Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 5, 1988

УДК 539.3

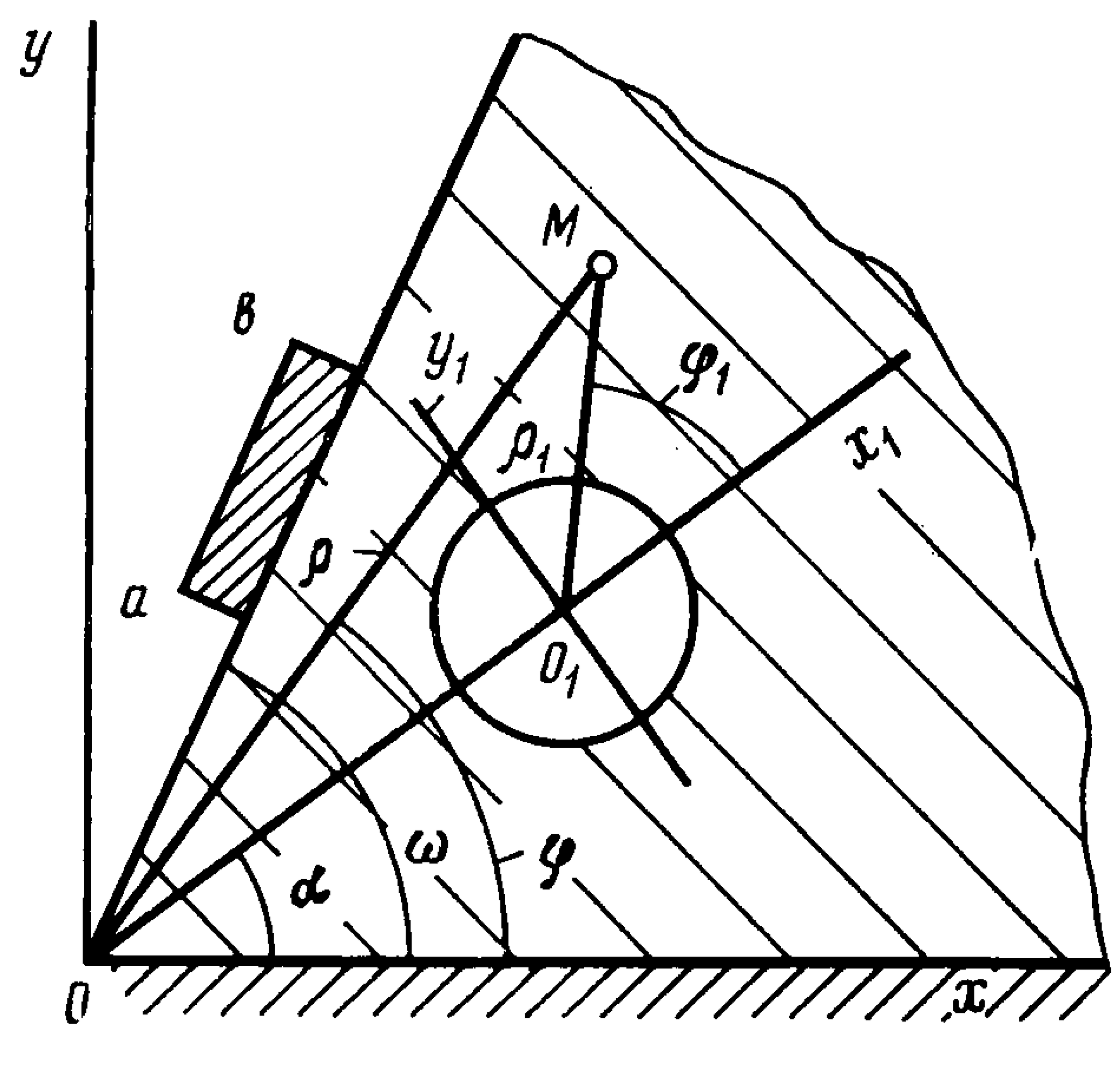
О ДВУХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО КЛИНА С КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Проценко В. С.

