

УДК 539.3

РАВНОВЕСИЕ ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ, АРМИРОВАННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ЖЕСТКИМ СТЕРЖНЕМ

Канаун С. К.

Рассматривается однородная упругая среда с включением, имеющим форму вытянутого тела вращения. Предполагается, что модули упругости среды существенно меньше модулей упругости включения (жесткого стержня). Строится главный член разложения упругих полей в среде с жестким стержнем в ряд по малым параметрам задачи: отношению характерных линейных размеров включения и отношению модулей упругости среды и включения. Методом, изложенным в [1], определяется медленно изменяющаяся вдоль оси стержня часть главного члена «внутреннего» разложения — поля напряжений внутри стержня. Рассматриваются стержни с различным изменением радиуса поперечного сечения вдоль оси, имеющие форму цилиндра, вытянутого эллипсоида и остроконечного веретена. По известному внутреннему разложению главный член искомого разложения упругих полей вне стержня восстанавливается при помощи известного интегрального оператора.

1. Постановка задачи. Пусть в однородной упругой среде с тензором модулей упругости c_0 имеется включение с модулями $c = c_0 + c_1$. Включение занимает область V , которая имеет форму тела вращения с осью Γ и радиусом $a(z)$, где z — точка на Γ , $a(z)$ — непрерывная, кусочно-гладкая функция. Предположим, что длина включения вдоль оси Γ ($2l$) существенно превышает его характерный радиус a , а жесткость включения значительно больше жесткости среды ($c_0 \cdot c^{-1} = O(\delta)$, $\delta \ll 1$, точка означает свертывание тензоров по двум индексам).

Поле напряжений $\sigma(x)$ в среде с включением удовлетворяет известному соотношению [2] ($x(x_1, x_2, x_3)$ — точка среды)

$$(1.1) \quad c(x)^{-1} \cdot \sigma(x) + \int_V K(x-x') \cdot c_1 \cdot c^{-1} \cdot \sigma(x') dx' = c_0^{-1} \cdot \sigma_0(x)$$

$$c(x) = c, \quad x \in V; \quad c(x) = c_0, \quad x \notin V$$

где $\sigma_0(x)$ — приложенное к среде внешнее поле, характерный масштаб изменения которого будем считать сравнимым с длиной стержня, но значительно больше характерного радиуса a . Ядро $K(x)$ интегрального оператора K в этом соотношении выражается через вторые производные функции Грина G для среды c_0

$$(1.2) \quad K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) = -(\nabla_\alpha \nabla_\lambda G_{\gamma\mu}(x))_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}, \quad \nabla_\alpha c_0^{\alpha\beta\lambda\mu} \nabla_\lambda G_{\mu\nu}(x) = -\delta(x) \delta_\nu^\beta$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция, δ_ν^β — символ Кронекера.

Из (1.1) следует, что упругое поле вне области V восстанавливается по значениям $\sigma(x)$ внутри V . Уравнение для поля $\sigma(x)$ внутри стержня получим, умножив обе части (1.1) на характеристическую функцию области V .

В дальнейшем удобно считать компоненты тензоров c и c_0 в (1.1) безразмерными величинами, причем $c_0 = O(1)$, $c^{-1} = O(\delta)$. Для этого достаточно обе части (1.1) умножить на характерное значение модуля упругости среды.

Работа посвящена построению главного члена разложения поля $\sigma(x)$ внутри стержня в ряд по малым параметрам задачи $\varepsilon = a/l$ и δ . Как следует из результатов [1], главный член указанного разложения $\sigma(x)$ состоит из медленно изменяющейся вдоль оси стержня составляющей и функцией типа пограничного слоя, локализованных в окрестности особых точек Γ — изломов функции $a(z)$ или концов стержня. Основная цель работы — построение медленно изменяющейся части главного члена разложения $\sigma(x)$ в ряд по ε и δ .

Отметим важное свойство предельного по ε решения (1.1). Если в этом уравнении перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, то его решение $\sigma(x)$ оказывается постоянным в каждом сечении стержня (см. [1]). Поэтому можно ожидать, что главный член искомого разложения поля $\sigma(x)$ будет постоянным в поперечных сечениях области V , по крайней мере вдали от концов стержня и точек излома функции $a(z)$. Это позволяет несколько упростить исходное уравнение (1.1).

Поместим начало декартовой системы координат y_1, y_2, z в середину стержня, направив ось z вдоль Γ . Обозначим $\omega(z)$ поперечное сечение стержня. Для каждой точки $x \in V$ справедливо единственное представление: $x = y + zm$, где $y(y_1, y_2)$ — вектор в плоскости $\omega(z)$, m — орт оси z . Считая $\sigma(x) = \sigma(z)$, рассмотрим уравнение (1.1) в точках на оси стержня Γ . Введем относительные координаты $\xi = z/l, \eta = y/l$ и после интегрирования по поперечным сечениям $\omega(\xi)$ получим

$$(1.3) \quad c^{-1} \cdot \sigma(\xi) + \int_{-1}^1 \bar{K}(\xi, \xi') \cdot c_1 \cdot c^{-1} \cdot \sigma(\xi') d\xi' = c_0^{-1} \cdot \sigma_0(\xi)$$

$$(1.4) \quad \bar{K}(\xi, \xi') = \int_{\omega(\xi')} K[(\xi - \xi')m - \eta'] d\eta'$$

Оказывается, что медленно изменяющиеся вдоль Γ составляющие главного члена искомого разложения функции $\sigma(x)$ и решения уравнения (1.3) совпадают. Уравнение (1.3) позволяет также найти самые «дальнодействующие» из функций типа пограничного слоя, которые входят в выражения для главного члена разложения $\sigma(x)$.

Перейдем к построению формального выражения для главного члена разложения решения уравнения (1.3) в ряд по малым параметрам ε и δ (п. 3). Предварительно в п. 2 найдем явный вид ядра $\bar{K}(\xi, \xi')$ оператора \bar{K} в уравнении (1.3).

2. Представление оператора K . Введем удобный для представления четырехвалентных тензоров, фигурирующих в задаче, тензорный базис $P_i(m)$, который сконструируем из единичного вектора m_α и двухвалентного тензора $\theta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - m_\alpha m_\beta$

$$P_{1\alpha\beta\lambda\mu} = (\theta_{\alpha\mu}\theta_{\beta\lambda})_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}, \quad P_{2\alpha\beta\lambda\mu} = \theta_{\alpha\beta}\theta_{\lambda\mu}, \quad P_{3\alpha\beta\lambda\mu} = \theta_{\alpha\beta}m_\lambda m_\mu$$

$$P_{4\alpha\beta\lambda\mu} = m_\alpha m_\beta \theta_{\lambda\mu}, \quad P_{5\alpha\beta\lambda\mu} = (\theta_{\alpha\lambda}m_\beta m_\mu)_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}, \quad P_{6\alpha\beta\lambda\mu} = m_\alpha m_\beta m_\lambda m_\mu$$

Можно показать, что эти шесть линейно-независимых тензоров образуют замкнутую алгебру относительно операции умножения — свертки по двум индексам. Аналогичный тензорный базис рассматривался в [3] (Приложение 4), где приведена таблица «умножения» тензоров $P_i(m)$ и формула обращения для тензора, принадлежащего линейной оболочке $P_i(m)$.

Далее будем считать, что среда изотропна, а стержень трансверсально-изотропный с осью изотропии, направленной вдоль оси Г. Если m — орт оси изотропии, то в базисе $P_i(m)$ тензоры c_0 и c примут вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} c_0 &= 2\mu_0 P_1 + \lambda_0 (P_2 + P_3 + P_4) + 4\mu_0 P_5 + (\lambda_0 + 2\mu_0) P_6 \\ c &= 2\mu P_1 + \lambda P_2 + \tau (P_3 + P_4) + \gamma P_5 + \rho P_6 \end{aligned}$$

Здесь λ_0, μ_0 — параметры Ламе среды, связь постоянных $\lambda, \mu, \tau, \gamma, \rho$ с техническими модулями упругости трансверсально-изотропного тела дается равенствами

$$(2.2) \quad \begin{aligned} E_1 = E_2 &= \left(\frac{\rho}{2\Delta} + \frac{1}{4\mu} \right)^{-1}, \quad E_m = \frac{\Delta}{2(\lambda + \mu)}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu \\ \nu_1 &= E_1 \left(\frac{1}{4\mu} - \frac{\rho}{2\Delta} \right), \quad \nu_2 = E_2 \frac{\tau}{\Delta}, \quad \mu_m = \frac{1}{4} \gamma \\ \Delta &= 2 [(\lambda + \mu) \rho - \tau^2] \end{aligned}$$

где E_1, E_2, E_m — модули Юнга (E_m — модуль вдоль оси изотропии), ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона, μ_1, μ_2, μ_m — модули сдвига.

