УДК 539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Ворович И. И., Лебедев Л. П.

Получено доказательство теоремы существования решения задачи равновесия пологих оболочек при самых общих условиях закрепления края. Достаточно, например, чтобы условия закрепления гарантировали бы отсутствие перемещения оболочки как жесткого целого. Однако при этом приходится ввести некоторые ограничения на величину тангенциальных внешних сил.

Строгое математическое обоснование разрешимости задачи равновесия в нелинейной теории пологих оболочек и сходимости различных приближенных методов ее решения известно при весьма широких предположениях относительно геометрии оболочки, величины нагрузок и краевых условий [1, 2]. Основным моментом доказательства соответствующей теоремы является либо получение априорной оценки решения, либо получение оценки функционала полной энергии оболочки. Имеющиеся в настоящее время пробелы в математической теории краевых задач для уравнений в перемещениях пологих оболочек связаны с тем, что развитый в [1, 2] способ получения оценки требует, чтобы тангенциальные перемещения срединной поверхности оболочки u, v были заданы на «существенной» части границы (в частности, для выпуклой области — на всей границе).

1. Чтобы не усложнять деталями основную идею доказательства, рассмотрим простейший и наиболее распространенный вариант нелинейной теории изотропных однородных пологих оболочек постоянной толщины $2h$ в перемещениях, в котором геометрия срединной поверхности оболочки отождествляется с плоской [3]. Уравнения равновесия имеют вид

$$D\nabla^4 w + N_1(k_1 - w_{xx}) + N_2(k_2 - w_{yy}) - 2N_{12}w_{xy} - F_3 = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla^2 u + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_y + v_x)_x + \frac{2}{1-\mu}((k_1 w)_x + w_x w_{xx} +$$
$$+ \mu(k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}) + w_y w_{xy} + w_x w_{yy} + F_1 = 0$$

$$\nabla^2 v + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_y + v_x)_y + \frac{2}{1-\mu}((k_2 w)_y + w_y w_{yy} +$$
$$+ \mu(k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}) + w_x w_{xy} + w_y w_{xx} + F_2 = 0$$

$$N_1 = Eh(1-\mu^2)^{-1}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad N_2 = Eh(1-\mu^2)^{-1}(\varepsilon_2 +$$
$$+ \mu\varepsilon_1)$$

$$N_{12} = {}^1/_2 Eh(1+\mu)^{-1}\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_1 = u_x + k_1 w + {}^1/_2 w_x^2$$

$$\varepsilon_2 = v_y + k_2 w + {}^1/_2 w_y^2, \quad \varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x w_y$$

Здесь w — нормальные перемещения срединной поверхности оболочки, u, v — главные кривизны, E, μ — упругие постоянные, F_i — внешние нагрузки.

Пусть оболочка в плане занимает область Q с кусочно-гладкой границей ∂Q, такой, что для функций, определенных на Q, выполняются теоремы вложения Соболева [4].

Укажем минимально необходимые условия закрепления оболочки, при которых будет получена основная теорема.

Пусть в трех точках (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ области Q, не лежащих на одной прямой, $w(x_i, y_i) = 0$. Кроме того, на части границы ∂Q_1, которая может и отсутствовать, $w\,|_{\partial Q_1} = 0$. Подпространство функций из $C^{(4)}(Q)$, удовлетворяющих этим условиям, обозначим $C_1^{(4)}$.

Для тангенциальных перемещений u, v минимально необходимыми будут такие краевые условия, чтобы при них выполнялось неравенство Корна для плоской задачи теории упругости [5, 6]:

$$\int (u^2 + v^2 + u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant m \int (u_x^2 + v_y^2 + (u_y + v_x)^2)\,dx\,dy$$

(здесь и далее область интегрирования Q не указывается).

Достаточные для этого условия указаны в [5, 6]. В частности, неравенство Корна имеет место, если на какой-либо части границы ненулевой длины ∂Q_2

$$u, v\,|_{\partial Q_2} = 0 \tag{1.2}$$

Будем для определенности считать выполненным это условие.

Множество вектор-функций $\mathbf{u}^*(u, v)$, каждая из компонент которых лежит в $C^{(2)}(Q)$, удовлетворяющих условию (1.2), назовем $C_1^{(2)}$.

