

УДК 539.3.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОДОЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

Рогачева Н. Н.

Рассматриваются вынужденные колебания круговой цилиндрической пьезокерамической оболочки с продольной поляризацией, вызванные электрической нагрузкой, приложенной к электродам на краю оболочки. Методом расчленения выполнен численный расчет электроупругого состояния, проведено сравнение значений коэффициента электромеханической связи, полученных по различным формулам.

1. Выберем систему ортогональных криволинейных безразмерных координат  $\xi$ ,  $\varphi$  так, чтобы  $\xi$ -линия совпадала с образующей, а  $\varphi$ -линия — с направляющей цилиндра.

Выпишем систему уравнений для рассматриваемой электроупругой оболочки в выбранных координатах, опустим при этом некоторые неиспользуемые ниже уравнения.

Уравнения равновесия

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dT_{1n}/d\xi - nS_{12n} + \lambda u_n &= 0 \\ T_{2n} + \varepsilon^2 dN_{1n}/d\xi - \varepsilon^2 nN_{2n} + \lambda w_n &= 0 \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad dS_{12n}/d\xi + nT_{2n} - N_{2n} + \lambda v_n = 0$$

$$(1.3) \quad N_{1n} = dG_{1n}/d\xi$$

Соотношения электроупругости

$$(1.4) \quad T_{1n} = \varepsilon_{1n} + \nu_2 \varepsilon_{2n} - E_{1n}, \quad T_{2n} = \sigma (\varepsilon_{2n} + \nu_1 \varepsilon_{1n}) - c_{12} E_{1n}$$

$$(1.5) \quad S_{12n} = S_{21n} = (\omega_n - d_{15} n_{22} c_2^{-1} E_{2n}) / s_{44} E_{2n}$$

$$(1.6) \quad G_{1n} = -\varepsilon^2 \kappa_{1n}$$

$$(1.7) \quad D_{1n} = \varepsilon_{33}^T (c_2 d_{31})^{-1} E_{1n} + T_{2n} + d_{33} (d_{31})^{-1} T_{1n}$$

$$(1.8) \quad D_{2n} = \varepsilon_{11}^T (c_2 d_{31})^{-1} E_{2n} + d_{15} d_{31}^{-1} S_{12n}$$

Уравнения электростатики

$$(1.9) \quad dD_{1n}/d\xi - nD_{2n} = 0$$

$$(1.10) \quad E_{1n} = -d\psi_n/d\xi, \quad E_{2n} = -n\psi_n$$

Формулы деформации — перемещения

$$(1.11) \quad \varepsilon_{1n} = du_n/d\xi, \quad \varepsilon_{2n} = -nv_n - qw_n$$

$$(1.12) \quad \omega_n = dv_n/d\xi + nu_n$$

$$(1.13) \quad \kappa_{1n} = d^2 w_n / d\xi^2$$

Во второй формуле (1.11) число  $q$  будет равно нулю или единице в зависимости от типа совершаемых оболочкой колебаний.

Здесь и далее учтено, что искомые величины меняются с временем  $t$  по закону  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega$  — круговая частота), поэтому все уравнения записаны относительно амплитудных значений искомых величин. Кроме того, все

искомые величины разложены в ряды Фурье по координате  $\varphi$ :

$$(1.14) \quad P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_{1n} \sin n\varphi, \quad P_2 = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} \cos n\varphi$$

Под  $P_1$  подразумевается любая из величин  $\psi$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\kappa_{15}$ ,  $E_1$ ,  $D_1$ ,  $G_1$ , а под  $P_2$  — любая из величин  $S_{12}$ ,  $v$ ,  $\omega$ ,  $E_2$ ,  $D_2$ ,  $N_1$ ;  $P_{1n}$  и  $P_{2n}$  — функции переменной  $\xi$ .

В формулах (1.1)—(1.13)  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — перемещения точек срединной поверхности вдоль координатных линий  $\xi$ ,  $\varphi$  и в направлении нормали соответственно,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{21}$  — усилия,  $G_1$ ,  $G_2$  — изгибающие моменты,  $N_1$ ,  $N_2$  — перерезывающие усилия,  $\psi$  — электрический потенциал,  $D_1$ ,  $D_2$  — компоненты вектора электрической индукции,  $E_1$ ,  $E_2$  — компоненты вектора напряженности электрического поля. Для физических постоянных используются распространенные обозначения [2], исключение представляют некоторые величины, введенные в [1] и задаваемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} n_{11} &= s_{33}^E/\delta, \quad n_{22} = s_{11}^E/\delta, \quad n_{12} = n_{21} = -s_{13}^E/\delta \\ c_1 &= (d_{31}s_{33}^E - d_{33}s_{13}^E)/\delta, \quad c_2 = (d_{33}s_{11}^E - d_{31}s_{13}^E)/\delta \\ \delta &= s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2, \quad \nu_i = n_{12}/n_{ii}, \quad \sigma = n_{11}/n_{22}, \quad c_{12} = c_1/c_2 \end{aligned}$$