Выражение для символа $K^*(k)$ оператора \mathbf{K} в уравнении (1.1) — преобразование Фурье функции $K(x)$ (1.2) — в базисе $P_i(m)$ имеет вид

$$(2.3) \quad K^*(k) = \frac{1}{\mu_0} [P_5(n) + (1 - \kappa_0) P_6(n)], \quad n = \frac{k}{|k|}, \quad \kappa_0 = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}$$

где $k(k_1, k_2, k_3)$ — векторный параметр преобразования Фурье (система координат k_1, k_2, k_3 — сопряженная к η_1, η_2, z).

Обратимся теперь к уравнению (1.3) и найдем выражение для функции $\bar{K}(\xi, \xi')$ — ядра интегрального оператора $\bar{\mathbf{K}}$ в этом уравнении. Из соотношений (1.4), (2.3) следует равенство

$$\bar{K}(\xi, \xi') = (2\pi)^{-3} \int_{\omega(\xi')} d\eta' \int K^*(k) \exp\{-ik[(\xi - \xi')m - \eta']\} dk$$

где интегрирование по $k(k_1, k_2, k_3)$ выполняется по всему k -пространству. Меняя порядок вычисления интегралов — сперва по $\omega(\xi')$, а затем по k_1, k_2 — получим

$$(2.4) \quad \bar{K}(\xi, \xi') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}^*(\varepsilon(\xi'), k_3) e^{-ik_3(\xi - \xi')} dk_3, \quad \varepsilon(\xi) = \frac{a(\xi)}{l}$$

где функция $\bar{K}^*(\varepsilon(\xi'), k_3)$ — символ оператора $\bar{\mathbf{K}}$ — имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \bar{K}^* &= k_1^* P_1 + k_2^* P_2 + k_3^* (P_3 + P_4) + k_5^* P_5 + k_6^* P_6 \\ k_1^* &= (16\mu_0)^{-1} [4(2 - \kappa_0) T_1^* + \kappa_0 T_2^*], \\ k_2^* &= (32\mu_0)^{-1} \kappa_0 (T_2^* - 4T_1^*) \\ k_3^* &= -(4\mu_0)^{-1} \kappa_0 T_2^*, \quad k_5^* = (2\mu_0)^{-1} (2 - T_1^* - 2\kappa_0 T_2^*) \\ k_6^* &= (2\mu_0)^{-1} [2(1 - \kappa_0)(1 - T_1^*) + \kappa_0 T_2^*] \end{aligned}$$

Функции $T_1^*(\varepsilon, k)$ и $T_2^*(\varepsilon, k)$ определяются соотношениями (индекс 3 у аргумента k_3 здесь и далее опускаем)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} T_1^*(\varepsilon, k) &= \varepsilon(\xi') |k| K_1(\varepsilon(\xi') |k|), \quad T_2^*(\varepsilon, k) = \\ &= \varepsilon^2(\xi') k^2 K_0(\varepsilon(\xi') |k|) \end{aligned}$$

где K_0 и K_1 — модифицированные функции Бесселя.

Отсюда и из (2.4), (2.5) видно, что ядро $\bar{K}(\xi, \xi')$ интегрального оператора $\bar{\mathbf{K}}$ определяется формулой, аналогичной (2.5), в которой $T_1^*(\varepsilon, k)$

и T_2^* (ε, k) следует заменить функциями

$$(2.7) \quad T_1(\xi, \xi') = \frac{\varepsilon^2(\xi')}{2 [(\xi - \xi')^2 + \varepsilon^2(\xi')]^{3/2}},$$

$$T_2(\xi, \xi') = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left\{ \frac{\varepsilon^2(\xi')}{[(\xi - \xi')^2 + \varepsilon^2(\xi')]^{1/2}} \right\}$$

Они являются прообразами Фурье T_1^* (ε, k), T_2^* (ε, k) по переменной k и представляют собой ядра интегральных операторов T_1, T_2 , действие которых на функцию $\sigma(\xi)$ определяется формулой

$$(2.8) \quad (T_i \sigma)(\xi) = \int_{-1}^1 T_i(\xi, \xi') \sigma(\xi') d\xi', \quad i = 1, 2$$

Функцию $\varepsilon(\xi)$ в (2.4)–(2.7) можно представить в виде произведения $\varepsilon(\xi) = \varepsilon \alpha(\xi)$, $\varepsilon \ll 1$, $\alpha(\xi) = O(1)$, где $\alpha(\xi)$ — функция формы стержня.

Выделим главные члены разложения символа \bar{K}^* (2.5) в ряд по малому параметру ε . Раскладывая в указанные ряды функции Бесселя K_0 и K_1 в (2.6) [4], будем иметь

$$(2.9) \quad \bar{K}^*(\varepsilon, k) = A_0 + (\varepsilon^2 \ln \varepsilon) \alpha^2(\xi') k^2 A_1 + O(\varepsilon^2)$$

$$A_0 = (8\mu_0)^{-1} [2(2 - \kappa_0) P_1 - \kappa_0 P_2 + 4P_5]$$

$$A_1 = (8\mu_0)^{-1} [2(1 - \kappa_0) P_1 - \kappa_0 P_2 + 2\kappa_0 (P_3 + P_4) + 2(4\kappa_0 - 1) P_5 - 4P_6]$$

Отметим важные для дальнейшего свойства тензора A_0 . Введем ортогональные проекторы Θ и Π (I — единичный четырехвалентный тензор)

$$(2.10) \quad \Theta = P_1 + 2P_5, \quad \Pi = P_6, \quad \Theta + \Pi = I$$

$$\Theta \cdot \Theta = \Theta, \quad \Pi \cdot \Pi = \Pi, \quad \Theta \cdot \Pi = \Pi \cdot \Theta = 0$$

Линейное пространство, натянутое на тензоры $P_i(m)$, при помощи этих проекторов разбивается на два ортогональных подпространства (Θ и Π). Можно показать, что тензор A_0 принадлежит подпространству Θ и имеет в нем невырожденный обратный A_0^{-1}

$$(2.11) \quad \Theta \cdot A_0 = A_0 \cdot \Theta = A_0, \quad \Pi \cdot A_0 = A_0 \cdot \Pi = 0, \quad A_0 \cdot A_0^{-1} =$$

$$= A_0^{-1} \cdot A_0 = \Theta$$

3. Формальная схема построения главного члена решения (1.3). Рассмотрим формальную процедуру построения главного члена разложения решения (1.3) в ряд по ε и δ . Сохраним в разложении (2.9) символа $\bar{K}^*(\varepsilon, k)$ оператора \bar{K} первые два слагаемых. Тогда уравнение (1.3) примет вид ($D = d/d\xi$)

$$(3.1) \quad c^{-1} \cdot \sigma(\xi) + A_0 \cdot c_1 \cdot c^{-1} \cdot \sigma(\xi) - \varepsilon^2 \ln \varepsilon D^2 [\alpha^2(\xi) \sigma(\xi)] = c_0^{-1} \cdot \sigma_0(\xi)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$(3.2) \quad \sigma(\xi) = \sigma^0(\xi) + \varepsilon^2 \ln \varepsilon \sigma^1(\xi) + \dots$$

Уравнение для главного члена этого разложения $\sigma^0(\xi)$ получим, подставляя (3.2) в (3.1) и сохраняя в левой части члены старшего порядка по ε .

