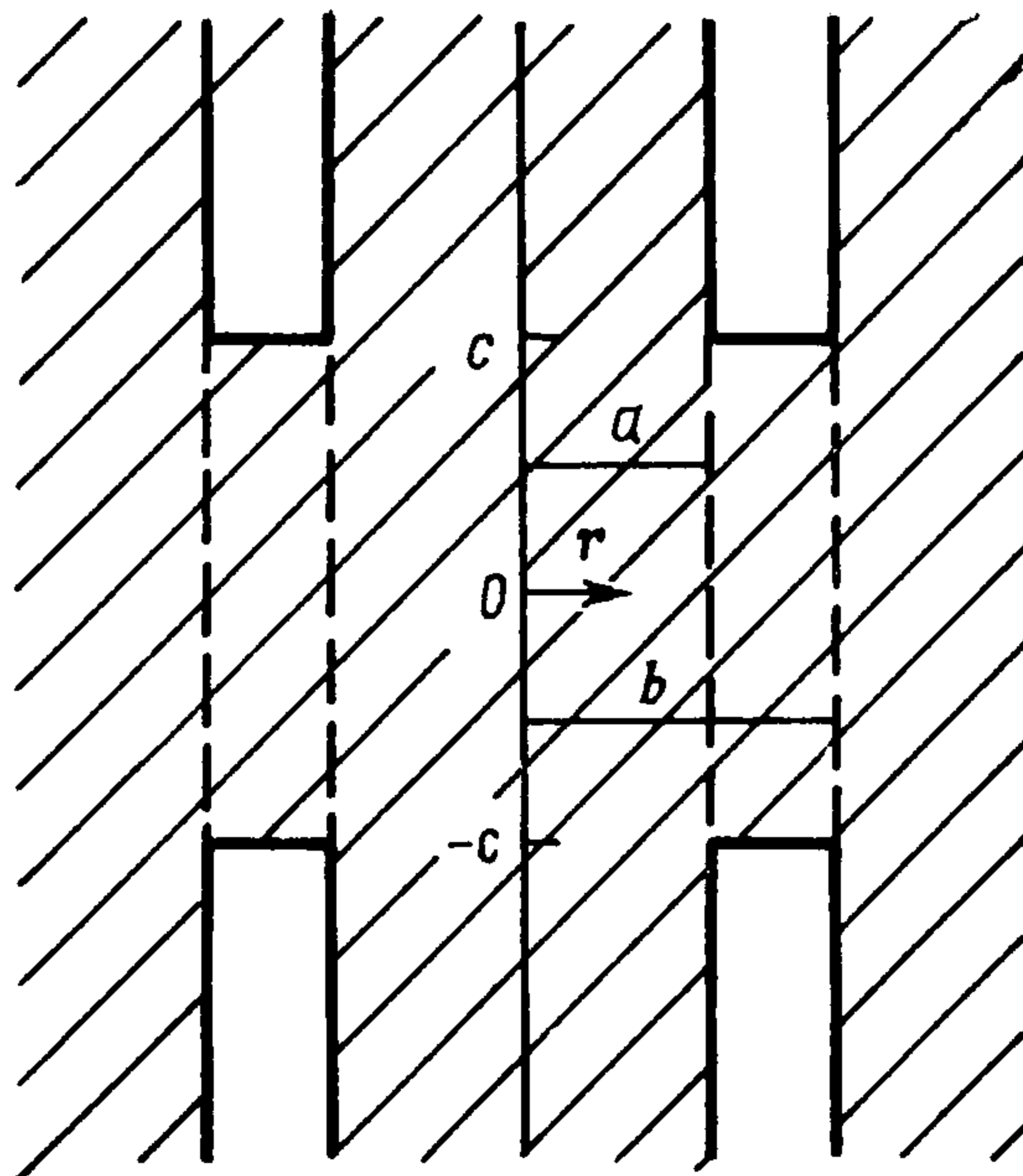


УДК 539.3

СЖАТИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

Востров В. К.