Для удобства расчета в формулах (1.1)—(1.12) введены безразмерные искомые величины, связанные с размерными искомыми величинами со звездочкой внизу следующим образом:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} u &= \frac{u_*}{R}, \quad v = \frac{v_*}{R}, \quad w = \frac{w_*}{R}, \quad T_i = \frac{T_{i*}}{2hn_{22}} \\ n_{22}\psi &= c_2\psi_*, \quad D_i = \frac{D_{i*}}{d_{31}n_{22}}, \quad \varepsilon^2 N_i = \frac{N_{i*}}{2hn_{22}} \\ \varepsilon^2 G_i &= \frac{G_{i*}}{2hRn_{22}}, \quad S_{12} = \frac{S_{12*}}{2hn_{22}}, \quad \lambda = \frac{\rho\omega^2 R^2}{n_{22}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{h^3}{3R^2} \end{aligned}$$

где  $\rho$  — плотность пьезокерамики,  $h$  — полутолщина оболочки,  $R$  — ее радиус.

Будем считать, что края оболочки покрыты электродами, на которых задан электрический потенциал, изменяющийся по временной переменной по гармоническому закону и порождающий вынужденные колебания оболочки.

Одной из важнейших характеристик работы пьезокерамических элементов является коэффициент электромеханической связи (КЭМС). Он характеризует отношение способной к обращению запасенной в объеме тела электрической (механической) энергии ко всей подведенной извне к пьезокерамическому телу механической (электрической) энергии [3]. Существует несколько способов вычисления КЭМС. Один из них, предложенный Мэзоном [2], заключается в определении КЭМС  $k$  по формуле

$$(1.16) \quad k^2 = U_m^2/(U_e U_d)$$

Для рассматриваемой задачи взаимная энергия  $U_m$ , упругая энергия  $U_e$  и электрическая энергия  $U_d$  определяются по следующим формулам:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} U_m &= \int_S (d_{31}T_{2*}E_{1*} + d_{33}T_{1*}E_{1*} + d_{15}S_{12*}E_{2*}) ds \\ U_e &= \int_S (s_{11}^E T_{2*}^2 + 2s_{12}^E T_{1*}T_{2*} + s_{33}^E T_{1*}^2 + s_{44}^E S_{12*}^2) ds \\ U_d &= \int_S (\varepsilon_{11}^T E_{2*}^2 + \varepsilon_{33}^T E_{1*}^2) ds \end{aligned}$$

Здесь интегрирование ведется по срединной поверхности оболочки  $S$ . Формулы Мэсона для энергий даны в трехмерной записи. Формулы (1.17) получены в результате интегрирования трехмерных подынтегральных выражений по толщинной координате, отбрасывания малых в теории оболочек слагаемых. Кроме того, отброшены моменты, так как в рассматриваемой задаче они малы.

Динамический КЭМС вводится формулой

$$(1.18) \quad k_d^2 = (\omega_a^2 - \omega_r^2) / \omega_a^2$$

где  $\omega_r$  — частота резонанса,  $\omega_a$  — частота антирезонанса.

Другая энергетическая формула КЭМС была предложена А. Ф. Улитко [3]

$$(1.19) \quad k_u^2 = (U^{(p)} - U^{(k)}) / U^{(p)}$$

$$U^{(p)} = \int_s \sum_{i=1}^2 \left( \varepsilon_{i*} T_{i*} + \frac{1}{2} \omega_* S_{ij} + E_{i*} D_{i*} \right) dS \quad (j \neq i = 1, 2)$$

где  $U^{(p)}$  — внутренняя энергия, найденная для электроупругого тела с разомкнутыми электродами,  $U^{(k)}$  — внутренняя энергия того же тела с коротко замкнутыми электродами. Формулу для  $U^{(k)}$  можно получить, заменив в последнем соотношении (1.19) верхний индекс  $(p)$  на  $(k)$ . Здесь в формулах для  $U^{(p)}$  и  $U^{(k)}$ , так же как в (1.17), выполнен переход к терминам теории оболочек.