В зависимости от соотношения между малыми параметрами ε и δ возможны следующие случаи.

1°. $\delta^{-1} \varepsilon^2 \ln \varepsilon = o(1)$. В этом случае уравнение для $\sigma^0(\xi)$ принимает вид

$$c^{-1} \cdot \sigma^0(\xi) + A_0 \cdot c_1 \cdot c^{-1} \cdot \sigma^0(\xi) = c_0^{-1} \cdot \sigma_0(\xi)$$

Действуя на обе части этого равенства операторами Θ и Π и учитывая свойства (2.11) тензора A_0 , получим два соотношения

$$(3.3) \quad A_0 \cdot \sigma_{\Theta}^{\circ}(\xi) + (\Theta - A_0 c_0) \cdot c^{-1} \cdot \sigma^{\circ}(\xi) = \Theta \cdot c_0^{-1} \cdot \sigma_0(\xi)$$

$$(3.4) \quad \Pi \cdot c^{-1} \cdot \sigma^{\circ}(\xi) = \Pi \cdot c_0^{-1} \cdot \sigma_0(\xi); \quad \sigma_{\Theta}^{\circ} = \Theta \cdot \sigma^{\circ}, \quad \sigma_{\pi}^{\circ} = \Pi \cdot \sigma^{\circ}$$

Поскольку A_0 — невырожденный в подпространстве Θ тензор с компонентами порядка единицы, из (3.3), (3.4) следуют оценки: $\sigma_{\Theta}^{\circ}(\xi) = O(1)$, $\sigma_{\pi}^{\circ}(\xi) = O(\delta^{-1})$. (Здесь предполагается, что $\sigma_0(\xi) = O(1)$). Отсюда, учитывая равенство $\sigma_{\pi}^{\circ\alpha\beta} = \sigma_m^{\circ} m^{\alpha} m^{\beta}$, для тензора $\sigma^{\circ}(\xi)$ получим оценку

$$(3.5) \quad \sigma^{\circ\alpha\beta}(\xi) = \sigma_m^{\circ}(\xi) m^{\alpha} m^{\beta} + O(1), \quad \sigma_m^{\circ}(\xi) = O(\delta^{-1})$$

Выражение для осевой компоненты $\sigma_m^{\circ}(\xi)$ тензора $\sigma^{\circ}(\xi)$ следует из (3.4), (3.5) и имеет вид

$$(3.6) \quad \sigma_m^{\circ}(\xi) = E_m E_0^{-1} [\sigma_{0m}(\xi) - \nu_0 \operatorname{tr} \sigma_{0\Theta}(\xi)]$$

где $\operatorname{tr} \sigma_{0\Theta} = (\sigma_{0\Theta})_{\alpha}^{\alpha}$ — след тензора $\sigma_{0\Theta}$; E_0 , ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона среды, E_m — модуль Юнга стержня.

2°. $\delta^{-1} \varepsilon^2 \ln \varepsilon = O(1)$ ($c_0 \cdot c^{-1} = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$). В этом случае уравнение для $\sigma^{\circ}(\xi)$ в (3.2) совпадает с (3.1). Действуя на обе части (3.1) операторами Θ и Π , так же как и в случае 1°, можно показать, что тензор $\sigma^{\circ}(\xi)$ удовлетворяет оценке (3.5), а уравнение для осевой компоненты $\sigma_m^{\circ}(\xi)$ этого тензора принимает вид

$$(3.7) \quad D^2 [\alpha^2(\xi) \sigma_m^{\circ}(\xi)] - p^2 \sigma_m^{\circ}(\xi) = \frac{1 + \nu_0}{\varepsilon^2 \ln \varepsilon} [\sigma_{0m}(\xi) - \nu_0 \operatorname{tr} \sigma_{0\Theta}(\xi)]$$

$$p^2 = - \frac{E_0}{E_m} \frac{1 + \nu_0}{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}, \quad p = O(1)$$

Из этого дифференциального уравнения функцию $\sigma^{\circ}(\xi)$ можно найти лишь с точностью до двух произвольных постоянных. Для определения этих постоянных на функцию $\sigma_m^{\circ}(\xi)$ необходимо наложить некоторые дополнительные условия (п. 4).

Оценим близость полученных формальных выражений для $\sigma^{\circ}(\xi)$ к решению интегрального уравнения (1.3). Для этого исследуем невязку с правой частью уравнения (1.3), которая возникает при подстановке в его левую часть функции $\sigma^{\circ}(\xi)$. Если $\sigma^{\circ}(\xi)$ удовлетворяет оценке (3.5), то наиболее существенной оказывается Π -составляющая невязки. Подставляя в левую часть (1.3) функцию $\sigma^{\circ}(\xi)$ и действуя на результат оператором Π , будем иметь

$$(3.8) \quad \alpha_m \sigma_m^{\circ}(\xi) - (T \sigma_m^{\circ})(\xi) = f_0(\xi) + R(\sigma_m^{\circ}, \xi)$$

$$\alpha_m = 1 + \frac{E_0}{2E_m} \frac{1 - \nu_0}{1 - \kappa_0}, \quad T = T_1 - \frac{\kappa_0}{2(1 - \kappa_0)} T_2$$

$$f_0(\xi) = \frac{1 + \nu_0}{1 - \kappa_0} [\sigma_{0m}(\xi) - \nu_0 \operatorname{tr} \sigma_{0\Theta}(\xi)]$$

где $R(\sigma_m^{\circ}, \xi)$ — искомая невязка, операторы T_1 , T_2 определены соотношениями (2.7), (2.8).

Для компенсации невязки к $\sigma_m^{\circ}(\xi)$ необходимо добавить слагаемое $\sigma_m^1(\xi)$, так чтобы функция $\sigma_m(\xi) = \sigma_m^{\circ}(\xi) + \sigma_m^1(\xi)$ удовлетворяла уравнению

$$(3.9) \quad \alpha_m \sigma_m - T \sigma_m = f_0$$

Если слагаемым σ_m^1 можно пренебречь по сравнению с σ_m° , то функция $\sigma_m^{\circ} m^{\alpha} m^{\beta}$ — главный член разложения решения уравнения (1.3)

в ряд по ε и δ . В противном случае к σ_m° следует добавить главный член разложения σ_m^1 по ε и δ . Отметим, что Θ -составляющая невязки с правой частью (1.3) при подстановке в левую часть этого уравнения функции $\sigma^\circ(\xi)$ вида (3.5) компенсируется слагаемыми порядка единицы, малыми по сравнению с осевой компонентой, которая имеет порядок δ^{-1} .

Рассмотрим вид невязки R в (3.8) для стержней с различным законом изменения радиуса поперечного сечения вдоль оси ξ .

4. Цилиндрический стержень. Для цилиндрического стержня $\varepsilon = a/l$, $\alpha(\xi) = 1$. Оценим результат действия операторов T_1, T_2 (2.8) на гладкую ограниченную функцию $\sigma(\xi)$ порядка единицы. Представим $(T_1\sigma)(\xi)$ в форме

$$(4.1) \quad (T_1\sigma)(\xi) = T_1^\circ(\xi)\sigma(\xi) + T_1^1(\xi)D\sigma(\xi) + \frac{1}{2}T_1^2(\xi)D^2\sigma(\xi) + \\ + \int_{-1}^1 T_1(\xi, \xi') \left[\sigma(\xi') - \sigma(\xi) - D\sigma(\xi)(\xi' - \xi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}D^2\sigma(\xi)(\xi' - \xi)^2 \right] d\xi'$$

$$(4.2) \quad T_1^k(\xi) = \int_{-1}^1 T_1(\xi, \xi')(\xi' - \xi)^k d\xi', \quad k = 0, 1, 2$$

где ядро $T_1(\xi, \xi')$ имеет вид (2.7) при $\varepsilon(\xi) = \varepsilon$.