Остальные, не указанные здесь краевые условия будем считать естественными, т. е. получающимися непосредственно из вариационной постановки задачи. Поскольку они хорошо известны, то выписывать их не будем. Какие-либо дополнительные закрепления границы, конечно, возможны. На ход доказательства они не влияют.

2. Введем энергетические пространства. Пусть H_1 — подпространство $W_2^{(1)}(Q) \times W_2^{(1)}(Q)$, полученное замыканием в нем множества $C_1^{(2)}$. Неравенство Корна гарантирует, что на H_1 имеется эквивалентная норма

$$\|\mathbf{u}\|_{H_1}^2 = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int (e_1^2 + e_2^2 + 2\mu e_1 e_2 + {}^1/_2 (1-\mu) e_{12}^2)\,dx\,dy$$
$$(e_1 = u_x,\ e_2 = v_y,\ e_{12} = u_y + v_x)$$

Пространство H_2 есть подпространство $W_2^{(2)}(Q)$, полученное замыканием в нем множества функций $C_1^{(4)}$. На пространстве определена эквивалентная норма [7]

$$\|w\|_{H_2}^2 = {}^1/_2\, D \int ((\nabla^2 w)^2 + 2(1-\mu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2))\,dx\,dy$$

Нормы в пространствах H_i индуцируют скалярные произведения, которые будем обозначать $(a, b)_{H_i}$. Пространство $H_1 \times H_2$ обозначим H. Вариацию функции f будем обозначать δf.

Назовем обобщенным решением задачи равновесия пологой оболочки вектор-функцию $\mathbf{u} \in H$, удовлетворяющую интегродифференциальному уравнению

$$\int (M_1 \delta\varkappa_1 + M_2 \delta\varkappa_2 + 2M_{12}\delta\chi + N_1 \delta\varepsilon_1 + N_2 \delta\varepsilon_2 + 2N_{12}\delta\varepsilon_{12})\,dx\,dy = \tag{2.1}$$
$$= \int (F_1 \delta u + F_2 \delta v + F_3 \delta w)\,dx\,dy + \int_{\partial Q} (f_1 \delta u + f_2 \delta v + f_3 \delta w)\,ds$$

$$M_1 = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2),\quad M_2 = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1),\quad M_{12} = D(1 - {}$$
$${}-\mu)\chi$$
$$\varkappa_1 = -w_{xx},\quad \varkappa_2 = -w_{yy},\quad \chi = -w_{xy}$$

где вектор-функция $\delta\mathbf{u} = (\delta u, \delta v, \delta w)$ и произвольна, f_i — внешние нагрузки, приложенные по торцам оболочки.

Отметим, что на части границы, где какая-либо из компонент δu, δv, δw равна нулю, задание соответствующей нагрузки f_i не требуется. Но выделять в записи линейного интеграла эти части не будем, поскольку соответствующая часть интеграла равна нулю, если доопределить f_i, например нулем.

Для корректности определения обобщенного решения достаточно, чтобы правая часть (2.1) была по $\delta\mathbf{u}$ непрерывным функционалом в H. Для этого в свою очередь достаточно, чтобы

$$f_i \in L_p(\partial Q), \quad F_i \in L_p(Q), \quad i = 1, 2, \quad p > 1, \quad \text{а } f_3, F_3$$

были конечными суммами δ-функций и функций из L_1 на ∂Q и Q соответственно. Такой класс нагрузок обозначим H^*.

Для существования обобщенного решения принадлежность нагрузки классу H^* является необходимой. Классическое решение задачи, в случае его существования, будет и обобщенным решением в указанном выше смысле. Обратное в общем случае неверно.

В основу доказательства теоремы о разрешимости положен факт, что стационарные точки функционала полной энергии оболочки

$$I(\mathbf{u}) = \| w \|_{H_2}^2 + {}^1/_2 \int (N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + 2N_{12}\varepsilon_{12})\, dx\, dy -$$
$$- \int (F_1u + F_2v + F_3w)\, dx\, dy - \int_{\partial Q} (f_1u + f_2v + f_3w)\, ds$$

— обобщенные решения задачи равновесия оболочки.

3. Структура и основные свойства функционала I при рассматриваемых краевых условиях остаются теми же, что и при краевых условиях задачи из [1, 2]. Поэтому для доказательства теоремы существования достаточно доказать, что

(3.1) $\qquad I(\mathbf{u}) \to \infty, \quad \text{если } \|\mathbf{u}\|_H \to \infty$

Докажем эту оценку.