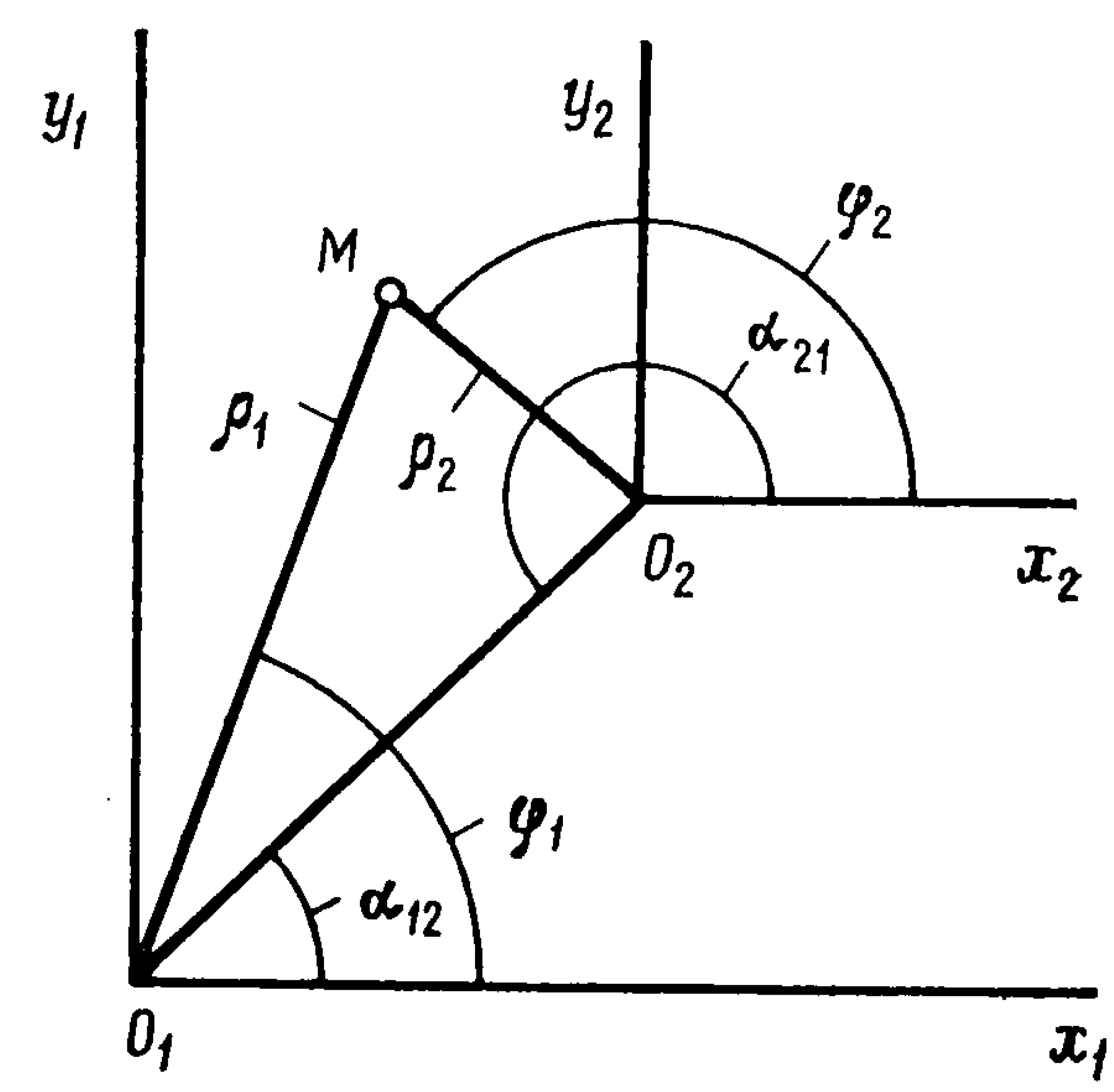
Рассматриваются две задачи: 1) клин с круговым отверстием, закрепленный по нижней грани, подвергается действию сдвигающих усилий по верхней грани, 2) вместо сдвигающих усилий на верхней грани действует жесткий штамп. Круговое отверстие предполагается свободным от нагрузки. Обе задачи сводятся к совокупности бесконечных систем линейных уравнений с вполне непрерывным оператором l_2 при условии, что круг не касается сторон угла. Эти уравнения допускают применение метода редукции. При решении существенно используются полученные автором формулы, связывающие базисные решения уравнения Лапласа в двух различных полярных системах координат. Метод может быть распространен на случай клина с несколькими круговыми отверстиями.

Впервые задача о деформации клина с круговым отверстием в одном частном случае рассматривалась в [1], однако полученные там бесконечные системы остались неисследованными.