Вычисляя интегралы (4.2) и подставляя результат в (4.1), получим оценку

$$(4.3) \quad (T_1\sigma)(\xi) = \sigma(\xi) - \left[\Phi_0\left(\frac{1-\xi}{\varepsilon}\right) + \Phi_0\left(\frac{1+\xi}{\varepsilon}\right) \right] \sigma(\xi) - \\ - \varepsilon \left[\Phi_1\left(\frac{1-\xi}{\varepsilon}\right) - \Phi_1\left(\frac{1+\xi}{\varepsilon}\right) \right] D\sigma(\xi) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ln \varepsilon D^2\sigma(\xi) + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ln \varepsilon [\Phi_2(1-\xi, \varepsilon) + \Phi_2(1+\xi, \varepsilon)] D^2\sigma(\xi) + O(\varepsilon^2)$$

Здесь учтено, что интегральное слагаемое в (4.1) имеет порядок ε^2 ; Φ_0, Φ_1, Φ_2 — функции типа пограничного слоя, локализованные в окрестности концов стержня $\xi = \pm 1$

$$(4.4) \quad \Phi_0(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} t \left(1 - \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 1}} \right), \quad \Phi_1(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ \Phi_2(t, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}(\ln \varepsilon)^{-1} \ln(\sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - |t|)$$

Аналогично можно получить оценку

$$(4.5) \quad (T_2\sigma)(\xi) = -\varepsilon \left[\Phi_1\left(\frac{1-\xi}{\varepsilon}\right) - \Phi_1\left(\frac{1+\xi}{\varepsilon}\right) \right] D\sigma(\xi) - \\ - \varepsilon^2 \ln \varepsilon D^2\sigma(\xi) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ln \varepsilon [\Phi_2(1-\xi, \varepsilon) + \\ + \Phi_2(1+\xi, \varepsilon)] D^2\sigma(\xi) + O(\varepsilon^2)$$

Рассмотрим случай, когда $\delta^{-1}\varepsilon^2 \ln \varepsilon = o(1)$ и функция $\sigma^\circ(\xi)$ имеет вид (3.6). Подставляя (3.6) в (3.8) и учитывая (4.3), (4.5) для невязки R получим выражение

$$(4.6) \quad R = \left[\Phi_0\left(\frac{1-\xi}{\varepsilon}\right) + \Phi_0\left(\frac{1+\xi}{\varepsilon}\right) \right] \sigma_m^\circ(\xi) + O(\varepsilon\sigma_m^\circ)$$

Для компенсации главного члена невязки, который имеет порядок σ_m° в окрестности концов стержня, к функции σ_m° необходимо добавить слагаемые σ_m^+ и σ_m^- , зависящие от «быстрых» переменных $\tau_+ = (1 - \xi)/\varepsilon$ и $\tau_- = (1 + \xi)/\varepsilon$. Уравнения для функций σ_m^\pm следуют из (3.8)

и имеют вид

$$(4.7) \quad \alpha_m \sigma_m^\pm(\tau_\pm) - (T_\tau \sigma_m^\pm)(\tau_\pm) = \Phi_0(\tau_\pm) \sigma_m^\circ(\pm 1)$$

$$(T_\tau \sigma_m)(\tau) = \int_0^\infty T_\tau(\tau - \tau') \sigma_m(\tau') d\tau'$$

$$T_\tau(\tau) = \frac{1}{2} (\tau^2 + 1)^{-3/2} \left[1 - \frac{\kappa_0}{1 - \kappa_0} \left(1 - \frac{3\tau^2}{\tau^2 + 1} \right) \right]$$

Численное решение уравнения Винера — Хопфа, аналогичного (4.7), рассматривалось в [1]. Если $\delta^{-1}\varepsilon^2 \ln \varepsilon = o(1)$, то функция $\sigma_m^+((1 - \xi)/\varepsilon)$ и $\sigma_m^-((1 + \xi)/\varepsilon)$ при $\xi = 1$ и $\xi = -1$ соответственно имеют порядок σ_m° и являются функциями типа пограничного слоя, локализованными в окрестности концов стержня. Оставшаяся часть невязки компенсируется слагаемыми порядка $\varepsilon \sigma_m^\circ$ в выражении для σ_m , которыми можно пренебречь по сравнению с главным членом: $\sigma_m^\circ(\xi) + \sigma_m^+((1 - \xi)/\varepsilon) + \sigma_m^-((1 + \xi)/\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь случай $\delta^{-1}\varepsilon^2 \ln \varepsilon = O(1)$. При этом функция $\sigma^\circ(\xi)$ удовлетворяет уравнению (3.7) (при $\alpha(\xi) = 1$) и зависит от двух произвольных постоянных. При подстановке решения (3.7) в левую часть (3.8) и учете (4.3), (4.5) невязка R по-прежнему имеет вид (4.6). Очевидно, что главный член невязки минимален, если функция $\sigma_m^\circ(\xi)$ являясь решением (3.7), удовлетворяет также условиям

$$(4.8) \quad \sigma_m^\circ(-1) = \sigma_m^\circ(1) = 0$$

Эти условия позволяют определить постоянные в общем решении уравнения (3.7). Если $\sigma_m^\circ(\xi)$ удовлетворяет (3.7), (4.8), то выражение для невязки R в (3.8) принимает вид

$$(4.9) \quad R = \varepsilon \left[\Psi\left(\frac{1+\xi}{\varepsilon}\right) D\sigma_m^\circ(-1) - \Psi\left(\frac{1-\xi}{\varepsilon}\right) D\sigma_m^\circ(1) \right] +$$

$$+ O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon \sigma_m^\circ)$$

$$\Psi(t) = \Phi_3(t) - \frac{\kappa_0}{2(1-\kappa_0)} \Phi_1(t), \quad \Phi_3(t) = 1/2 (\sqrt{t^2 + 1} - |t|)$$

где $\Psi((1 \pm \xi)/\varepsilon)$ — функция типа пограничного слоя. Для компенсации главного члена невязки, который теперь имеет порядок $\varepsilon D\sigma_m^\circ$ в окрестности концов стержня, к $\sigma_m^\circ(\xi)$ следует добавить слагаемые $\varepsilon g^-((1 + \xi)/\varepsilon)$ и $\varepsilon g^+((1 - \xi)/\varepsilon)$. Уравнение для функций g^- и g^+ имеют вид, аналогичный (4.7), с правыми частями $\Psi(\tau_-) D\sigma_m^\circ(-1)$ и $-\Psi(\tau_+) D\sigma_m^\circ(1)$ соответственно. Слагаемыми εg^- и εg^+ можно пренебречь по сравнению с $\sigma_m^\circ(\xi)$ всюду, за исключением ε -окрестностей концов стержня, так как функция $\sigma_m^\circ(\xi)$ стремится к нулю при $\xi \rightarrow \pm 1$ в силу (4.8).

Заметим, что при $p \gg 1$ ($\delta^{-1}\varepsilon^2 \ln \varepsilon = o(1)$) решение уравнения (3.7) при $\alpha(\xi) = 1$ с условиями (4.8) мало отличается от (3.6). Исключение составляют окрестности концов стержня, которые представляют собой области экспоненциального пограничного слоя. Следовательно, для построения медленно изменяющейся составляющей главного члена разложения функции $\sigma(\xi)$ по ε и δ достаточно рассмотреть случай $\delta^{-1}\varepsilon^2 \ln \varepsilon = O(1)$. При помощи соответствующих предельных переходов в выражении $\sigma^\circ(\xi)$ для этого случая можно исследовать и другие варианты соотношений между ε и δ . Отметим, что функция типа пограничного слоя, которые входят в главный член асимптотики решения при $\delta^{-1}\varepsilon^2 \ln \varepsilon = o(1)$, не экспоненциальные, а степенные (см. (4.7)). Поэтому функция