Вычисление  $k_u^2$  выполняется следующим образом [3]. Сначала из решения исходной задачи определяются деформации. Затем, чтобы вычислить  $U^{(p)}$  и  $U^{(k)}$ , следует решить две вспомогательные задачи, заключающиеся в интегрировании дифференциального уравнения второго порядка относительно электрического потенциала  $\psi$ . Это уравнение можно получить, подставив в (1.9) соотношения (1.7), (1.8), (1.10). При этом следует считать, что деформации известны из решения исходной задачи. Произволы интегрирования для  $\psi^{(p)}$  определяются из интегрального условия на поверхности каждого разомкнутого электрода

$$\int_{S_e} D_1^{(p)} dS_e = 0$$

( $S_e$  — поверхность электрода), а для  $\psi^{(k)}$  — из следующих электрических условий на коротко замкнутых электродах:

$$\psi^{(k)} |_{\xi=\pm l} = 0$$

где  $2lR$  — длина оболочки.

После того как найдены  $\psi^{(p)}$  и  $\psi^{(k)}$ , вычисление  $U^{(p)}$  и  $U^{(k)}$  не представляет затруднений.

2. Пусть края оболочки покрыты сплошными электродами, на которых заданы значения электрического потенциала

$$(2.1) \quad \psi |_{\xi=\pm l} = \pm 1$$

Рассматриваемая задача осесимметрична. Она описывается уравнениями (1.1), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11), (1.13), в которых надо положить  $n = 0$ , кроме того, для краткости, отбросим нижний индекс  $n$  у искомых величин. После преобразований запишем систему уравнений в виде трех уравнений относительно известных  $u$ ,  $w$ ,  $\psi$ :

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^3 L_{ji} u_i = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$L_{11} = \frac{d^2}{d\xi^2} + \lambda, \quad L_{12} = -q\nu_2 \frac{d}{d\xi}, \quad L_{13} = \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad L_{21} = \sigma\nu_1 \frac{d}{d\xi}$$

$$L_{22} = - \left[ \varepsilon^2 \frac{d^4}{d\xi^4} - (\lambda - q\sigma) \right], \quad L_{23} = c_{12} \frac{d}{d\xi}, \quad L_{31} = a_1 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$L_{32} = - a_2 q \frac{d}{d\xi}, \quad L_{33} = a_3 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

$$a_1 = \sigma v_1 + \frac{d_{33}}{d_{31}}, \quad a_2 = \left( \sigma + v_2 \frac{d_{33}}{d_{31}} \right), \quad a_3 = - \frac{\varepsilon_{33}^T}{d_{31} c_1} + c_{12} + \frac{d_{33}}{d_{31}}$$

В формуле (2.2) приняты обозначения

$$(2.3) \quad u_1 = u, \quad u_2 = w, \quad u_3 = \psi$$

Введем новую неизвестную функцию  $\Phi$ , которую определим из уравнения

$$(2.4) \quad D\Phi = 0, \quad D = |L_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Искомые величины  $u_i$  выражаются через  $\Phi$  следующим образом:

$$(2.5) \quad u_i = D_{3i}\Phi$$

где  $D_{3i}$  — алгебраическое дополнение элемента  $L_{3i}$ .

Исследуем электроупругое состояние оболочки в зависимости от частотного параметра  $\lambda$ . Асимптотический анализ уравнений вынужденных колебаний, выполненный по схеме [1], выявил такую классификацию динамических задач, в которой каждому типу колебаний соответствует своя приближенная система уравнений. Не останавливаясь на выкладках, которые подобны проделанным в [1], опишем упрощенные задачи.

Для этого разобьем весь интервал изменения частотного параметра  $\lambda$  на следующие четыре участка: 1)  $0 < \lambda < \lambda_0$ , 2)  $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ , 3)  $\lambda_0 \ll \ll \lambda < \lambda_1$ , 4)  $\lambda > \lambda_1$ . Значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  будут определены ниже.