1. Приведем соотношения между базисными решениями уравнения Лапласа на плоскости (фиг. 1, 2; $OO_1 = h$, $O_2O_2 = R$), которые позволя-



Фиг. 1



Фиг. 2

ют переходить от одной полярной системы координат к другой

$$\rho^{-s}e^{is\varphi} = \left(\frac{e^{i\alpha}}{h}\right)^s \Gamma(1-s) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_1}{h}\right)^n \frac{e^{-in\varphi_1}}{n!\,\Gamma(1-s-n)} \quad (\rho_1 < h) \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\rho_1}{h}\right)^{-n} e^{\pm in\omega_{1,2}} = \frac{i}{2(n-1)!} \int_{\Gamma} \frac{\Gamma(s)\,h^s\rho^{-s}}{\sin\pi s\,\Gamma(1+s-n)} e^{\pm is\psi_{1,2}}\,ds \tag{1.2}$$

$$(\Gamma\colon\ 0 < \operatorname{Re} s < 1,\ \ s = \alpha + i\tau),\quad 0 \leqslant \varphi_1 < 2\pi$$
$$\psi_1 = \varphi - \pi - \alpha,\quad \omega_1 = \varphi_1,\quad \alpha < \varphi < 2\pi + \alpha$$
$$\psi_2 = -\varphi - \pi + \alpha,\quad \omega_2 = -\varphi_1,\quad -2\pi + \alpha < \varphi < \alpha$$

$$\rho_k^{-n} e^{in\varphi_k} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_{m+n-1}^m \rho_j^m R^{-(m+n)} \times$$
$$\times e^{im\varphi_j + i(m+n)\alpha_{kj}},\quad \rho_j < R;\quad k, j = 1, 2;\quad k \neq j \tag{1.3}$$

Формулу (1.2) с ω_1 и ψ_1 будем применять для удовлетворения краевому условию на грани $\varphi = \omega > \alpha$, а с ω_2 и ψ_2 — на грани $\varphi = 0 < \alpha$.

Формула (1.1) получена следующим образом. Решается краевая задача отыскания гармонической функции внутри круга радиуса $\rho_1 < h$ с центром в точке O_1 (фиг. 1). В качестве краевых значений принимаются значения другой гармонической функции $\rho^{-s} e^{is\varphi}$. Таким способом получается равенство двух гармонических функций

$$\rho^{-s} e^{is\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_1^n [\bar{a}_n \cos n\varphi_1 + \bar{b}_n \sin n\varphi_1] \quad (\rho_1 < h) \tag{1.4}$$

справедливое не только на границе, но и внутри круга. Положив в нем $\varphi_1 = 0$ $(\varphi = \alpha)$, получим

$$e^{is\alpha} (\rho_1 + h)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \rho_1^n$$

Из этого равенства находим $\bar{a}_n$. Дифференцируя (1.4) по φ_1 и вновь полагая $\varphi_1 = 0$ $(\varphi = \alpha)$, находим $\bar{b}_n$. После элементарных преобразований получаем формулу (1.1). Единственность полученного таким способом разложения следует из единственности решения краевой задачи.

Формулу (1.2) можно получить, если решать краевую задачу Дирихле для угла с вершиной в точке O, содержащего луч $\varphi_1 = \pi$.

Равенство (1.3) получается элементарно из равенства

$$z_k^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z_j^m \quad (k, j = 1, 2;\ k \neq j)$$

$$z_k = x_k + iy_k, \quad R = O_1 O_2$$

2. Ради простоты изложения будем рассматривать лишь одно круговое отверстие в упругом клине.

Задача 1. В области Ω, представляющей угол с выброшенным кругом, найти гармоническую функцию $u\ (x, y)$ по краевым условиям

$$u\,|_{\varphi=0} = 0, \quad \partial u/\partial n\,|_{\rho_1=R} = 0 \tag{2.1}$$

$$\partial u/\partial n\,|_{\varphi=\omega} = \mu^{-1}\tau\,(\rho), \quad \operatorname{grad} u\,|_\infty = 0 \tag{2.2}$$

μ — модуль сдвига). Будем предполагать, что $|\operatorname{grad} u| \in L_2\,(\Omega_1)$, где Ω_1 — окрестность вершины клина, а $\tau\,(\rho) \in L\,(0, \infty)$.