Для сокращения записи введем, воспользовавшись теоремой Рисса о непрерывном линейном функционале в гильбертовом пространстве и свойствами внешней нагрузки, элемент $\mathbf{g} \in H$ соотношением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{u})_H = \int (F_1u + F_2v + F_3w)\, dxdy + \int_{\partial Q} (f_1u + f_2v + f_3w) ds$$

(нагрузка принадлежит классу H^*).

Тогда функционал I принимает вид

$$I(\mathbf{u}) = \| w \|_{H_2}^2 + {}^1/_2 \int (N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + 2N_{12}\varepsilon_{12})\, dx\, dy - (\mathbf{g}, \mathbf{u})_H$$

Функционал I, как и в [2], будем далее рассматривать на «эллипсоиде» $T(R)$ пространства H, полученном путем деформации единичной сферы S пространства H с центром в нуле следующим образом. Элементу (u, v, w), лежащему на сфере S, соответствует на эллипсоиде $T(R)$ элемент (cR^2u, cR^2v, Rw), где $c > 0$ — некоторое число, которое будет фиксировано позже. При больших R он заключен внутри сферы радиуса cR^2 и содержит внутри себя шар пространства H радиуса R с центром в нуле. Поэтому для доказательства (3.1) достаточно показать, что

$$I(\mathbf{u}) \to \infty, \quad \mathbf{u} \in T(R) \quad R \to \infty$$

Отметим, что с механической точки зрения, рассмотрение функционала энергии I на $T(R)$ приводит к увеличению относительной доли в энергии той ее части, которая образуется за счет тангенциальных перемещений.

Разобьем единичную сферу S пространства H на две части: S_1 и S_2. Пусть на S_1 выполняется неравенство

(3.2) $$\| \mathbf{u}^* \|_{H^1} \geqslant 1/_2, \quad \mathbf{u}^* = (u, v)$$

Рассмотрим положительную форму

(3.3) $$\int (N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + 2N_{12}\varepsilon_{12})\, dxdy$$

При отображении на эллипсоид $T(R)$ она однородна по R. Степень ее однородности 4, в то время как у остальных членов степень однородности не выше двух.

На $S_1 \| w \|_{H_2}{}^2 \leqslant 1/_2$. В силу теорем вложения Соболева [4] здесь

$$\int (w_x{}^4 + w_y{}^4)\, dxdy \leqslant m = \mathrm{const}$$

Поскольку подынтегральная форма в (3.3) положительно определенная по компонентам ε, в силу (3.2), на S_1 всегда можно подобрать постоянную $c > 0$ так, чтобы

$$\int (N_{1c}\varepsilon_{1c} + N_{2c}\varepsilon_{2c} + 2N_{12c}\varepsilon_{12c})\, dxdy \geqslant 1$$

где индекс c означает, что вместо u, v в соответствующие выражения подставлены cu, cv. Зафиксируем такое c. В этом случае на образе S_1 в $T(R)$ выполнено неравенство

$$\int (N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + 2N_{12}\varepsilon_{12})\, dxdy \geqslant R^4 \quad \text{на} \quad T_1(R)$$

А тем самым на $T_1(R)$ при больших R

(3.4) $$I(\mathbf{u}) \geqslant 1/_2 R^4$$

Рассмотрим $I(\mathbf{u})$ на $S_2 = S/S_1$. Имеют место неравенства

$$I(\mathbf{u}) \geqslant \| w \|_{H_2}^2 - (\mathbf{g}, \mathbf{u})_H \geqslant \| w \|_{H_2}^2 - (\mathbf{g}^*, \mathbf{u}^*)_{H_1} - \| g_3 \| \, \| w \|_{H_2}$$

$$(\mathbf{g}^*, \mathbf{u}^*)_{H_1} = \int (F_1 u + F_2 v)\, dx\, dy + \int_{\partial Q} (f_1 u + f_2 v)\, ds$$

При подстановке $(u, v, w) \to (cu, cv, w)$

$$I_c(\mathbf{u}) \geqslant \| w \|_{H_2}^2 - c \| \mathbf{g}^* \|_{H_1} \| \mathbf{u}^* \|_{H_1} - \| g_3 \|_{H_2} \| w \|_{H_2}$$

Поэтому на $T_2(R)$ — образе S_2 в $T(R)$

$$I(\mathbf{u}) \geqslant 1/_2 R^2 (1 - c \| \mathbf{g}^* \|_{H_1}) - 1/_2 \| g_3 \|_{H_2} R$$

Если внешние тангенциальные нагрузки таковы, что

(3.5) $$c \| \mathbf{g}^* \|_{H_1} \leqslant 1/_2$$

то при достаточно больших R на $T_2(R)$ имеем $I(\mathbf{u}) \geqslant 1/_5 R^2$.