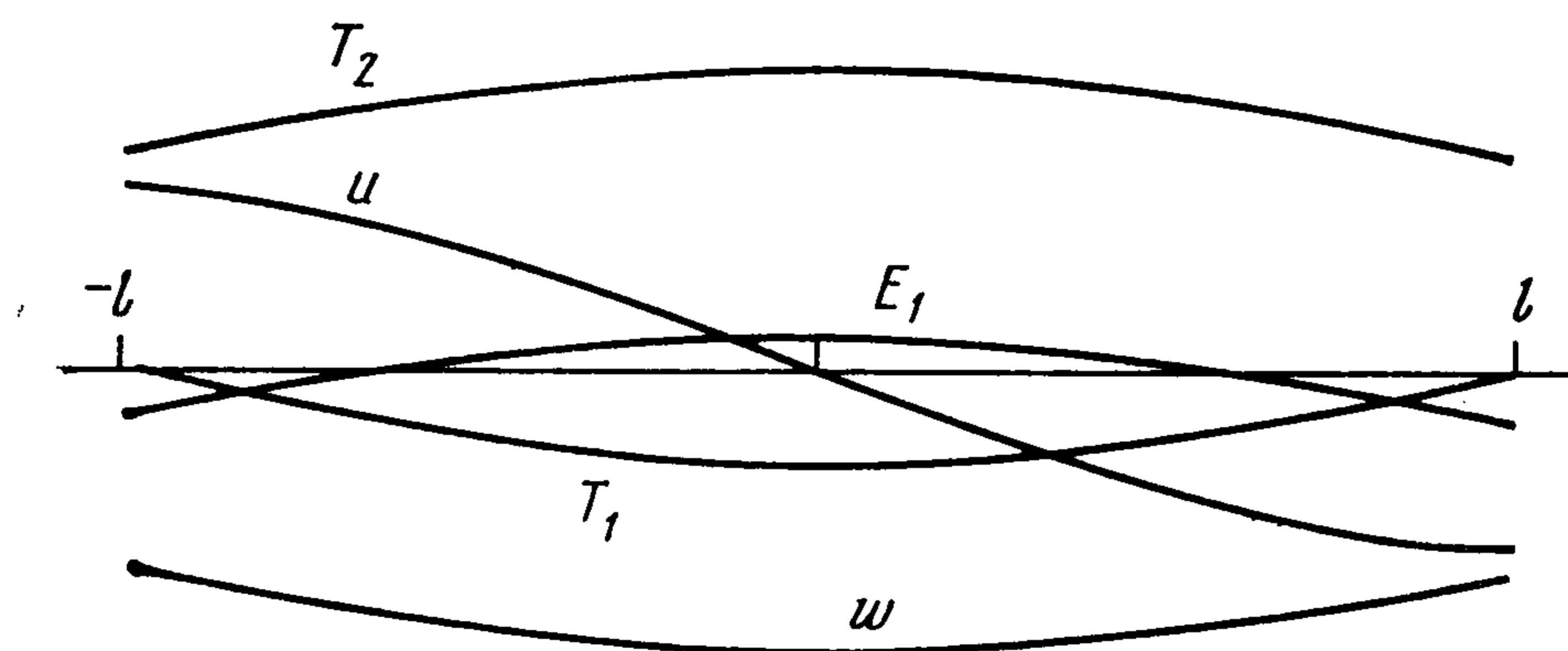
На первом участке полная задача расчленяется на безмоментную главную задачу (ГЗ) и простой краевой эффект. Чтобы получить уравнения ГЗ, надо в (1.1), (1.11) положить  $q = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ . Приравнение  $\varepsilon$  нулю означает отбрасывание моментных членов. На втором участке полная задача не расчленяется на более простые, так как при  $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$  решение дополнительной задачи (ДЗ) перестает быть быстро изменяющимся в направлении образующей. Число  $\lambda_0$  определяется из условия равенства нулю коэффициента при  $w g_2^4$  в разрешающем уравнении ДЗ, приведенном в [1]

$$\lambda_0 = \frac{\sigma (1 - v_1 v_2) \varepsilon_{33}^T}{\varepsilon_{33}^T + d_{31} (v_2 c_2 - c_1)}$$

