eta g_+(x)$ в уравнении (3) при $k(x) \equiv 0$. Это уравнение для решения, принадлежащего вместе с производной $L_2(0, \infty)$, эквивалентно уравнению

(15)
$$y(\lambda, \eta, x) = y_0(\lambda, x) - \eta \int_x^\infty \frac{\sin\beta(x-t)\,dt}{\beta} \int_t^\infty \operatorname{sh}\beta(t-s)\,[g_+(s)\,y'(\lambda, \eta, s)]'\,ds$$

где $y_0(\lambda, x)$ — решение из $L_2(0, \infty)$ уравнения (3) при $k(x) \equiv 0$, $\eta = 0$, β — одно из значений $\beta(\lambda)$.

Уравнение (15) после дифференцирования по x и интегрирования по частям в правой части приводится к виду

(16)
$$y'(\lambda, \eta, x) = y_0'(\lambda, x) - \eta \int_x^\infty \cos\beta(x-t)\,dt \int_t^\infty \operatorname{ch}\beta(t-s)\,g_+(s)\,y'(\lambda, \eta, s)\,ds$$

Решение уравнения (15) представимо в виде ряда

$$y'(\lambda, \eta, x) = \sum_{n=0}^\infty z_n(\lambda, \eta, x); \quad z_0(\lambda, \eta, x) = y_0'(\lambda, x)$$

$$z_{n+1}(\lambda, \eta, x) = -\eta \int_x^\infty \cos\beta(x-t)\,dt \int_t^\infty \operatorname{ch}\beta(t-s)\,g_+(s)\,z_n(\lambda, \eta, s)\,ds$$

Используя очевидные неравенства

$$|\cos\beta(x-t)| \leqslant {}^1/_2\,(e^{|\beta|s} + 1), \quad |\operatorname{ch}\beta(x-t)| \leqslant {}^1/_2\,(e^{|\beta|t} + 1)$$

справедливые при $0 \leqslant x \leqslant t \leqslant s$, получаем

$$|z_{n+1}(\lambda, \eta, x)| \leqslant |\eta| \int_x^\infty (t-x)\left[\frac{\exp(|\beta|\,t) + 1}{2}\right]^2 g_+(t)\,|z_n(\lambda, \eta, t)|\,dt$$

откуда

$$|y'(\lambda, \eta, x)| \leqslant |y_0'(\lambda, x)| \exp\int_x^\infty \Phi(\lambda, \eta, t)\,dt$$

(17)
$$|y'(\lambda, \eta, x) - y_0'(\lambda, x)| \leqslant |y_0'(\lambda, x)| \left[\exp\int_x^\infty \Phi(\lambda, \eta, t)\,dt - 1\right]$$

$$\Phi(\lambda, \eta, t) = {}^1/_4\,t\eta g_+(t)\,[e^{|\beta|t} + 1]^2$$

Неравенство (12) эквивалентно неравенству

$$\int_0^\infty \Phi(0, 1, t)\,dt < \ln 2$$

Поэтому при положительных достаточно малых λ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty \Phi(\lambda, 1, t)\,dt < \ln 2$$

из которого при учете (17) следует невозможность равенства $y'(\lambda, \eta, 0) = 0$ при $\eta \in [0, 1]$ и достаточно малых $\lambda > 0$.

Следовательно, при росте $\eta \in [0, 1]$ и условиях теоремы собственные значения в правой полуплоскости не возникают из точки $\lambda = 0$. Из равенства (13) при $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$ следует неравенство

$$(1 + \alpha \operatorname{Re}\lambda_j) I_i^{(1)} + \operatorname{Re}\lambda_j I_i^{(2)} + (\operatorname{Re}\lambda_j)^2 I_i^{(3)} \leqslant {}^1/_2\,g_{\max}\,[I_i^{(1)} + I_i^{(3)}]$$

Последнее неравенство не выполняется при

$$\operatorname{Re}\lambda_j > \max\left\{\frac{g_{\max}}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha},\ \sqrt{\frac{g_{\max}}{2}}\right\}$$

Следовательно, спектр в правой полуплоскости лежит в конечной области, т. е. при росте η от 0 до 1 собственные значения не попадают в правую полуплоскость из бесконечности. Теорема доказана.

Рассмотрим дискретный спектр в левой полуплоскости.

Теорема 2. 1°. Если выполнены условия 1), 2), $g(x) \geqslant 0$ и справедливо неравенство (12), то дискретный спектр задачи (3), (4) возможен на полуоси $(-\infty, 0]$ и внутри окружности O.

2°. Если выполнено условие 1), $g(x) \equiv 0$, $k(x) \leqslant k_{\max} < \alpha^{-1}$, то дискретный спектр задачи (3), (4) возможен на полуоси $(-\infty, 0]$ и между концентрическими окружностями радиусов $r_1 = \alpha^{-1}$ и $r_2 = \alpha^{-1}\sqrt{1 - \alpha k_{\max}}$ с центром в точке $\lambda = -\alpha^{-1}$.