Вместе с оценкой (3.3) последнее неравенство завершает доказательство (3.1).

Как и в [1], отсюда вытекает основная теорема.

Теорема 1. Пусть тангенциальные нагрузки на оболочку достаточно малы, т. е. выполнено неравенство (3.5), а все нагрузки принадлежат классу H^*. В этом случае

а) существует по меньшей мере одно обобщенное решение задачи равновесия оболочки с конечной энергией;

б) минимизирующая функционал $I(\mathbf{u})$ последовательность $\mathbf{u}_n$ содержит сильно сходящуюся в H к обобщенному решению задачи подпоследовательность;

в) система уравнений приближенного решения задачи методом Ритца (а тем самым, и методом Бубнова — Галеркина) разрешима на каждом этапе и содержит сильно сходящуюся в H к обобщенному решению подпоследовательность.

Доказательство теоремы здесь приводить не будем, поскольку после доказательства соотношения (3.1) остальная часть доказательства переносится [1] дословно. Остальные результаты из [1] также переносятся на данный случай без каких-либо затруднений.

Замечание. Теорема 1 справедлива без каких-либо ограничений для оболочек, к которым приложены только нормальные нагрузки f_3, F_3.

4. Рассмотрим подробнее вопрос о величине внешних тангенциальных нагрузок. Их оценку, достаточную для разрешимости задачи, можно наиболее удобно получить в рамках такой постановки задачи, когда тангенциальные перемещения выражаются через w посредством уравнений (1.1). Тогда функционал I зависит только от w. В [1] показано, что и в этом случае стационарные точки функционала $I(w)$ дают обобщенные решения рассматриваемой задачи в указанной постановке. Там же показано, что решение $\mathbf{u}^* = (u, v)$ уравнений разбивается на сумму $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^*$, где нижний индекс равен степени однородности по переменной w при обобщенном решении системы (1.1). Наиболее важную роль при получении необходимой оценки играет часть $\mathbf{u}_2^* = (u_2, v_2)$, которая определяется уравнением

$$\int (N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + 2N_{12}\varepsilon_{12})\, dxdy = 0$$

Из этого уравнения можно получить оценки

$$(4.1)\qquad \int u_{2x}^2\, dx\, dy \leqslant \int w_x^4\, dx\, dy, \quad \int v_{2y}^2\, dx\, dy \leqslant \int w_y^4\, dx\, dy$$
$$\int (u_{2y} + v_{2x})^2\, dx\, dy \leqslant \int w_x^2 w_y^2\, dx\, dy$$

Для данного варианта решения задачи минимизации функционала энергии оценку частей функционала надо произвести на сфере $\| w \|_{H_2} = 1$ [1]. Для того, чтобы функционал $I(w)$ был растущий, достаточно показать, что на сфере $\| w \|_{H_2} = 1$ выполнялось неравенство

$$(4.2)\qquad \| w \|_{H_2}^2 - \int (F_1 u_2 + F_2 v_2)\, dx\, dy - \int_{\partial Q} (f_1 u_2 + f_2 v_2)\, ds \geqslant \alpha = \text{const} > 0$$

При учете неравенства Корна, а также (4.1) интегральные члены можно здесь оценить следующим образом:

$$A \equiv \left| \int (F_1 u_2 + F_2 v_2)\, dx\, dy + \int_{\partial Q} (f_1 u_2 + f_2 v_2)\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant m_1 (\| F_1 \|_{p,Q} + \| F_2 \|_{p,Q} + \| f_1 \|_{p,Q} +$$
$$+ \| f_2 \|_{p,Q}) \left(\int (u_{2x}^2 + v_{2y}^2 + 2(u_{2y} + v_{2x})^2)\, dx\, dy \right)^{1/2} \equiv$$
$$\equiv m_1 B \left(\int (u_{2x}^2 + v_{2y}^2 + 2(u_{2y} + v_{2x})^2)\, dx\, dy \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant m_1 B \left(\int (w_x^2 + w_y^2)^2\, dx\, dy \right)^{1/2}, \quad p > 1$$

где $\| g \|_{p,Q}$ — норма g в $L_p(Q)$.