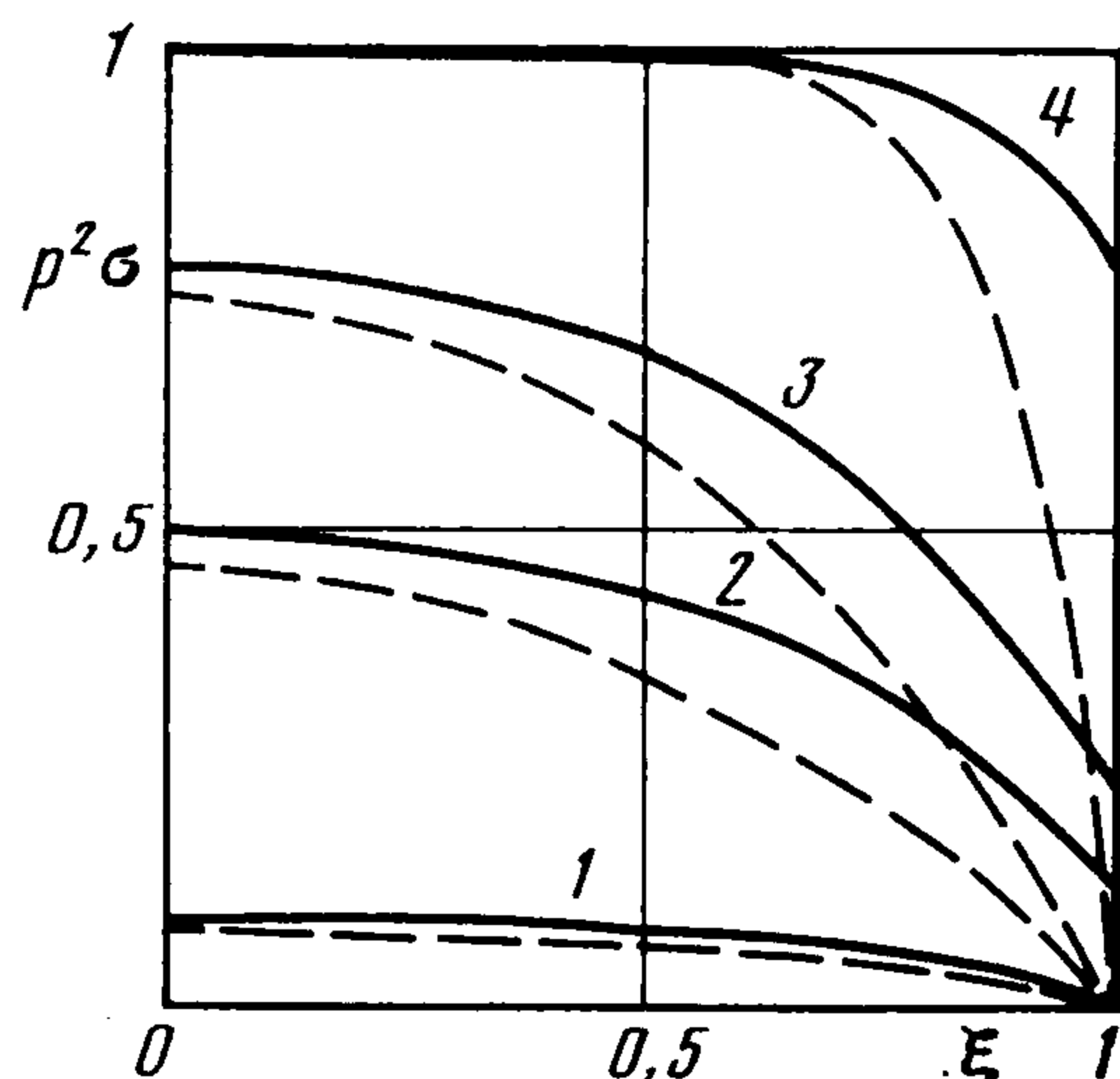
$\sigma^\circ(\xi)$, удовлетворяющая (3.7), (4.8), в случае $p \gg 1$ описывает поведение главного члена решения (3.9) в окрестности концов стержня лишь качественно.

Точность аппроксимации решения уравнения (3.9) функцией $\sigma^\circ(\xi)$, удовлетворяющей (3.7), (4.8), рассмотрим на следующем примере. Найдем решение модельного уравнения, аналогичного (3.9)

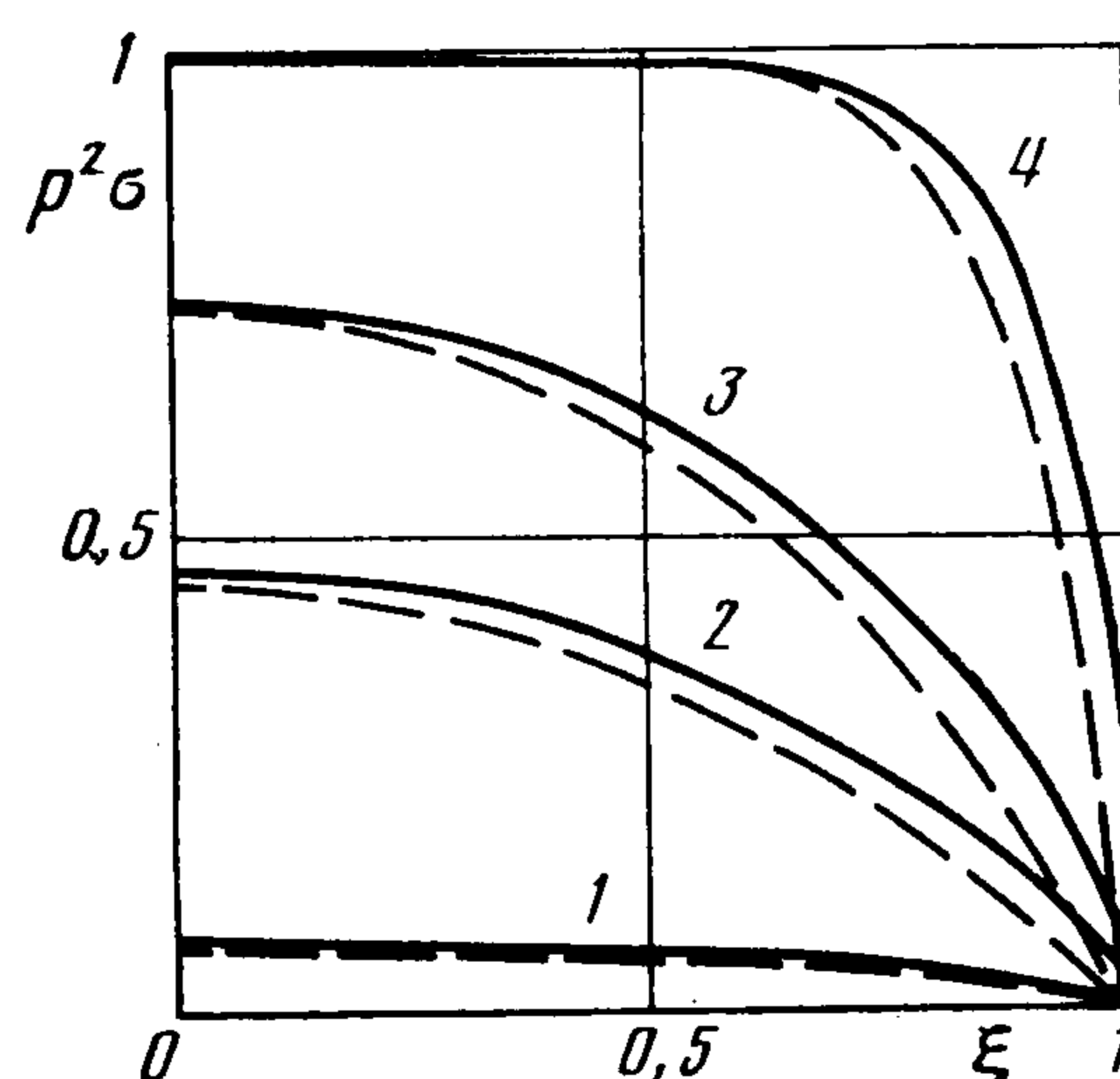
$$(4.10) \quad \alpha_m \sigma - T_1 \sigma = -1/2 \varepsilon^2 \ln \varepsilon, \quad \alpha_m = 1 - 1/2 p^2 \varepsilon^2 \ln \varepsilon$$

где оператор T_1 определен соотношениями (2.7), (2.8) при $\varepsilon(\xi) = \varepsilon$.