3°. Если выполнено условие 2), $g(x) \leqslant 0$, $k(x) \equiv 0$, то дискретный спектр задачи (3), (4) возможен на полуоси $(-\infty, 0]$ и между окружностями радиуса r_1 с центром в точке $\lambda = -\alpha^{-1}$ и радиуса $r_3 = \sqrt{\gamma^2 + g_{\max}/(2\alpha)}$ с центром в точке $\lambda = -\gamma$ в левой полуплоскости, где $\gamma = (4\alpha + g_{\max})/(4\alpha^2)$.

Доказательство. Домножим уравнение (3), записанное для собственной функции $\psi_i(\lambda_j, x)$, на $\overline{\psi_i(\lambda_j, x)}$ и вычтем из результата уравнение, комплексно-сопряженное (3), домноженное на $\psi_i(\lambda_j, x)$. После интегрирования по x получим, что либо $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$, либо

(18) $$I_i^{(2)} + \{\alpha[(\operatorname{Re}\lambda_j)^2 + (\operatorname{Im}\lambda_j)^2] + 2\operatorname{Re}\lambda_j\} I_i^{(3)} + I_i^{(4)} = 0$$

Из этой формулы, если учесть результат теоремы 1, следуют все утверждения теорема 2, кроме ограниченности дискретного спектра окружностью радиуса r_3 в последнем случае.

Для доказательства последнего утверждения из равенства (14) при $\operatorname{Im}\lambda_j \neq 0$, $k(x) \equiv 0$ получаем

$$I_i^{(1)} = -\alpha^{-1}\operatorname{Re}\lambda_j I_i^{(3)}$$

Из равенства (18) при $k(x) \equiv 0$, $g(x) < 0$ следует

$$\{\alpha[(\operatorname{Re}\lambda_j)^2 + (\operatorname{Im}\lambda_j)^2] + 2\operatorname{Re}\lambda_j\} I_i^{(3)} = \\ = \int_0^\infty g(x)\psi_i''(\lambda_j, x)\overline{\psi_i(\lambda_j, x)}\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty |g(x)|[|\psi_i''(\lambda_j, x)|^2 + \\ + |\psi_i(\lambda_j, x)|^2]\,dx \leqslant \frac{1}{2} g_{\max}\left(1 - \frac{\operatorname{Re}\lambda_j}{\alpha}\right) I_i^{(3)}$$

откуда

$$(\operatorname{Re}\lambda_j + \gamma)^2 + (\operatorname{Im}\lambda_j)^2 \leqslant \gamma^2 + g_{\max}/(2\alpha)$$

Теорема доказана.

В частном случае, когда $k(x) \equiv 0$, $g(x) < 0$, можно получить достаточное условие отсутствия комплексного дискретного спектра.

Теорема 3. Если выполнено условие 2), $\eta g_1(x) \leqslant 0$, $g(x) = \eta g_1(x)$, $k(x) \equiv 0$ и выполняются неравенства

(19) $$\alpha > 0,\quad 2 + \sqrt{2} > \exp\left\{\eta\int_0^\infty (A_1 + B_2)\,dt\right\} + \exp\left\{\eta\int_0^\infty (A_2 + B_1)\,dt\right\}$$

$$A_1 = {}^3/_2\,|g_1(t)|\,t + {}^1/_2\,|g_1'(t)|\,t^2,\quad A_2 = \\ = {}^1/_2\,|g_1(t)|\,t\,(2 + \exp\sqrt{2/\alpha}\,t) + {}^1/_4\,|g_1'(t)|\,t^2\,(1 + \\ + \exp\sqrt{2/\alpha}\,t)$$

$$B_1 = |g_1(t)|\,t,\quad B_2 = {}^1/_2\,|g_1(t)|\,t\,(1 + \exp\sqrt{2/\alpha}\,t)$$

то дискретный спектр задачи (3), (4) при $k(x) \equiv 0$ возможен только на интервале $(-2\alpha^{-1}, -\alpha^{-1})$.

Доказательство. Согласно третьему утверждению теоремы 2 в рассматриваемом случае дискретный спектр возможен только на полуоси $(-\infty, 0]$ и между окружностями радиуса r_1 с центром в точке $\lambda = -\alpha^{-1}$ и радиуса r_3 с центром в точке $\lambda = -\gamma$ в левой полуплоскости. Но из формулы (13) при $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$, $k(x) \equiv 0$, $-\alpha^{-1} < \operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$ следует, что

$$\int_0^\infty g(x) |\psi_i(\lambda_j, x)|^2 dx > 0$$

а это невозможно при $g(x) \leqslant 0$.