В силу теорем вложения Соболева в $W_2^{(2)}(Q)$

$$\left(\int (w_x^2 + w_y^2)^2\, dx\, dy \right)^{1/2} \leqslant m_2 \int ((\nabla^2 w)^2 +$$
$$+ 2(1 - \mu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2))\, dx\, dy$$

Поэтому

$$A \leqslant 2m_1m_2B \| w \|_{H_2}^2/D$$

Окончательно из (4.2) имеем

$$\| F_1 \|_{p,Q} + \| F_2 \|_{p,Q} + \| f_1 \|_{p,Q} + \| f_2 \|_{p,Q} \leqslant D(1-\alpha)/(2m_1m_2)$$

Отметим, что при подобном изменении области Q (вместе с областью задания граничных условий) с коэффициентом подобия l постоянные m_i зависят от l следующим образом:

$$m_1 = m_1^\circ l, \quad m_2 = m_2^\circ l^2$$

Все результаты, полученные выше, остаются справедливыми и для варианта нелинейной теории пологих оболочек, рассмотренного в [2], в том числе и для краевых условий, включающих условия упругого опирания оболочки.

5. Сделаем еще одно замечание. Оценка функционала полной энергии не гарантирует априорной оценки всех обобщенных решений задачи. Можно указать дополнительные достаточные условия, обеспечивающие такую ограниченность. Это ограничение сверху интеграла

$$\int (k_1^2 + k_2^2) dxdy$$

Постоянная, меньше которой он должен быть, зависит от отношения толщины оболочки к характерному ее размеру и первой собственной частоты поперечных колебаний линейной оболочки.

Отметим дополнительно, что с тангенциальных перемещений u, v можно вообще снять геометрические связи. При этом у оболочки появляются свободные «жесткие» перемещения вида

$$u_0 = a + dy, \; v_0 = b - dx \tag{5.1}$$

где a, b, d — произвольные постоянные. Если эти перемещения добавляются к уже имеющимся в оболочке, то ее напряжения и деформации при этом не меняются. Можно показать, что для разрешимости задачи в этом случае требуется самоуравновешенность тангенциальной нагрузки. А именно, чтобы для всех постоянных a, b, d

$$\int (F_1u_0 + F_2v_0)\, dx\, dy + \int_{\partial Q} (f_1u_0 + f_2v_0)\, ds = 0 \tag{5.2}$$

Это условие означает, что главные вектор и момент (плоские!) тангенциальных сил равны нулю.

Для получения теоремы существования в этом случае необходимо ввести вместо H_1 фактор-пространство H_{11}, которое имеет ту же норму, что и в H_1, а ядром его служат вектор-функции вида (5.1).

Рассуждения, подобные проведенным в [7], приводят к теореме

Теорема 2. Пусть нагрузка, действующая на оболочку, принадлежит классу H^*, и выполнено условие (3.5). Тогда для существования обобщенного решения задачи равновесия пологой оболочки при отсутствии геометрических связей на тангенциальные переменные u, v необходимо и достаточно, чтобы тангенциальная нагрузка была самоуравновешена, т. е. выполнялось условие (5.2).

Отметим, что решение задачи равновесия для совсем свободной от геометрических связей оболочки не имеет смысла в подобной постановке.

Причины следующие. Реальные свободные перемещения оболочки как жесткого целого вызывают в данном варианте уравнений деформации и напряжения в оболочке. С другой стороны, если действовать формально и вводить жесткие перемещения как функции, обращающие в нуль квадратичную часть энергии, то появляется множество «жестких» перемещений, работа внешних сил на которых обязана равняться нулю. Но эти интегральные условия на силы механического смысла не имеют. Более того, на таких жестких перемещениях в оболочке появляются тангенциальные напряжения, отличные от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 449—474.
2. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 4. С. 691—704.
3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 256 с.
5. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала, М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
6. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. № 1. С. 36—39.
7. *Лебедев Л. П.* О равновесии свободной нелинейной пластины // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 161—165.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
17.II.1988