Решение ищем в виде разложения [1—4]

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_1}\right)^n (a_n \cos n\varphi_1 + b_n \sin n\varphi_1) + \tag{2.3}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [A\,(s) \cos s\,(\omega - \varphi) + B\,(s) \sin s\varphi] \frac{\rho^{-s}}{\cos \omega s}\, ds$$
$$(\Gamma\colon\ 0 < \operatorname{Re} s < \delta_1 < 1)$$

Краевые условия, реализованные при помощи разложений (1.1), (1.2), приводят к интегроалгебраической системе уравнений ($a_0 = 0$, $\varepsilon = R/h$, $\beta = \omega - \alpha$)

$$\begin{Vmatrix} a_n \\ b_n \end{Vmatrix} = \frac{\varepsilon^n}{2\pi i n!} \int_\Gamma M_n\,(s) \begin{Vmatrix} \cos \beta s & \sin \alpha s \\ -\sin \beta s & -\cos \alpha s \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A\,(s) \\ B\,(s) \end{Vmatrix} ds \tag{2.4}$$

$$\begin{Vmatrix} A\,(s) \\ B\,(s) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \gamma_0 \end{Vmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \gamma_n\,(s)}{(n-1)!} \begin{Vmatrix} \cos(\pi - \alpha)\,s & \sin(\pi - \alpha)\,s \\ \cos(\pi - \beta)\,s & \sin(\pi - \beta)\,s \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_n \\ b_n \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

$$M_n(s) = \frac{\Gamma(1-s)\,h^{-s}}{\Gamma(1-s-n)\cos\omega s}, \quad \gamma_n(s) = \frac{\pi\Gamma(s)\,h^{-s}}{\Gamma(1+s-n)\sin\pi s}$$

$$\gamma_0(s) = (\mu s)^{-1}\int_0^\infty \rho^s \tau(\rho)\,d\rho$$

Из геометрии задачи следует, что $0 < \varepsilon < 1$.

Временно будем считать, что $\tau(\rho)\rho^2 \in L(0, \infty)$ при $0 < \lambda < \delta_1$. Позже от этого ограничения можно будет освободиться и положить $\lambda = 0$.

Изучим систему (2.4). Для этого введем операторы

$$\begin{Vmatrix} D_n^\beta \\ \Gamma_n^\alpha \end{Vmatrix} f = \frac{\varepsilon^n}{in!}\int_\Gamma M_n(s) \begin{Vmatrix} \cos\beta s \\ \sin\alpha s \end{Vmatrix} f(s)\,ds$$

Будем рассматривать операторы D_n^a, Γ_n^a $(a = \alpha, \beta)$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Теорема 1. Операторы D_n^a и Γ_n^a действуют вполне непрерывно из $L_2(-\infty, \infty)$ в l_2 при условии

(2.6) $\qquad \arcsin\varepsilon \leqslant \min(\alpha, \beta)$

Доказательство проведем только для D_n^β, так как для других операторов оно будет аналогичным. Вначале покажем, что сходится ряд

$$I_1 = \sum_{n=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{\varepsilon^n}{n!} M_n(s) f(s)\cos\beta s \right|^2 d\tau, \quad s = \lambda + i\tau \tag{2.7}$$

для любой функции $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Имеем

$$I_1 = \int_{-\infty}^\infty |f(s)\cos\beta s|^2 d\tau \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{\varepsilon^n}{n!} M_n(s) \right|^2 = \int_{-\infty}^\infty \Bigl| f(s)\cos\beta s \times$$

$$\times \frac{h^{-s}}{\cos\omega s}\Bigr|^2 d\tau \left(\frac{1}{2\pi} |h^s e^{-is\alpha}|^2 \int_0^{2\pi} |\rho^{-s} e^{is\varphi}|^2 d\varphi_1 - 1 \right)$$

Здесь использовано равенство Парсеваля для разложения (1.1), в котором положили $\rho_1 = R$. Интеграл от второго слагаемого в круглых скобках последней формулы сходится, так как $\omega > \beta$. Интеграл от первого слагаемого преобразуем к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^{-2\lambda}(\varphi_1)\,d\varphi_1 \int_{-\infty}^\infty \left| f(s)\frac{\cos\beta s}{\cos\omega s} \right|^2 e^{2\tau(\alpha-\varphi)}\,d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} \rho^{-2\lambda}(\varphi_1)\,d\varphi_1 \int_{-\infty}^\infty |f(s)|^2 O\left(e^{-2|\tau|\alpha+2\tau(\alpha-\varphi)}\right) d\tau$$

Внутренний интеграл, очевидно, сходится при условии

(2.8) $\qquad \arcsin\varepsilon \leqslant \alpha$

Значит, сходится при этом условии и ряд (2.7). Если окружность $\rho_1 = R$ пересекает луч $\varphi_1 = 0$, условие (2.8) нарушается и внутренний интеграл сходится не для всех $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Значит, это условие не только достаточное для сходимости ряда (2.7), но и необходимое.