Таким образом, остается доказать, что нет собственных значений между указанными окружностями. Собственные значения между окружностями, в том числе и вещественные, соответствуют нулям функции $\psi_1(\lambda, \eta, 0)$, которая аналитична по λ (при фиксированном η) вне круга O с разрезом от $\lambda = -2\alpha^{-1}$ до $\lambda = -\infty$ и целая функция η (при фиксированном λ, лежащем на и вне окружности O). Последнее следует из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 1.

Ввиду непрерывности по η нулей функции $\psi_1(\lambda, \eta, 0)$ вне окружности и отсутствия их при $\eta = 0$ остается доказать, что при выполнении неравенства (19) нули функции $\psi_1(\lambda, \eta, 0)$ отсутствуют на окружности O и на интервале J. Тогда ввиду монотонности правой части неравенства (19) по η нули функции $\psi_1(\lambda, \eta, 0)$ не возникают и при меньших η, поэтому вне окружности O $\psi_1(\lambda, \eta, 0)$ в нуль не обращается.

При λ, лежащих на окружности O, и $x \leqslant t \leqslant s$ справедливы неравенства

$$e^{|\beta|(x-s)} \operatorname{ch} |\beta| (t-s) \leqslant 1$$

$$|e^{i|\beta|(x-s)} \operatorname{ch} |\beta| (t-s)| \leqslant {}^1/_2 [e^{|\beta|(s-t)} + 1]$$

$$e^{|\beta|(x-t)} \leqslant 1, \quad |e^{-i|\beta|(x-t)}| \leqslant 1$$

$$|e^{|\beta|(x-s)} \sin |\beta| (x-t) \operatorname{sh} |\beta| (t-s)| \leqslant {}^1/_2$$

$$|e^{i|\beta|(x-s)} \sin |\beta| (x-t) \operatorname{sh} |\beta| (t-s)| \leqslant {}^1/_2 e^{|\beta|(s-t)}$$

$$|1 + \alpha\lambda| = 1, \quad |\beta^{-1} \sin |\beta| (x-t)| \leqslant |t - x|, \quad |\sin |\beta| (x-t)| \leqslant 1$$

Используя эти неравенства, получаем аналогично выводу формул (9)

$$|y_1(\lambda, \eta, x) - e^{-|\beta|x}| \leqslant e^{-|\beta|x}\left[\exp\left(\eta \int_x^\infty A_1 dt\right) - 1\right] \tag{20}$$

$$|y_2(\lambda, \eta, x) - e^{-i|\beta|x}| \leqslant \exp\left(\eta \int_x^\infty A_2 dt\right) - 1$$

Аналогичное исследование уравнений

$$y_1'(\lambda, \eta, x) = -|\beta| e^{-|\beta|x} - $$
$$- \int_x^\infty \cos|\beta|(x-t) \int_t^\infty \frac{\operatorname{ch}|\beta|(t-s)}{1+\alpha\lambda} \eta g_1(s) y_1'(\lambda, \eta, s) ds$$

$$y_2'(\lambda, \eta, x) = -i|\beta| e^{-i|\beta|x} - $$
$$- \int_x^\infty \cos|\beta|(x-t) \int_t^\infty \frac{\operatorname{ch}|\beta|(t-s)}{1+\alpha\lambda} \eta g_1(s) y_2'(\lambda, \eta, s) ds$$

полученных дифференцированием уравнения (6) по x при $k(x) \equiv 0$ после интегрирования по частям, приводит к неравенствам

$$(21) \qquad |y_1'(\lambda, \eta, x) + |\beta| e^{-|\beta| x}| \leqslant |\beta| e^{-|\beta| x}\left[\exp\left(\eta \int_x^\infty B_1\, dt\right) - 1\right]$$

$$|y_2'(\lambda, \eta, x) + i|\beta| e^{-i|\beta| x}| \leqslant |\beta| \left[\exp\left(\eta \int_x^\infty B_2\, dt\right) - 1\right]$$

Используя неравенства (20), (21), получаем из определения $\psi_1(\lambda, \eta, x)$

$$|\psi_1(\lambda, \eta, 0) + |\beta|(1-i)| \leqslant |\beta| \left\{\exp\left[\eta \int_0^\infty (A_1 + B_2)\, dt\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[\eta \int_0^\infty (A_2 + B_1)\, dt\right] - 2\right\}$$

Из последней формулы видно, что из неравенства (19) следует $\psi_1(\lambda, \eta, 0) \neq 0$. Первое неравенство (21) выполняется не только на окружности O, но и на интервале J, поэтому из неравенства (19) следует $y_1'(\lambda, \eta, 0) \neq 0$, т. е. невыполнение равенства (11), а значит, отсутствие собственных значений на этом интервале. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Милославский А. И.* К обоснованию спектрального подхода в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. Вып. 3. С. 83—84.
2. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1968. 486 с.

Одесса

Поступила в редакцию 23.XII.1986