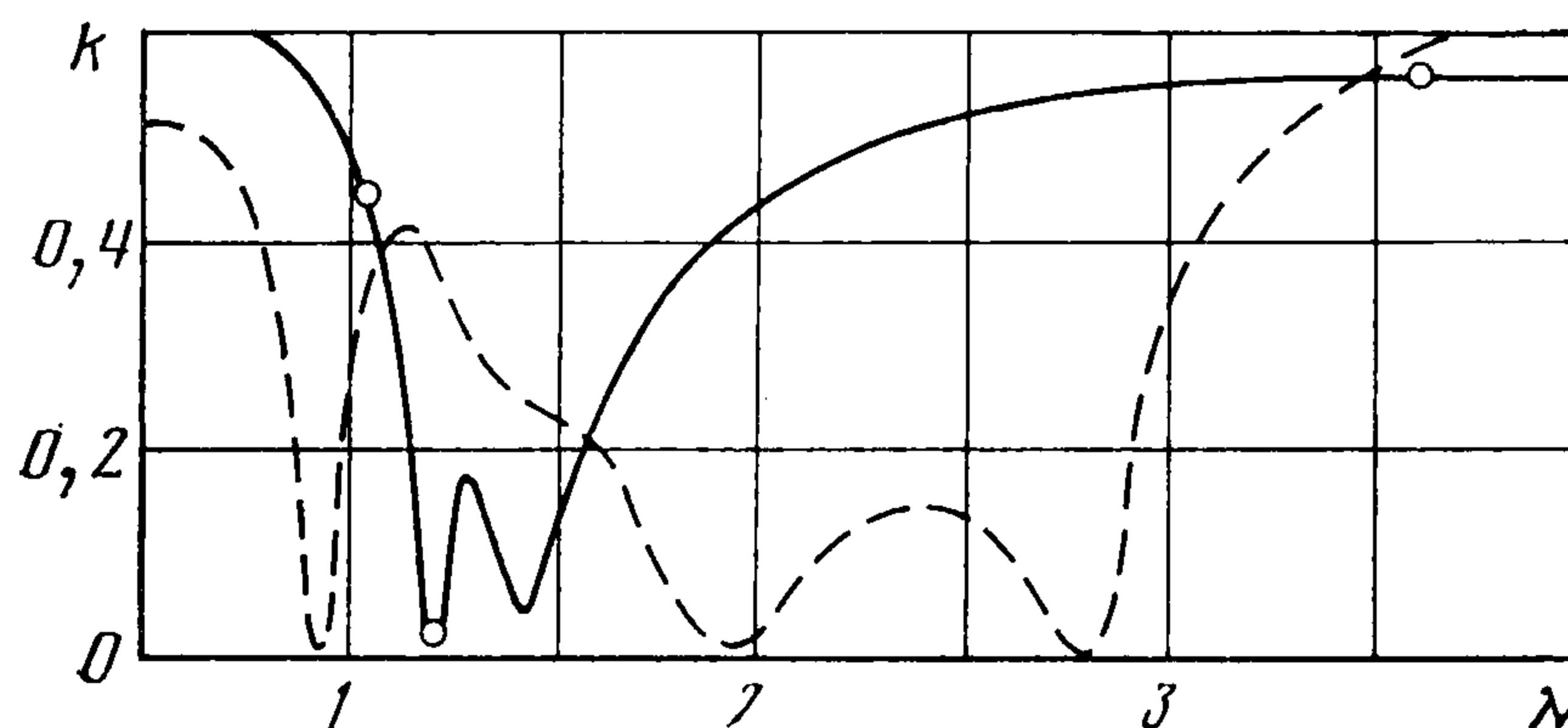
В этом случае следует пользоваться моментной теорией оболочек, полагая  $q$  равным единице и  $\varepsilon$  отличным от нуля.

На третьем участке изменения частотного параметра  $\lambda$  полная задача расчленяется на безмоментную ГЗ и ДЗ, причем решение ДЗ будет осциллирующим без затухания, так как для значений  $\lambda_1 > \lambda \gg \lambda_0$  в разрешающем уравнении ДЗ величина  $g_2^4$  отрицательна. Чтобы получить уравнения безмоментной ГЗ, надо в (1.1), (1.11) положить  $\varepsilon = 0$ ,  $q = 1$ .