Рассматривается деформация неограниченного упругого тела с двумя полубесконечными цилиндрическими полостями (фиг. 1) при равномерном сжатии на бесконечности нагрузкой p_∞ , перпендикулярной оси симметрии. Поверхностями $r = a$ и $r = b$ из указанного тела выделяются бесконечный цилиндр $r \leq a$ и бесконечное тело с отверстием радиуса b . Интервал между ними при $|z| < c$ заполняется тонкими кольцами. При $a = 0$ получается бездонный колодец, частично заполненный дисками радиуса b ; особый интерес представляет случай $b - a \ll b$, т. е. когда расстояние между берегами щели в несколько раз меньше диаметра отверстия. В этом случае хрупкое разрушение происходит путем откола цилиндрической части (выступа, который называется керном) и превращения тела в колодец. Тупик щели — очаг концентрации напряжений, иногда приводящий к явлениям типа горного удара в крепких породах; выясняются условия их возникновения, что важно для оценки величины горного давления. В данной статье обобщаются методы, использованные в [1], и уточняются результаты этой работы.



Фиг. 1

1. Вывод исходных уравнений. Под действием давлений $p_a(z)$ и $p_b(z)$ на внутренней и внешней сторонах упругого кольца произойдут соответствующие радиальные смещения

$$Eu_r(a+0, z) = \frac{2a}{b^2 - a^2} \left[\left(\frac{a^2}{4} v_- + \frac{b^2}{4} v_+ \right) p_a - b^2 p_b \right]$$

$$Eu_r(b-0, z) = \frac{2b}{b^2 - a^2} \left[a^2 p_a - \left(\frac{b^2}{4} v_- + \frac{a^2}{4} v_+ \right) p_b \right]$$

$$v_{\pm} = 2(1 \pm \nu)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. С другой стороны, на поверхности бесконечного сплошного цилиндра при $|z| \leq c$ давление $p_a(z)$ вызовет радиальные перемещения [2]

$$Eu_r(a-0, z) = -2a(1 - \nu^2) \int_{-c}^c L_a'(z-s) p_a(s) ds$$

$$L_a(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_a(\lambda) \sin \lambda \frac{z}{a} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$G_a(\lambda) = -\{v_- + \lambda^2 [1 - \kappa_a^2(\lambda)]\}^{-1}, \kappa_a(\lambda) = I_0(\lambda)/I_1(\lambda),$$

($I_{0,1}(\lambda)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода).

Условие непрерывности радиальных перемещений и их производных на внутренней стороне кольца и поверхности сплошного цилиндра дает

уравнение, связывающее искомые давления $p_{a,b}(z)$,

$$(1.1) \quad q_a p_a'(z) - p_b'(z) + \varepsilon \int_{-c}^c W_a(z-s) p_a(s) ds = 0, \quad |z| \leq c$$

и соотношение

$$(1.2) \quad q_a p_a(0) - p_b(0) + \varepsilon \int_{-c}^c L_a'(s) p_a(s) ds = 0$$

Здесь

$$q_a = 1/4 (\nu_- k^2 + \nu_+), \quad \varepsilon = (1 - \nu^2) (1 - k^2), \quad k = a/b$$

Используя асимптотическую формулу

$$G_a(\lambda) = \lambda^{-1} + (1 - 2\nu) \lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

ядра $W_a(z)$, $L_a'(z)$ можно представить в виде суммы:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} W_a(z) &= W_a^*(z) - \frac{1-2\nu}{2a^2} \operatorname{sign} z, \\ L_a'(z) &= \frac{1}{\pi a} K_0\left(\nu_+ \left| \frac{z}{a} \right| \right) + V_a(z) \\ W_a^*(z) &= -\frac{\nu_+}{\pi a^2} K_1\left(\nu_+ \frac{z}{a}\right) - W_a^0(z) \\ W_a^0(z) &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^\infty \left[\lambda G_a(\lambda) - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu_+^2}} - \frac{1-2\nu}{\lambda} \right] \sin \lambda \frac{z}{a} d\lambda \\ V_a(z) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \left[G_a(\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \nu_+^2}} \right] \cos \lambda \frac{z}{a} d\lambda \end{aligned}$$

где $K_{0,1}(z)$ — функции Макдональда.