Изложенная процедура построения главного члена разложения решения (4.10) в ряд по ε приводит к дифференциальному уравнению $D^2 \sigma^\circ - p^2 \sigma^\circ = -1$ с однород-



Фиг. 1



Фиг. 2

ными граничными условиями (4.8). Отсюда имеем выражение

$$(4.11) \quad \sigma^\circ(\xi) = p^{-2} (1 - \operatorname{ch} p\xi / \operatorname{ch} p).$$

Сравним полученное выражение для главного члена разложения решения (4.10) в ряд по ε с результатами численного решения этого уравнения, представленными на фиг. 1 ($\varepsilon = 0,1$) и фиг. 2 ($\varepsilon = 0,01$) сплошными кривыми, штриховые линии — функция $\sigma^\circ(\xi)$ (4.11). Кривым 1—4 соответствуют значения параметра $p = 0,4; 1,2; 2; 10$. Видно, что отличие $\sigma^\circ(\xi)$ от $\sigma(\xi)$ существенно только в окрестности концов стержня.

Замечание. Рассмотрим невязку с правой частью исходного уравнения (1.1) при подстановке в его левую часть функции $\sigma^\circ(\xi)$, удовлетворяющей (3.7), (4.8). Можно показать, что если $\sigma^\circ(\xi)$ — главный член решения уравнения (1.3), то указанная невязка представляется в форме $R = Q(|\eta|D)\sigma^\circ(\xi)$, где $Q(t)$ — аналитическая функция, разложение которой начинается с членов, линейных по t [1]. Слагаемые, компенсирующие эту часть невязки в выражении для $\sigma(x)$, имеют порядок $\varepsilon \sigma^\circ(\xi)$ всюду, за исключением окрестности концов стержня — область степенного пограничного слоя.

В [5] проводилось сравнение функции $\sigma^\circ(\xi)$, удовлетворяющей (3.7), (4.8) с точным решением задачи о растяжении среды с жестким цилиндрическим стержнем. Это решение строилось методом конечных элементов. Оказалось, что отклонение $\sigma^\circ(\xi)$ от $\sigma(x)$ существенно только в окрестности концов стержня, что соответствует оценкам данной работы.

5. Эллипсоидальный стержень. В этом случае $\varepsilon(\xi) = \varepsilon \sqrt{1 - \xi^2}$, $\alpha(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$. Если $\sigma(\xi)$ — гладкая ограниченная функция порядка единицы, то оценки для $(T_1 \sigma)(\xi)$ и $(T_2 \sigma)(\xi)$, которые можно получить аналогично (4.3), (4.5), принимает вид

$$(T_1 \sigma)(\xi) = \sigma(\xi) - 1/2 \varepsilon^2 \ln \varepsilon D^2 [(1 - \xi^2) \sigma(\xi)] + O(\varepsilon^2)$$

$$(T_2 \sigma)(\xi) = \varepsilon^2 \ln \varepsilon D [(1 - \xi^2) \sigma(\xi)] + O(\varepsilon^2)$$

Таким образом, в отличие от случая цилиндрического стержня, главные члены разложения $(T_1 \sigma)(\xi)$ и $(T_2 \sigma)(\xi)$ в ряд по ε не содержат функций типа пограничного слоя. Отсюда, следует, что если функция $\sigma_m^\circ(\xi)$

ограниченная и удовлетворяет уравнению (3.7) при $\alpha(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$

$$(5.1) \quad D^2 [(1 - \xi^2) \sigma_m^\circ(\xi)] - p^2 \sigma_m^\circ(\xi) = \frac{1 - \kappa_0}{\varepsilon^2 \ln \varepsilon} f_0(\xi)$$

то невязка R в (3.8) принимает вид

$$(5.2) \quad R = O(\varepsilon^2 \sigma_m^\circ)$$

($f_0(\xi)$ и p^2 определены в (3.7), (3.8)).

Отметим, что каждое из двух линейно-независимых решений однородного уравнения (5.1) имеет в окрестности точки $\xi = \pm 1$ особенность типа $(1 - \xi)^{-1}$ или $(1 + \xi)^{-1}$. Поэтому условия ограниченности $\sigma_m^\circ(\xi)$ достаточно для определения постоянных в общем решении уравнения (5.1). Слагаемые в выражении для $\sigma(\xi)$, компенсирующие невязку (5.2) в (3.8), имеют порядок $(\ln \varepsilon)^{-1} \sigma_m^\circ$ при всех $\xi \in [-1, 1]$ и ими можно пренебречь по сравнению с σ_m° .

Если f_0 — постоянная на Γ функция, то ограниченное решение уравнения (5.1) имеет вид

$$(5.3) \quad \sigma_m^\circ = (\varepsilon^2 \ln \varepsilon)^{-1} (2 + p^2)^{-1} (\kappa_0 - 1) f_0$$

и тоже является постоянным. Заметим, что в случае постоянного внешнего поля исходное уравнение (1.1) для эллипсоидальной области V имеет известное точное решение [2]. Можно показать, что главный член асимптотики точного решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma_m^\circ m^\alpha m^\beta$, где σ_m° определяется соотношением (5.3).

6. Стержень в форме остроконечного веретена. В этом случае функция $\varepsilon(\xi)$ имеет вид $\varepsilon(\xi) = \varepsilon(1 - |\xi|)$, $\alpha(\xi) = 1 - |\xi|$.

Вновь обратимся к оценкам действия операторов T_1 и T_2 на гладкую ограниченную функцию $\sigma(\xi)$ порядка единицы. Начнем с оператора T_1 , который представим в виде

$$(6.1) \quad T_1 = T_1^- + T_1^+ \\ (T_1^- \sigma)(\xi) = \int_{-1}^0 T_1^-(\xi, \xi') \sigma(\xi') d\xi', \quad (T_1^+ \sigma)(\xi) = \int_0^1 T_1^+(\xi, \xi') \sigma(\xi') d\xi' \\ T_1^\pm(\xi, \xi') = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 (1 \mp \xi')^2}{[(\xi - \xi')^2 + \varepsilon^2 (1 \mp \xi')^2]^{3/2}}$$

Пусть $H_+(\xi)$ — функция Хевисайда ($H_+(\xi) = 1, \xi > 0; H_+(\xi) = 0, \xi < 0$); $H_-(\xi) = H_+(-\xi)$. Пусть $\sigma_+(\xi)$ — гладкая функция, заданная на положительной полуоси $\xi (R_+)$ и определенная на отрицательной полуоси R_- при помощи процедуры аналитического продолжения. Аналогичную функцию, первоначально заданную на R_- , обозначим $\sigma_-(\xi)$.

Представляя функции $(T_1^\pm \sigma_\pm)(\xi)$ в форме, аналогичной (4.1), и вычисляя входящие туда интегралы, получим

$$(6.2) \quad (T_1 \sigma)(\xi) = \sigma(\xi) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon D^2 [(1 - |\xi|)^2 \sigma(\xi)] + \\ + \Phi_0(\xi/\varepsilon) (\sigma_-(\xi) - \sigma_+(\xi)) - \varepsilon \Phi_1(\xi/\varepsilon) [\sigma_-(\xi) + \sigma_+(\xi) + \\ + D\sigma_-(\xi) - D\sigma_+(\xi)] - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon \Phi_2(\xi, \varepsilon) D^2 [(1 + \xi)^2 \sigma_-(\xi) + \\ + (1 - \xi)^2 \sigma_+(\xi)] - \frac{1}{2} \varepsilon^2 [\sigma_-(\xi) \ln(1 + \xi) + \sigma_+(\xi) \ln(1 - \xi)] + O(\varepsilon^2) \\ \sigma(\xi) = \sigma_-(\xi) H_-(\xi) + \sigma_+(\xi) H_+(\xi)$$

причем функции Φ_0, Φ_1, Φ_2 определены соотношениями (4.4).