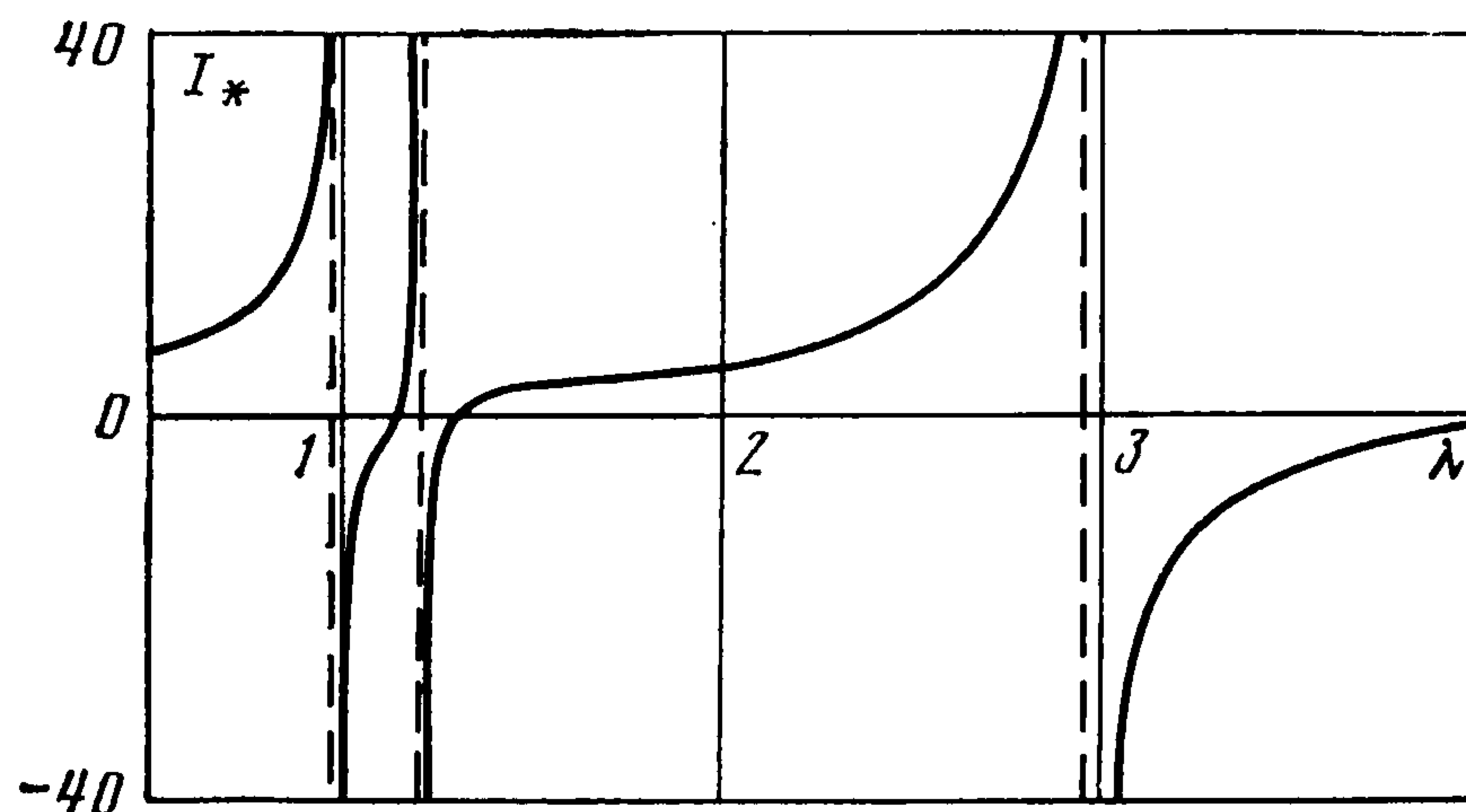
Для значений  $\lambda > \lambda_1$ , где  $\lambda_1 \gg 1$  (четвертый участок), оболочка совершает квазитангенциальные колебания, при которых наибольшие значения  $w$  в  $\lambda$  раз меньше наибольших значений  $u$ . Поэтому полная задача допускает расчленение на ГЗ, описывающую квазитангенциальные колебания, и ДЗ, решение которой является осциллирующим с показателем изменчивости  $(1 + s)/2$ , где  $s$  — показатель изменчивости решения ГЗ, уравнения которой получаются из (1.1), (1.11) при  $\varepsilon = 0$ ,  $q = 0$ . Здесь приравнение  $q$  нулю означает отбрасывание  $w$  по сравнению с  $u$ .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Будем выполнять расчет, пользуясь приближенными уравнениями, в соответствии с изложенным выше. Такое расчленение электроупругого состояния для каждого типа колебаний существенно упростит расчет.

В тех случаях, когда полная задача допускает расчленение на ГЗ и ДЗ, ограничимся решением ГЗ, так как наибольшие искомые величины электроупругого состояния (напряжения, перемещения, электрический потенциал), описываемого вблизи края уравнениями ДЗ, в рассматриваемой задаче в  $R/h$  раз меньше соответствующих наибольших значений величин ГЗ.

Расчет выполнялся для оболочки из материала PZT-4 [2].

На фиг. 1 для оболочки длиной  $2R$  изображены амплитудные значения искомых величин первого резонанса в зависимости от продольной координаты (края оболочки свободны от механических закреплений).

На фиг. 2 изображена зависимость различных коэффициентов электромеханической связи от частотного параметра  $\lambda$ : штриховой линией обозначена кривая  $k$  (1.16), сплошной —  $k_u$  (1.19), кружками обозначены значения  $k_d$  (1.18). Так как  $k_d$  характеризует значения КЭМС внутри интервала  $[\lambda_r, \lambda_a]$ , то на фиг. 2 кружок становится в середине интервала (считаем, что  $k_d$  — среднее арифметическое значений КЭМС при  $\lambda_r$  и  $\lambda_a$ ). Как видно из фиг. 2, все значения  $k_d$  лежат на кривой  $k_u$ . Подсчет КЭМС по формулам (1.16) дает качественно другие результаты, а так как  $k_d$  — проверенная экспериментально характеристика, широко используемая в инженерной практике, то полу-

ченное совпадение подтверждает правильность введенной А. Ф. Улитко энергетической формулы.