Рассматривая теперь деформацию неограниченного упругого тела, имеющего отверстие радиуса b , ось которого совпадает с осью z , аналогично предыдущему получаем уравнение

$$(1.4) \quad k^2 p_a'(z) - q_b p_b'(z) - \varepsilon \int_{-c}^c W_b(z-s) p_b(s) ds = 0, \quad |z| \leq c$$

и интегральное соотношение

$$(1.5) \quad k^2 p_a(0) - q_b p_b(0) - \varepsilon \int_{-c}^c L_b'(s) p_b(s) ds = (k^2 - 1) p_\infty$$

где $q_b = 1/4 (\nu_- + k^2 \nu_+)$. Здесь также

$$G_b(\lambda) = \lambda^{-1} - (1 - 2\nu) \lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

а для функций $W_b(z)$, $L_b'(z)$ справедливы соотношения, идентичные (1.3) при замене a на b , $\operatorname{sign} z$ на $-\operatorname{sign} z$ и ν_+ на ν_- .

В частности, при $a = 0$ из (1.4), (1.5) следует интегродифференциальное уравнение (ИДУ)

$$(1.6) \quad p_b'(z) + \nu_+ \int_{-c}^c W_b(z-s) p_b(s) ds = 0, \quad |z| \leq c$$

и соотношение

$$(1.7) \quad p_b(0) + \nu_+ \int_{-c}^c L_b'(s) p_b(s) ds = \frac{2p_\infty}{1-\nu}$$

для определения давления $p_b(z)$ в случае колодца.

В общем случае ($0 < k < 1$) соотношения (1.4), (1.1) совместно с условиями (1.5), (1.2) представляют собой систему сингулярных ИДУ относи-

тельно давлений $p_{a,b}(z)$ на границах выделенных тел (сплошного цилиндра и неограниченного тела с цилиндрическим отверстием). Отметим, что на достаточном расстоянии от тупика полости при $c \gg b$ устанавливается равномерное напряженное состояние ($p_{a,b}(z) = p_\infty$) и в предельном случае $c = \infty$ полученная система уравнений имеет тривиальное решение $p_{a,b}(z) = p_\infty$.

Интегрируя уравнения (1.1), (1.4), (1.6) по переменной z и перенося при $c \gg b$ начало координат в точку $z = -c$, приходим к полученным в [1] интегральным уравнениям Винера — Хопфа

$$(1.8) \quad P_b(z) = Q_a(z), \quad k^2 P_a(z) = Q_b(z), \quad z \geq 0$$

$$(1.9) \quad P_b(z) + v_+ \int_0^\infty L_b'(z-s) P_b(s) ds = v_+ p_\infty L_b^0(z)$$

$$Q_{a,b}(z) = q_{a,b} P_{a,b}(z) - \varepsilon \left[p_\infty L_{a,b}^0(z) - \int_0^\infty L'_{a,b}(z-s) P_{a,b}(s) ds \right]$$

$$P_{a,b}(z) = p_{a,b}(z) - p_\infty, \quad L_{a,b}^0(z) = 1/2 G_{a,b}(0) - L_{a,b}(z), \quad z \geq 0$$

Отметим, что примененный в [1] прием решения интегральных уравнений (1.8) некорректен, так как полученные независимые уравнения относительно искомых давлений не являются сверточными.

2. Решение ИДУ. Можно построить точное решение уравнений (1.8) и (1.9), выраженное через кратные сингулярные интегралы от известных функций путем сведения к краевой задаче Римана на неограниченной прямой. Однако такое решение будет неэффективным с вычислительной точки зрения при переходе от изображений к оригиналам и последующем определении напряженно-деформированного состояния в окрестности тупика щели. Здесь будет построено приближенное решение ИДУ (1.1), (1.4) совместно с соотношениями (1.2), (1.5), основанное на применении квадратурных формул метода дискретных вихрей [3] и простейшей конечно-разностной аппроксимации производных от искомых функций.