Из сходимости ряда (2.7) при помощи усеченных последовательностей ([5], § 20, п. 20.4) устанавливается полная непрерывность оператора D_n^β из $L_2(-\infty, \infty)$ в l_2 при условии (2.8). Теорема доказана для D_n^β. Таким же способом устанавливается полная непрерывность из $L_2(-\infty, \infty)$ в l_2 остальных операторов D_n^α, Γ_n^a $(a = \alpha, \beta)$. Общим необходимым и достаточным условием полной непрерывности для всей совокупности операторов D_n^a, Γ_n^a служит условие (2.6).

Итак, установлено, что в правой части равенства (2.4) стоит матричный оператор, элементы которого — вполне непрерывные операторы из $L_2(-\infty, \infty)$ в l_2 при условии (2.6).

Для анализа уравнения (2.5) удобно ввести операторы

$$\left\| \begin{matrix} A_\alpha \\ B_\alpha \end{matrix} \right\| \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \gamma_n(s)}{(n-1)!} \left\| \begin{matrix} \cos(\pi-\alpha)s \\ \sin(\pi-\alpha)s \end{matrix} \right\| \lambda_n$$

и рассматривать их определенными в l_2.

Теорема 2. Операторы A_a, B_a ($a = \alpha, \beta$) действуют вполне непрерывно из l_2 в $L_2(-\infty, \infty)$ при условии (2.6).

Докажем теорему для оператора B_β. Установим вначале сходимость интеграла

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n \frac{\varepsilon^n \gamma_n(s)}{(n-1)!} \sin s(\pi-\beta) \right|^2 \tag{2.9}$$

для произвольной последовательности $\lambda_n \in l_2$. Имеем

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varepsilon^n \lambda_n}{(n-1)!} \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n(s) \sin s(\pi-\beta)|^2 d\tau = \tag{2.10}$$

$$= 8\pi^3 \int_0^{\infty} \rho^{2\lambda-1} d\rho \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \left(\frac{R}{\rho_1(\rho)}\right)^{2n} \sin^2 n\varphi_1(\rho)$$

В преобразовании интеграла (2.10) использовано равенство Парсеваля в известной форме ([6], с. 126, п. 3.17), примененное к разложению (1.2), в котором положили $\varphi = \omega$.

Ряд (2.10) сходится при условии $\min \rho_1 \geqslant R$, которое равносильно условию

$$\arcsin \varepsilon \leqslant \beta \tag{2.11}$$

Сходимость внутреннего ряда в (2.10) влечет за собой сходимость ряда (2.9). Если условие (2.11) нарушается (это имеет место при пересечении окружности $\rho_1 = R$ со стороной угла $\varphi = \omega$), то внутренний ряд в (2.10) будет сходиться не для всех $\lambda_n \in l_2$. Значит, условие (2.11), необходимое и достаточное для сходимости ряда (2.10).

Из факта сходимости интеграла (2.9) при помощи усеченных функций (равных нулю при $|\tau| > l$) на $L_2(-\infty, \infty)$ устанавливаем, что оператор B_β действует вполне непрерывно из l_2 в $L_2(-\infty, \infty)$ при условии (2.11), причем это условие необходимое и достаточное. Аналогичным способом устанавливается справедливость теоремы 2 для A_a, B_α. Общим необходимым и достаточным условием полной непрерывности этих операторов является условие (2.6). Теорема доказана.

Теоремой 2 установлено, что матричный оператор, определенный правой частью равенства (2.5), имеет своими элементами вполне непрерывные операторы из l_2 в $L_2(-\infty, \infty)$.

Будем иметь в виду также, что $\gamma_0(s) \in L_2(-\infty, \infty)$, в (2.6) — условие непересечения окружности со сторонами угла.