На фиг. 3 приведена зависимость тока  $I = I_* \omega S_e d_{31} n_{22}$  от частотного параметра  $\lambda$ . По вычисленным значениям тока определялся КЭМС  $k_d$  (частоты резонанса и антирезонанса соответствуют бесконечному и нулевому значениям тока соответственно).

Результаты счета показывают, что КЭМС принимает наибольшие значения для квазитангенциальных колебаний, причем с увеличением длины оболочки он уменьшается. Значения КЭМС, соответствующие второму участку изменения частотного параметра  $\lambda$ , близки к нулю.

3. Пусть края оболочки покрыты разрезными электродами, на каждом из которых задано значение электрического потенциала. Разложим электрическую нагрузку в ряд Фурье по координате  $\varphi$ :

$$(3.1) \quad \psi|_{\xi=\pm l} = \pm \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin n\varphi$$

где  $t_n$  — постоянные.

В качестве исходной системы уравнений возьмем безмоментную систему уравнений (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.7)—(1.12), полагая  $\varepsilon = 0$ . Это означает, что из рассмотрения исключены колебания, для описания которых следует пользоваться моментными уравнениями теории пьезо-керамических оболочек. Для такого исключения есть основания: как показано на примере осесимметричной задачи значениям частотного параметра  $\lambda$ , для которых полная задача не расчленяется на ГЗ и ДЗ, соответствуют близкие к нулю значения КЭМС.

Действие электрической нагрузки на торцах оболочки подобно действию продольной нагрузки, приложенной к краю оболочки. Значениям частотного параметра  $\lambda$ , соизмеримым с единицей, соответствуют квазипоперечные колебания с малой изменяемостью, значениям  $\lambda \gg 1$  — квазитангенциальные колебания.

Квазипоперечные колебания с малой изменяемостью описываются безмоментной системой уравнений, в которой следует считать  $q$  равным единице. В уравнениях квазитангенциальных колебаний следует положить  $q$  равным нулю, что соответствует отбрасыванию малых прогибов  $w$  по сравнению с перемещениями  $u$  и  $v$ . Система уравнений, разрешенная относительно  $u_n, v_n, \psi_n$ , записывается в виде (2.2), а формулы (2.3) надо заменить формулами

$$(3.2) \quad u_1 = u_n, \quad u_2 = v_n, \quad u_3 = \psi_n$$

Для элементов  $L_{ij}$  имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} L_{11} &= b_1 \frac{d^2}{d\xi^2} + b_2, & L_{12} &= b_3 \frac{d}{d\xi}, & L_{13} &= b_4 \frac{d^2}{d\xi^2} + b_5 \\ L_{21} &= e_1 \frac{d}{d\xi}, & L_{22} &= e_2 \frac{d^2}{d\xi^2} + e_3, & L_{23} &= e_4 \frac{d}{d\xi} \\ L_{31} &= d_1 \frac{d^2}{d\xi^2} + d_2, & L_{32} &= d_3 \frac{d}{d\xi}, & L_{33} &= e_4 \frac{d}{d\xi} \\ b_1 &= 1 - \frac{q}{q\sigma - \lambda} \sigma v_1 v_2, & b_2 &= \lambda - \frac{n^2}{s_{44} E n_{22}}, \\ b_3 &= n \left( \frac{q\sigma v_2}{\sigma q - \lambda} - v_2 - \frac{1}{s_{44} E n_{22}} \right) \\ b_4 &= 1 - \frac{q v_2 c_{12}}{\sigma q - \lambda}, & b_5 &= - \frac{n^2 d_{15}}{s_{44} E c_2}, & a &= 1 - \frac{q\sigma}{q\sigma - \lambda} \\ e_1 &= n \left[ \frac{1}{s_{44} E n_{22}} + \sigma v_1 a \right], & e_2 &= \frac{1}{s_{44} E n_{22}}, & e_3 &= \lambda - n^2 \sigma a \end{aligned}$$

$$e_4 = n \left[ \frac{d_{15}}{s_{44} E c_2} + c_{12} a \right], \quad d_1 = \sigma v_1 \frac{d_{31}}{\epsilon_{33} T} a + \frac{d_{33}}{\epsilon_{33} T} b_1$$