Видно, что производные от давлений $p_{a,b}(z)$ имеют логарифмическую особенность на границе $z = \pm c$ зон контакта, а сами давления ограничены всюду в этих зонах, включая границу. Это свойство решений полученных уравнений следует из представлений (1.3), аналогичных ему представлений для функций $W_b(z)$, $L_b'(z)$ и асимптотических соотношений

$$K_0(x) \sim \ln [2/(\gamma x)], \quad K_1(x) \sim 1/x, \quad x \rightarrow 0, \quad \gamma = \text{const}$$

Действительно, полагая $p_{a,b}(s) = p_{a,b}(c) + \varphi_{a,b}(z)$, где $\varphi_{a,b}(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow c$, и вставляя это разложение в уравнения (1.4), (1.1), будем иметь

$$q_a p_a'(z) - p_b'(z) = (\pi a)^{-1} \varepsilon p_a(c) \ln(c-z) + \psi_1(z)$$

$$k^2 p_a'(z) - q_b p_b'(z) = -(\pi b)^{-1} \varepsilon p_b(c) \ln(c-z) + \psi_2(z), \quad z \rightarrow c,$$

где $\psi_{1,2}(z)$ — функции, ограниченные при $z \rightarrow c$. Учитывая, что определитель полученной системы уравнений отличен от нуля, получаем требуемое утверждение.

Введем новые функции

$$\Phi_{a,b}(z) = \int_0^z p_{a,b}(s) ds, \quad z \geq 0$$

тогда уравнения (1.1), (1.4) и соотношения (1.2), (1.5) переписутся в виде

$$(2.1) \quad q_a \Phi_a''(z) - \Phi_b''(z) - \varepsilon_0 a^{-2} \Phi_a(z) + \varepsilon A_a(z) = 0$$

$$k^2 \Phi_a''(z) - q_b \Phi_b''(z) - \varepsilon_0 b^{-2} \Phi_b(z) - \varepsilon A_b(z) = 0$$

$$A_{a,b}(z) = \int_0^c [W_{a,b}^*(z-s) + W_{a,b}^*(z+s)] \Phi'_{a,b}(s) ds,$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(1 - 2\nu)$$

$$(2.2) \quad q_a \Phi'_a(0) - \Phi'_b(0) + 2\varepsilon B_a = 0$$

$$k^2 \Phi'_a(0) - q_b \Phi'_b(0) - 2\varepsilon B_b = (k^2 - 1) p_\infty$$

$$B_{a,b} = \int_0^c L'_{a,b}(s) \Phi'_{a,b}(s) ds$$

и, кроме того

$$(2.3) \quad \Phi_{a,b}(0) = \Phi''_{a,b}(0) = 0$$

Разобьем отрезок интегрирования $[0, c]$ на $N + 1$ равных частей точками $s_j = ct_j$, где $t_j = jh$, $h = (N + 1)^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, N + 1$, и обозначим $z_i = ch(i - 1/2)$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$. Используя квадратурную формулу прямоугольников для сингулярного и регулярного интегралов [3]

$$\int_0^c W(z_i \pm s) \Phi'(s) \approx W(z_i \pm c) \Phi(c) - W(z_i) \Phi(0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N+1} [W(z_i \pm s_k) - W(z_i \pm s_{k-1})] \Phi(z_k), \quad i = 1, 2, \dots, N + 1$$