3. В результате исключения функций $A(s)$, $B(s)$ из системы (2.4), (2.5) придем к бесконечной системе уравнений

$$\left\|\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{matrix}\right\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\begin{matrix} \alpha_{kn}^{(1)} & \beta_{kn}^{(1)} \\ -\beta_{kn}^{(1)} & -\beta_{kn}^{(2)} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a^k \\ b_k \end{matrix}\right\| \tag{3.1}$$

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{kn}^{(1)} \\ \beta_{kn}^{(2)} \end{matrix}\right\| = \int_{-\infty}^{\infty} g_{nk}(\tau) \left[\frac{\operatorname{ch}\tau(\pi-\omega)}{\operatorname{sh}\pi\tau} \left\|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right\| \operatorname{sh}\tau(\pi-\alpha) \right] \frac{d\tau}{\operatorname{ch}\tau\omega}$$

$$\beta_{kn}^{(1)} = i \int_{-\infty}^{\infty} g_{nk}(\tau) \frac{\operatorname{ch}\tau(\beta-\alpha)}{\operatorname{ch}\tau\omega} d\tau \tag{3.2}$$

$$g_{nk}(\tau) = \frac{\varepsilon^{n+k}(-1)^n \Gamma(n+i\tau)}{2in!\,(k-1)!\,\Gamma(1-k+i\tau)}, \quad \left\|\begin{matrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{matrix}\right\| = \frac{\varepsilon^n}{\mu n!} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\rho) K_n^{\pm}(\rho)\, d\rho$$

$$K_n^{\pm} = \left\|\begin{matrix} K_n^{+} \\ K_n^{-} \end{matrix}\right\| = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(n+i\tau)}{\Gamma(1+i\tau)} \left(\frac{\rho}{h}\right)^{i\tau} \left\|\begin{matrix} i\operatorname{sh}\tau\alpha \\ \operatorname{ch}\tau\alpha \end{matrix}\right\| \frac{d\tau}{\operatorname{ch}\tau\omega} \tag{3.3}$$

В полученной системе оказалось возможным положить $\lambda = 0$, так что условие на $\tau(\rho)$ выглядит естественно: $\tau(\rho) \in L(0, \infty)$.

При анализе системы (3.1) будем исходить из того, что ее матричный оператор получен в результате композиции вполне непрерывных матричных операторов. Так как композиция двух вполне непрерывных операторов есть вполне непрерывный оператор, то матричный оператор уравнения (3.1) будет вполне непрерывным из l_2 в l_2. Тем самым установлена

Теорема 3. Оператор системы (3.1) вполне непрерывный в l_2 при условии (2.6). Это условие является и необходимым.

Аналогичные рассуждения позволяют сделать вывод, что $(\alpha_n, \beta_n) \in l_2$. Следовательно, решение системы (3.1), принадлежащее l_2, существует, единственно и может быть найдено методом редукции при условии

$$\arcsin\varepsilon < \min(\alpha, \beta) \tag{3.4}$$

Последнее утверждение следует из альтернативы Гильберта [7] и единственности решения исходной задачи теории упругости [8] при условии некасания ограничивающих тело линий.

Замечание. В случае, когда клин перфорирован k круговыми отверстиями, решение задачи следует брать в виде

$$u = \sum_{r=1}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_r}{\rho_r}\right)^n (a_n^{(r)} \cos n\varphi_r + b_n^{(r)} \sin n\varphi_r) + u_0$$

где u_0 — интегральное слагаемое в формуле (2.3). Методом, изложенным выше, с привлечением разложения (1.3) вновь получим совокупность k бесконечных систем, которые будут обладать тем же свойством, что и система (3.1) при условии некасания отверстий между собой и сторон угла.

4. В задаче о штампе примем, что нагрузка вне штампа отсутствует, а сам он сцеплен с упругим телом и сдвигается вдоль оси oz силой T. В этом случае

$$\gamma_0 = (\mu i\tau)^{-1} \int_a^b \rho^{i\tau} \tau_z(\rho)\, d\rho$$

и распределение касательных усилий $\tau_z(\rho)$ нужно найти из условия $u|_{\varphi=\omega} = d$ при $a < \rho < b$. Постоянная d находится из уравнения равновесия

$$\int_a^b \tau_z(\rho)\,d\rho = T$$

Из условия под штампом имеем уравнение

$$\mu^{-1}\int_a^b \tau_z(x)\,K\left(\ln\frac{x}{\rho}\right)dx = d + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\left(a_n H_n^+(\rho) + b_n H_n^-(\rho)\right) \tag{4.1}$$