Если $\sigma_{\pm}(0) \neq 0$, то сингулярное слагаемое, возникающее при дифференцировании $|\xi|$, здесь необходимо отбросить. С этой же оговоркой можно записать

$$(6.3) \quad (T_2\sigma)(\xi) = \varepsilon^2 \ln \varepsilon D^2 [(1 - |\xi|)^2 \sigma(\xi)] + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 D^2 [(1 - |\xi|)^2 \ln(1 - |\xi|) \sigma(\xi)] + O(\varepsilon^2)$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.7) для главного члена разложения решения (1.3) в ряд по ε и δ ($\delta^{-1}\varepsilon^2 \ln \varepsilon = O(1)$) в случае веретена. Перепишем это уравнение в форме

$$(6.4) \quad D^2 [(1 - |\xi|)^2 \sigma_m^{\circ}(\xi)] - 2q\sigma_m^{\circ}(\xi) = \frac{1 - \kappa_0}{\varepsilon^2 \ln \varepsilon} f_0(\xi), \quad 2q = p^2$$

(величина p^2 и функция f_0 определены в (3.7), (3.8)). Здесь, так же как и в (6.2), (6.3), следует отбросить сингулярное слагаемое, возникающее при дифференцировании $|\xi|$, если $\sigma_m^{\circ}(0) \neq 0$.

Общее решение уравнения (6.4) имеет вид

$$(6.5) \quad \sigma_m^{\circ}(\xi) = \bar{\sigma}_m^{\circ}(\xi) + C_+ (1 - |\xi|)^{\beta_+} + C_- (1 - |\xi|)^{\beta_-} \\ \beta_{\pm} = - (1/2) (3 \pm \sqrt{1 + 8q})$$

где $\bar{\sigma}_m^{\circ}(\xi)$ — ограниченное частное решение уравнения (6.4), C_+ , C_- — произвольные постоянные ($q > 0$).

Поскольку упругое поле в окрестности конической особой точки на границе среды и включения должно быть квадратично интегрируемо [6], то постоянную C_+ в (6.5), стоящую при неинтегрируемой на $[-1, 1]$ функции $(1 - |\xi|)^{\beta_+}$, примем равной нулю.

Подставляя (6.5) при $C_+ = 0$ в левую часть (3.8) и используя оценки (6.2), (6.3), получим, что невязка в окрестности середины стержня ($\xi = 0$) оценивается следующим образом:

$$R = 2\varepsilon [\Phi_1(\xi/\varepsilon) - (\xi/\varepsilon) \Phi_0(\xi/\varepsilon)] C\beta + \\ + 2\varepsilon \Phi_1(\xi/\varepsilon) [\bar{\sigma}_m^{\circ}(0) + C] + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon \sigma_m^{\circ}), \quad \beta = \beta_-, \quad C = C_-$$

Отсюда и из (4.4) видно, что главный член невязки при удалении от середины стержня затухает с асимптотикой $|\xi/\varepsilon|^{-1}$. Если постоянную C выбрать из условия равенства нулю коэффициента при этой асимптотике, то

$$C = -2(2 + \beta)^{-1} \sigma_m^{\circ}(0)$$

При этом асимптотика затухания главного члена невязки определяется функцией $|\xi/\varepsilon|^{-3}$, а выражение для $\sigma_m^{\circ}(\xi)$ (6.7) примет вид

$$(6.6) \quad \sigma_m^{\circ}(\xi) = \bar{\sigma}_m^{\circ}(\xi) - 2(2 + \beta)^{-1} \bar{\sigma}_m^{\circ}(0) (1 - |\xi|)^{\beta}$$

В частности, если f_0 в (6.4) — постоянная, то

$$(6.7) \quad \sigma_m^{\circ}(\xi) = \frac{(1 - \kappa_0)}{2\varepsilon^2 \ln \varepsilon} \frac{f_0}{(1 - q)} \left[1 - \frac{2}{2 + \beta} (1 - |\xi|)^{\beta} \right], \quad q \neq 1 \\ \sigma_m^{\circ}(\xi) = \frac{\kappa_0 - 1}{6\varepsilon^2 \ln \varepsilon} f_0 [1 - 2 \ln(1 - |\xi|)], \quad q = 1; \quad q = - \frac{E_0(1 + \nu_0)}{2E_m \varepsilon^2 \ln \varepsilon}$$

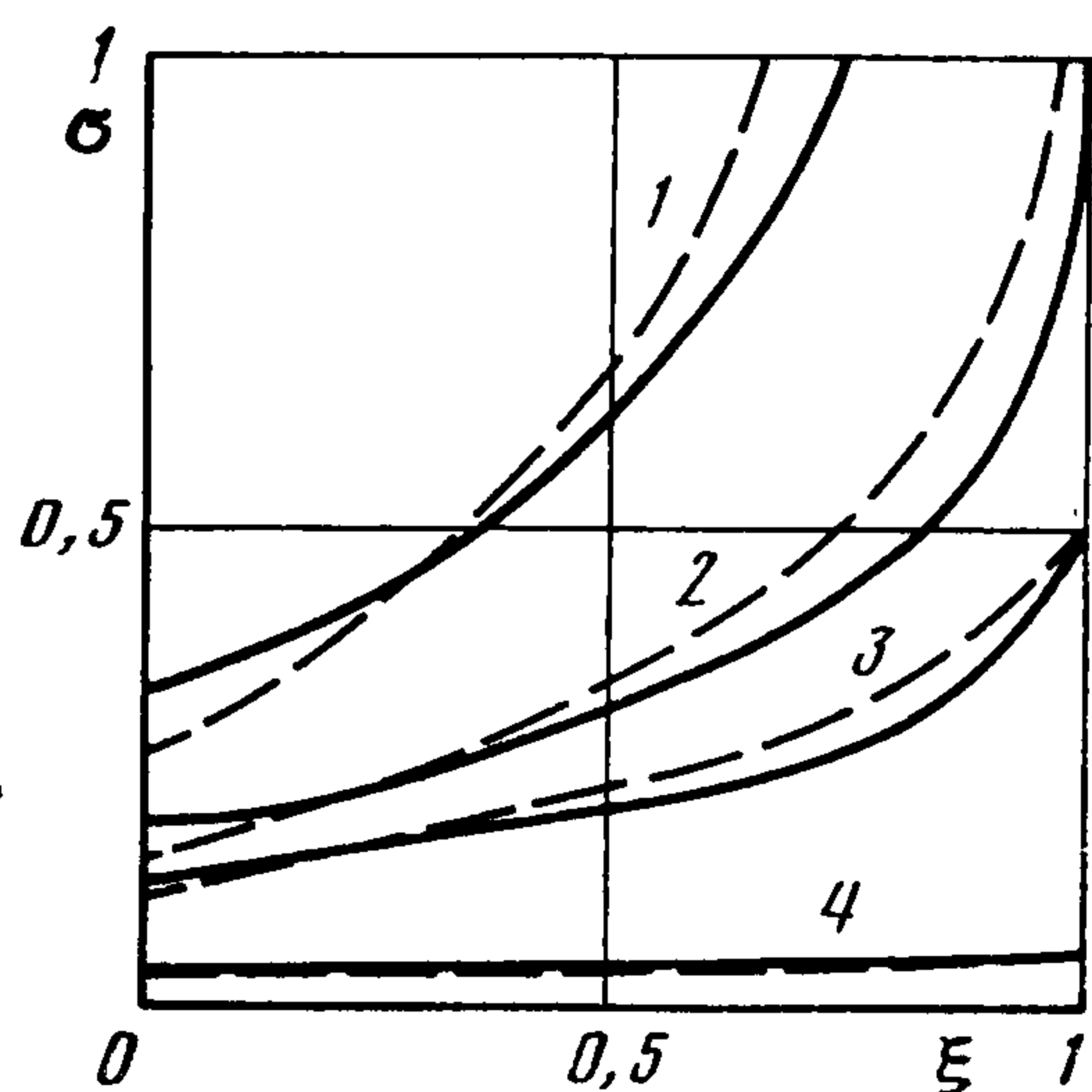
Из (6.6), (6.2), (6.3) следует, что в окрестности концов стержня невязка R в (3.8) имеет как минимум логарифмическую особенность: $R \sim \sim \varepsilon^2 \ln(1 - |\xi|) \sigma_m^{\circ}(\xi)$. Для компенсации этой части невязки к $\sigma_m^{\circ}(\xi)$ следует добавить функции типа пограничного слоя, которые определяют главный член решения в окрестности концов стержня. Уравнение для этих функций можно получить аналогично (4.7).