а также конечно-разностную аппроксимацию

$$\Phi''(z_i) \approx h^{-2} [\Phi(z_{i+1}) - 2\Phi(z_i) + \Phi(z_{i-1})], \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$\Phi''(z_1) \approx 4/3 h^{-2} [\Phi(z_2) - 3\Phi(z_1) + 2\Phi(0)]$$

$$\Phi''(z_{N+1}) \approx 4/3 h^{-2} [2\Phi(c) - 3\Phi(z_{N+1}) + \Phi(z_N)]$$

приведем уравнения (2.1) к системе $2(N + 1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $2(N + 2)$ неизвестных $\Phi_{a,b}(c)$, $\Phi_{a,b}(z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$. Эти уравнения совместно с соотношениями (2.2), также записанными в дискретной форме при помощи квадратурной и дискретной формул

$$\Phi'(0) \approx 2h^{-1} [\Phi(z_1) - \Phi(0)]$$

$$\int_0^c L'_{a,b}(s) \Phi'(s) ds \approx L_{a,b}(z_1) \Phi'(0) +$$

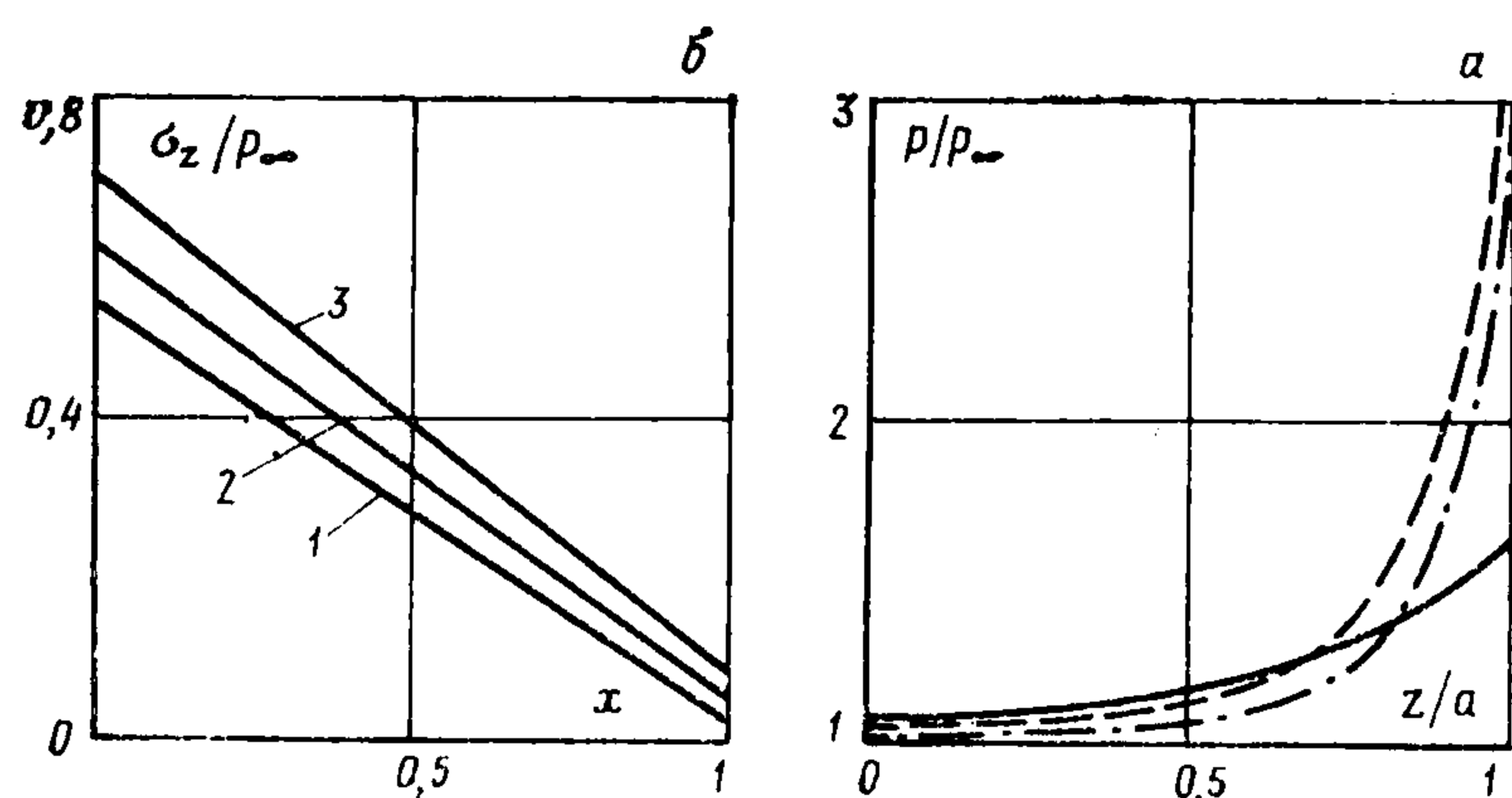
$$+ \sum_{k=1}^N L'(s_{k+1}) [\Phi(z_{k+1}) - \Phi(z_k)] + L'(c) [\Phi(c) - \Phi(z_{N+1})]$$