$(a<\rho<b)$

$$H_n^{\pm} = \begin{Vmatrix} H_n^+ \\ H_n^- \end{Vmatrix} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(i\tau)}{\Gamma(1-n-i\tau)}\left(\frac{h}{\rho}\right)^{i\tau}\begin{Vmatrix} i\,\mathrm{sh}\,\tau\alpha \\ \mathrm{ch}\,\tau\alpha \end{Vmatrix}\frac{d\tau}{\mathrm{ch}\,\tau\omega} \tag{4.2}$$

$$K(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau^{-1}\,\mathrm{th}\,\tau\omega\cos\tau z\,d\tau$$

В (4.1) сделаем замены

$$\xi = a^*\ln x + b^*,\quad t = a^*\ln\rho + b^*$$

$$a^* = \frac{2}{\ln(b/a)},\quad b^* = \frac{\ln(ab)}{\ln(a/b)}$$

$$\frac{x}{a^*}\tau_z(x) = \varphi(\xi),\quad \varphi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k T_k(\xi)(1-\xi^2)^{-1/2}$$

где $T_k(x)$ — полиномы Чебышева, и выделим логарифмический член из ядра $K(z)$:

$$K(z) = -\frac{1}{\pi}\ln|z| + F(z),$$

$$F(z) = \int_0^{\infty}\tau^{-1}\left[e^{-\tau} + (\mathrm{th}\,\tau\omega - 1)\cos\tau z\right]d\tau$$

Применяя к полученному уравнению процедуру метода ортогональных многочленов [9], придем к бесконечной системе

$$\lambda_0\delta = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k K_{0k} - \mu\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_{k0}\quad (\delta = -\pi\ln 2|a^*|) \tag{4.3}$$

$$\lambda_n = \frac{2n}{\pi}\left(\mu\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_{kn} - \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k K_{nk}\right)$$

$$K_{nk} = I_t^{(n)} I_\xi^{(k)} F\left(\frac{\xi - t}{a^*}\right),\quad I_x^{(n)} f = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{4.4}$$

$$A_{kn} = a_k M_{kn}^+ + b_k M_{kn}^-,\quad M_{kn}^{\pm} = I_t^{(n)} H_k^{\pm}(\rho),\quad \rho = \exp\frac{t - b^*}{a^*}$$

К этой системе добавим систему

$$\begin{Vmatrix} a_n \\ b_n \end{Vmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\begin{Vmatrix} \alpha_{kn}^{(1)} & \beta_{kn}^{(1)} \\ -\beta_{kn}^{(1)} & -\beta_{kn}^{(2)} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_k \\ b_k \end{Vmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k L_{kn}^{\pm} \tag{4.5}$$

которая получена из (3.1) в результате подстановки в нее разложения для $\tau_z(\rho)$. Матричные элементы имеют вид (3.2) и

$$L_{kn}^{\pm} = \begin{Vmatrix} L_{kn}^+ \\ L_{kn}^- \end{Vmatrix} = \frac{\varepsilon^n}{\mu n!}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} I_t^{(k)} K_n^{\pm}\left(\exp\frac{t - b^*}{a^*}\right)$$

Совокупность систем (4.3), (4.5) вместе с условием статики образует замкнутую систему уравнений для определения неизвестных a_n, b_n, λ_n, d.

5. Исследуем системы (4.3), (4.5). Прежде всего отметим, что сходится ряд $\sum_{k,n} n^2 |K_{nk}|^2$. Это следует из того, что функция $F(z)$ имеет производные любого порядка. Докажем сходимость рядов $\sum_{k,n} |L_{kn}^{\pm}|^2$, $\sum_{k,n} \varepsilon^{2k} n^2 |M_{kn}^{\pm}|^2$. Введем функцию

$$
(5.1) \qquad \varphi(\eta, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta^k \frac{d}{d\rho} H_k^+(\rho), \quad \eta = \varepsilon e^{i\theta}
$$

(θ — вещественное число). Покажем, что это аналитическая функция переменной η в некотором круге. При учете (4.4) и (4.2) имеем ($y = h/\rho$)

$$
\varphi(\eta, \rho) = -i\rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(1+i\tau) y^{i\tau}}{\Gamma(1-k-i\tau)} \frac{\operatorname{sh} \tau\alpha}{\operatorname{sh} \tau\omega} d\tau =
$$

$$
= i\rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\eta)^k}{(k-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{i\tau} \operatorname{sh} \tau\alpha}{\Gamma(-i\tau) \operatorname{ch} \tau\omega} d\tau \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k+i\tau-1} dt =
$$

$$
= -i \frac{\eta\rho}{1+\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{1+\eta}\right)^{i\tau} \frac{\Gamma(1+i\tau) \operatorname{sh} \tau\alpha}{\Gamma(-i\tau) \operatorname{ch} \tau\omega} d\tau
$$

Здесь последовательно использованы формулы 8.334 (3), 8.310 (1) и 3.381 (4) из [10].