Сравним (6.6) с численным решением интегрального уравнения (3.9). Проведем такое сравнение на примере модельного уравнения, аналогичного (3.9)

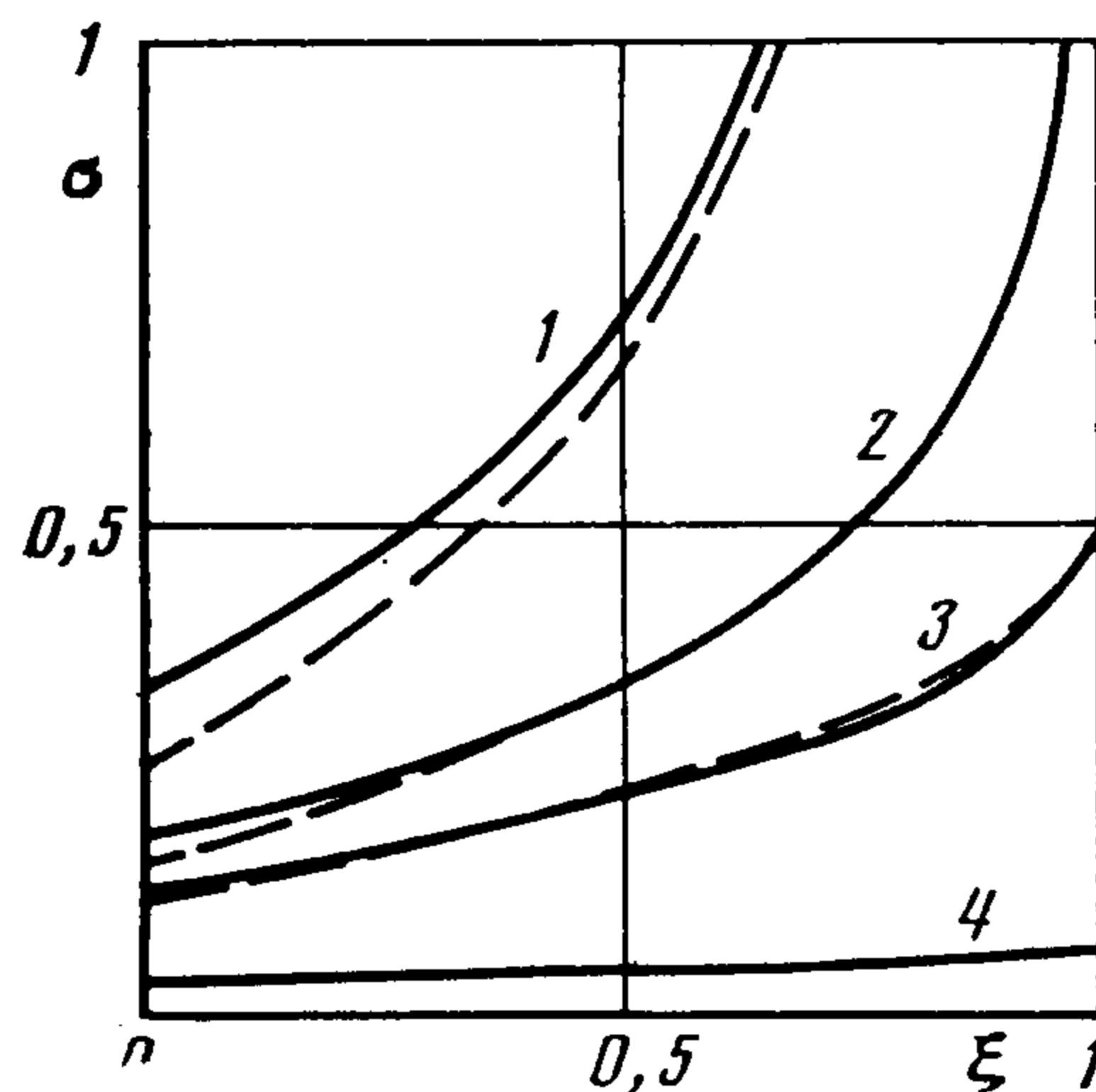
$$(6.8) \quad \alpha_m \sigma - T_1 \sigma = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon, \quad \alpha_m = 1 - q \varepsilon^2 \ln \varepsilon$$

где оператор T_1 определен соотношениями (2.7), (2.8) при $\varepsilon(\xi) = \varepsilon(1 - |\xi|)$. Применив изложенную выше схему получим, что выражение для главного члена $\sigma^\circ(\xi)$ разложения этого уравнения в ряд по ε имеет вид (6.7) при $f_0 = (\kappa_0 - 1)^{-1} \varepsilon^2 \ln \varepsilon$.

Численные решения уравнения (6.8) представлены на фиг. 3 ($\varepsilon = 0,1$) и фиг. 4 ($\varepsilon = 0,01$) сплошными линиями, штриховые линии — функция $\sigma^\circ(\xi)$ вида (6.7). Кривым 1—4 соответствуют значения параметра $q = 0,4; 1,2; 2; 10$. Расхождение между сплошной и штриховой кривыми можно уменьшить, добавляя к $\sigma^\circ(\xi)$ функции типа пограничного слоя, локализованные в окрестности середины стержня и его концов.



Фиг. 3



Фиг. 4

7. Главный член внешнего разложения поля $\varepsilon(x)$. В заключение выпишем главный член внешнего разложения для поля деформаций $\varepsilon(x)$ в среде с жестким стержнем. В случае изотропной среды ядро $K(x)$ оператора \mathbf{K} в (1.1), так же как и функция Грина $G(x)$, с которой $K(x)$ связано соотношениями (1.2), могут быть выписаны в явном виде. Поскольку при $x \in V$ функция $K(x - x')$ в (1.1) гладкая и ограниченная, то на расстояниях от оси стержня, существенно превышающих его поперечный размер, из (1.1) следует равенство

$$(7.1) \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_0(x) - \int_{\Gamma} K(x-z) \cdot \bar{\sigma}(z) dz + O(\varepsilon, \delta)$$

$$\bar{\sigma}(z) = \int_{\omega(z)} \sigma(y + zm) dy, \quad \varepsilon(x) = c_0^{-1} \cdot \sigma(x), \quad \varepsilon_0(x) = c_0^{-1} \cdot \sigma_0(x)$$

Здесь учтено, что $c_1 \cdot c^{-1} = I + O(\delta)$, координаты y_1, y_2, z определены в п. 2.

Подставляя сюда главный член $\sigma^\circ(z)$ разложения поля $\sigma(x)$ внутри стержня в ряд по ε, δ , будем иметь

$$(7.2) \quad \bar{\sigma}^{\alpha\beta}(z) = \sigma_m^\circ(z) s(z) m^\alpha m^\beta + o(\sigma_m^\circ s), \quad s(z) = \pi a^2(z)$$

Заметим, что функции типа пограничного слоя, входящие в выражение для $\sigma^\circ(z)$, дадут пренебрежимо малый вклад (по сравнению с медленно изменяющейся вдоль Γ составляющей $\sigma^\circ(z)$) в величину упругих напряжений и деформаций вдали от стержня. Для вычисления этих деформаций можно воспользоваться соотношениями (7.1), (7.2), где функция $\sigma_m^\circ(z)$ определяется из уравнения (3.7) с дополнительными условиями, зависящими от формы стержня (пп. 4—6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Канаун С. К. Стационарные поля в однородной среде, возмущенные включением в форме криволинейного стержня // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 293—304.
2. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой сплошной среде // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. № 3. С. 571—574.
3. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. Абрамовиц М., Стиган И. М. М.: Наука, 1979. 830 с.
5. Никишков Г. П., Черепанов Г. П. Растяжение упругого пространства с изолированным жестким стержнем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 460—465.
6. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.

Ленинград

Поступила в редакцию
8.II.1988