образуют полную систему $2N + 4$ уравнений относительно дискретных значений давлений на границе сплошного цилиндра и неограниченного тела с цилиндрическим отверстием.

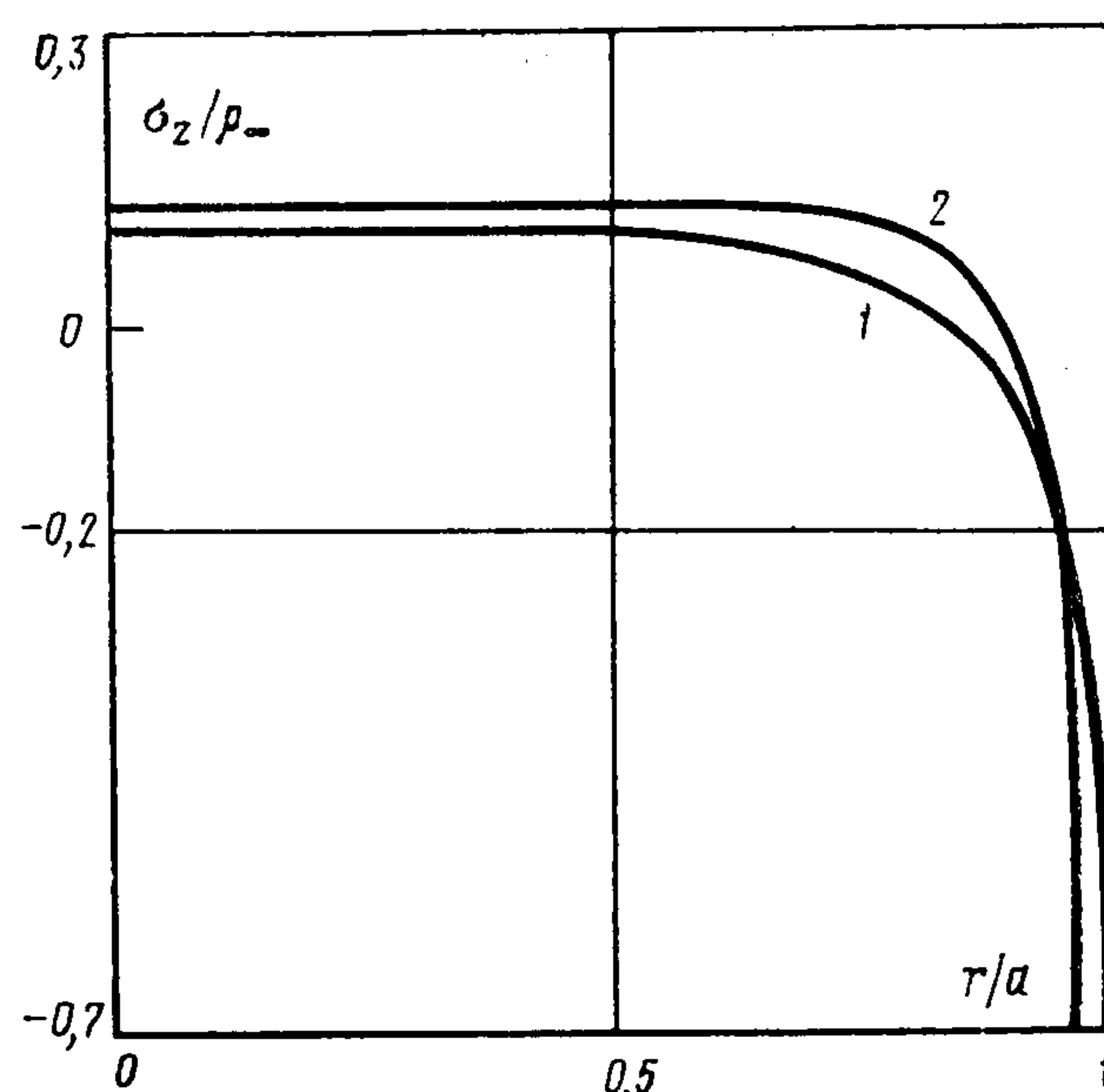
Результаты расчета давлений изложенным выше методом при $\nu = 0,25$, $k = 0,8$ и $\beta = 1$ приведены на фиг. 2, а, где $\beta = c/a$ в случае цилиндрической полости и $\beta = c/b$ в случае колодца. Штриховой линией показано давление $p_a(z/a)$ на границе сплошного цилиндра, штрихпунктирной — давление $p_b(z/a)$ на границе цилиндрического отверстия, сплошной линией — давление $p_b(z/b)$ в случае колодца.