$$d_2 = -n^2 \frac{d_{15}}{\epsilon_{33} T s_{44} E n_{22}}, \quad d_3 = -n \left[ \left( \sigma \frac{d_{31}}{\epsilon_{33} T} + v_2 \frac{d_{33}}{\epsilon_{33} T} \right) a + \right. \\ \left. + \frac{d_{15}}{s_{44} E \epsilon_{33} T n_{22}} \right]$$

$$d_4 = \left[ -\frac{1}{c_2} + \frac{d_{31} c_{12}}{\epsilon_{33} T} a + \frac{d_{33}}{\epsilon_{33} T} b_4 \right], \quad d_5 = \frac{n^2}{c_2 \epsilon_{33} T} \left( \epsilon_{11} T - \frac{d_{15}^2}{s_{44} E} \right)$$

Искомые величины  $u_i$  выражаются через вспомогательную функцию  $\Phi$  формулами (2.4), (2.5).

На краях оболочки для  $n$ -го члена разложения электрического потенциала  $\psi$  должны выполняться условия (3.1):

$$(3.3) \quad \psi_n |_{\xi=\pm l} = \pm t_n$$

Для определенности рассмотрим случай, когда на каждом торце имеется по два электрода, на которых заданы следующие значения электрического потенциала:

$$(3.4) \quad \psi(\varphi) |_{\xi=\pm 1} = \begin{cases} \pm 1, & 0 < \varphi < \pi \\ \mp 1, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Будем считать, что края оболочки не закреплены

$$(3.5) \quad T_1 = 0, \quad S_{21} = 0 \quad (\xi = \pm l)$$

Для оболочки с граничными условиями (3.4), (3.5) вычислены первые собственные частоты и КЭМС по формулам (1.16), (1.18), (1.19) в зависимости от длины оболочки.

Результаты счета сведены в таблицу. Ее первый столбец — значения отношения длины оболочки к радиусу, второй столбец — частота резонанса, третий — частота антирезонанса, в следующих столбцах записаны увеличенные в  $10^3$  раз значения КЭМС, вычисленные по различным формулам. Индексы  $(r)$  и  $(a)$  означают, что значения КЭМС  $k^{(r)}$ ,  $k^{(a)}$  найдены при частоте резонанса или антирезонанса соответственно. Как и в случае осесимметричной задачи, значения  $k_d$  хорошо совпадают со среднеарифметическим значением  $k_u$  на интервале  $[\lambda_r, \lambda_a]$  (совпадение еще более близкое со среднеинтегральным значением  $k_u$ ).

$l$	$\lambda_r$	$\lambda_a$	$k_d \cdot 10^3$	$k_u^{(r)} \cdot 10^3$	$k_u^{(a)} \cdot 10^3$	$k^{(r)} \cdot 10^3$	$k^{(a)} \cdot 10^3$
0,5	2,07	2,24	282	370	206	60	275
	7,00	7,04	71	118	72	267	282
	9,86	10,80	310	401	200	268	359
	12,34	12,44	86	106	69	422	424
0,75	1,91	2,10	300	394	218	110	305
	4,63	4,76	166	238	108	278	319
	5,17	5,27	135	163	106	420	431
	7,87	8,88	336	402	270	154	399
1	1,64	1,82	312	410	232	265	388
	3,13	3,19	42	78	56	264	271
	4,48	4,53	110	168	60	471	475
	5,33	5,93	317	377	263	128	382
1,25	1,37	1,52	325	398	258	283	426
	2,68	2,70	86	89	74	229	230
	4,07	4,20	171	341	50	111	428
	4,26	4,53	250	265	235	502	453

Итак, выполнен расчет цилиндрической оболочки, поляризованной в продольном направлении, с электродированными краями. Показано, что при расчете следует пользоваться либо безмоментными уравнениями, либо, при достаточно больших значениях частоты, — уравнениями квазитангенциальных колебаний. Результаты расчета позволяют сделать вывод, что КЭМС достигает наибольших значений для оболочек со свободными от закреплений краями, совершающих колебания, при которых наибольшие перемещения оболочка совершает в направлении поляризации. Кроме того, результаты расчета подтверждают эффективность предложенного А. Ф. Улитко способа вычисления КЭМС на любых частотах колебаний оболочки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачева Н. Н.* Классификация свободных колебаний пьезокерамических оболочек // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 147—154.
2. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. М.: Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204—326.
3. *Улитко А. Ф.* Об определении коэффициентов электромеханической связи в задачах установившихся колебаний пьезокерамических тел // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 7. С. 77—81.

Москва

Поступила в редакцию  
13.XI.1987