Последний интеграл сходится и имеет производную по η при условии $\arcsin |\eta| = \arcsin \varepsilon < \beta = \omega - \alpha$. Причем это условие является необходимым и достаточным для сходимости интеграла. Следовательно, функция $\varphi(\eta, \rho)$ будет аналитической в круге $|\eta| < \sin \beta$ при $\beta \leqslant \pi/2$ и в круге $|\eta| < 1$ при $\beta > \pi/2$. Из неравенств Коши для коэффициентов ряда (5.1) следуют неравенства

$$
(5.2) \qquad \left| \frac{d}{d\rho} H_k^+(\rho) \right| \leqslant \frac{C}{(\sin \beta)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad C = \mathrm{const}
$$

при $|\eta| = \varepsilon < \sin \beta$ и $\beta \leqslant \pi/2$. При $\beta > \pi/2$ в формуле (5.2) $\sin \beta$ следует заменить единицей. Такая же оценка справедлива для функции $H_k^-(\rho)$.

Исследуем сходимость ряда

$$
(5.3) \quad G = \sum_{n,k=1}^{\infty} n^2 \varepsilon^{2k} |M_{kn}^+|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} |n I_t^{(n)} H_k^+|^2 =
$$

$$
= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \left| \frac{d}{dt} H_k^+(\rho) \right|^2, \quad \rho = \exp \frac{t - b^*}{a^*}
$$

Здесь было использовано равенство Парсеваля для разложения функции $dH_k^+(\rho)/dt$ в ряд по полиномам Чебышева $T_k(t)$. Для ряда (5.3) при учете оценки (5.2) будем иметь неравенство

$$
(5.4) \qquad G = c_1 \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\sin \beta}\right)^{2k}, \quad c_1 = \mathrm{const}
$$

Так как неравенство (5.2) справедливо при условии $\sin \beta > \varepsilon$, когда $\beta \leqslant \pi/2$, то ряд (5.4) также сходится при этом условии. При $\beta > \pi/2$ в формуле (5.4) $\sin \beta$ следует заменить единицей. Ряд G и в этом случае будет сходящимся, так как $\varepsilon < 1$. Следовательно, условие $\arcsin \varepsilon < \beta$ будет не только достаточным, но и необходимым условием сходимости ряда (5.3). Аналогично доказывается сходимость ряда $\sum_{k,n} |L_{kn}^{\pm}|^2$. Сходимость двойных рядов из квадратов модулей матричных коэффициентов $\alpha_{kn}^{(1)}$, $\beta_{kn}^{(1,2)}$ была доказана ранее при условии (3.4). Из сходимости отмеченных рядов следует полная непрерывность в l_2 матричных операторов систем (4.3), (4.5) ([5], с. 216).

Тем самым установлена

Теорема 4. Условие (3.4) является необходимым и достаточным для полной непрерывности матричных операторов правых частей систем (4.3), (4.5) в пространстве l_2.

Приближенное решение бесконечных систем задач 1 и 2 можно получить методом редукции или в виде разложения по малому параметру ε.

Отметим, что аналогичным образом разбирается случай нескольких круговых отверстий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ling C.-B.*, *Hsu C.-M.*, Stresses in a perforated wedge // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. No. 3. P. 759—766.
2. *Проценко В. С.*, *Соловьев А. И.* О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 973—982.
3. *Баблоян А. А.*, *Тадевосян Р. Г.* Задача для составной плоскости, ослабленной многоугольным отверстием // Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. С. 3—12.
4. *Проценко В. С.*, *Соловьев А. И.*, *Цымбалюк В. В.* Кручение упругих тел, ограниченных координатными поверхностями тороидальной и сферической систем координат // ПММ, 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 415—425.
5. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука. 1980. 495 с.
6. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат. 1948. 479 с.
7. *Канторович Л. В.*, *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз. 1962. 708 с.
8. *Бурчуладзе Т. В.*, *Гегелия Т. Г.* Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси: Мецниереба. 1985. 226 с.
9. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука. 1982. 342 с.
10. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962. 1100 с.

Харьков

Поступила в редакцию
15.VI.1987