При известной концентрации давления $p_a(z)$ на границе сплошного цилиндра осевое напряжение σ_z определяется интегралом

$$(2.4) \quad \sigma_z(r, z) = - \frac{2\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \mu G_a(\mu) Q(\mu, r/a) p_a^*(\mu) \cos \mu \frac{z}{a} d\mu$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где $p_a^*(\mu)$ — преобразование Фурье давления $p_a(z)$

$$p_a^*(\mu) = 2(c\sqrt{2\pi})^{-1} \int_0^c p_a(t) \cos \mu \frac{t}{a} dt$$

$$Q(\mu, t) = \mu t I_1(\mu t) / I_1(\mu) + [2 - \mu \kappa_a(\mu)] I_0(\mu t) / I_1(\mu)$$

Численный расчет по формуле (2.4) показывает (фиг. 2, б), что учет концентрации давления около тупика полости повышает максимальное растягивающее напряжение σ_z на границе сплошного цилиндра. Так, для $\nu = 0,25$ и значений k , равных 0,6; 0,8; 0,9 (линии 1—3 на фиг. 2, б соответственно, $x = (z - a)/c$), максимальное значение напряжения $\sigma_z(a, z)$ меняется от $0,71 p_\infty$ до $0,76 p_\infty$. Без учета концентрации напряжений ($p_a(z) = p_\infty$) максимальная величина σ_z составляет примерно $0,45 p_\infty$.

Расчет нормальных безразмерных напряжений $\sigma_z(r, c)/p_\infty$ у тупика полости для значений параметра k , равного 0,6 и 0,9 (кривые 1, 2 на фиг. 3), показывает наличие растягивающих напряжений внутри сплошного цилиндра и сжимающих напряжений вблизи его границы. Разница в данных, приведенных на фиг. 2, б и фиг. 3, обусловлена разрывным характером напряжений в особых точках $r = a$, $|z| = c$ границы тела и является следствием принятой модели деформирования прослойки, заключенной внутри поверхностей $r = a$ и $r = b$.

Наличие концентрации напряжений у тупика полостей приводит с ростом давления p_∞ к образованию кольцевых трещин в сечениях $|z| = c$ сплошного цилиндра с последующим отколом цилиндрической части и превращением конструкции в колодец.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байтерекоев А. Б., Колесниченко З. В., Леонов М. Я. Сжатие тела с полубесконечной цилиндрической полостью // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 5. С. 1077—1081.
2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487 с.
3. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука. 1985. 253 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.IX.1987