

УДК 533.6.013.42

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ГИДРОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ

Кантор Б. Я., Квитницкий М. П.

Рассматривается плоская задача гидроупругости об устойчивости шарнирно опертой пластины бесконечного удлинения, заключенной в жесткий экран, при одностороннем обтекании идеальной несжимаемой жидкостью. Получено аналитическое представление элементов матриц осредненных аэродинамических нагрузок. Исследована возможность применения в рассматриваемой задаче метода редукции, т. е. замены бесконечного определителя усеченным. Построены зависимости скорости флаттера от параметров гидроупругости и осевого усилия.

Рассматриваемая задача решалась [1—3] различными методами, причем, предполагая сходимость бесконечного определителя, к которому приводит применение метода Бубнова — Галеркина, авторы ограничивались двумя координатными функциями, а силы, действующие со стороны жидкости, определялись численно. Была найдена лишь граница области статической устойчивости.

**1. Постановка задачи гидроупругости.** Запишем уравнение цилиндрических колебаний пластины, растянутой в направлении потока усилиями  $H$

$$(1.1) \quad Dw_{xxxx} - Hw_{xx} + \varepsilon h\rho_0 w_t + h\rho_0 w_{tt} = p$$

Здесь  $w(x, t)$  и  $p(x, t)$  — прогиб пластины и давление на нее жидкости,  $D$  — изгибная жесткость,  $\varepsilon$  — коэффициент демпфирования,  $h$  — толщина,  $\rho_0$  — удельная плотность материала пластины.

Граничные условия шарнирного закрепления в точках  $x = \pm a$  имеют вид

$$(1.2) \quad w = w_{xx} = 0$$

Потенциал возмущенных скоростей жидкости  $\Phi(x, z, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, условию затухания и условию непротекания

$$(1.3) \quad \Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, \quad z \leq 0$$

$$(1.4) \quad \lim_{r_* \rightarrow \infty} \nabla \Phi = 0, \quad r_* = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Phi_z &= w_t + Vw_x, & x \in [-a; a], & z = 0 \\ \Phi_z &= 0, & x \notin [-a; a], & z = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $V$  — скорость невозмущенного движения жидкости.

Воспользовавшись представлением гармонической функции в виде разности потенциалов простого и двойного слоя (например, [4]) и учитывая, что косинус угла между касательной плоскостью и нормалью к поверхности  $z = w(x, t)$  мал по сравнению с единицей, в силу (1.5) получим

$$(1.6) \quad \Phi(x, 0, t) = 1/\pi \int_{-a}^a (w_t + Vw_x)_{x=x'} \ln \frac{a}{|x-x'|} dx'$$

Давление жидкости определяется из линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа (статическое давление принято равным нулю,  $\rho$  —

плотность жидкости)

$$(1.7) \quad p = -\rho (\Phi_t + V\Phi_x)_{z=0}$$

Подставляя (1.6), (1.7) в (1.1), получим интегродифференциальное уравнение обтекания пластины

$$(1.8) \quad Dw_{xxxx} - Hw_{xx} + \varepsilon h\rho_0 w_t + h\rho_0 w_{tt} = \frac{\rho}{\pi} \int_{-a}^a (w_{tt})_{x=x'} \ln \frac{|x-x'|}{a} dx' + \\ + \frac{2\rho V}{\pi} \int_{-a}^a (w_t)_{x=x'} \frac{dx'}{x-x'} + \frac{\rho V^2}{\pi} \int_{-a}^a (w_x)_{x=x'} \frac{dx'}{x-x'}$$

совпадающее с приведенным в [1] для задачи о бесциркуляционном обтекании симметричного тонкого крыла.

**2. Решение гидродинамической задачи.** Решение уравнения (1.8) найдем методом Бубнова — Галеркина. Примем

$$(2.1) \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( f_{2k-1}(t) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2a} + f_{2k}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \right)$$

Введем обозначения

$$(2.2) \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{x'}{a}, \quad N = \frac{H(2a)^2}{D\pi^2}, \quad \Omega_0 = \frac{\pi^2}{(2a)^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_0 h}} \\ \Omega_j = \Omega_0 \sqrt{j^2 + Nj^2}, \quad \omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega_0}, \quad \tau = \Omega_0 t \\ g = \frac{\varepsilon}{\Omega_0}, \quad u = \frac{V}{2a\Omega_0}, \quad c = \frac{2\rho a}{\rho_0 h} \\ \varphi_1(\xi, \beta) = \int_{-1}^1 \frac{\sin \beta \xi'}{\xi - \xi'} d\xi', \quad \varphi_2(\xi, \beta) = \int_{-1}^1 \frac{\cos \beta \xi'}{\xi - \xi'} d\xi'$$

где интегралы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Подставляя (2.1) в (1.8), применяя процедуру Бубнова — Галеркина и учитывая (2.2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $f_j(\tau)$

$$(2.3) \quad f_j'' + g f_j' + \omega_j^2 f_j + F_j(\tau) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$F_j = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} c \Phi_{jk} f_k'' + 2uc T_{jk} f_k' - 2u^2 c L_{jk} f_k \right)$$

$$\Phi_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos \frac{j\pi\xi}{2} \cos \frac{k\pi\xi'}{2} \ln |\xi - \xi'| d\xi' d\xi, & j = 2m - 1, k = 2n - 1 \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sin \frac{j\pi\xi}{2} \sin \frac{k\pi\xi'}{2} \ln |\xi - \xi'| d\xi' d\xi, & j = 2m, k = 2n \\ 0, & j + k - \text{нечетное} \end{cases}$$

$$T_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1 \left( \xi, \frac{k\pi}{2} \right) \cos \frac{j\pi\xi}{2} d\xi, & j = 2m - 1, k = 2n \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2 \left( \xi, \frac{k\pi}{2} \right) \sin \frac{j\pi\xi}{2} d\xi, & j = 2m, k = 2n - 1 \\ 0, & j + k - \text{четное} \end{cases}$$

$$L_{jk} = \begin{cases} \frac{k}{2} \int_{-1}^1 \varphi_1 \left( \xi, \frac{k\pi}{2} \right) \cos \frac{j\pi\xi}{2} d\xi, & j = 2m - 1, \quad k = 2n - 1 \\ -\frac{k}{2} \int_{-1}^1 \varphi_2 \left( \xi, \frac{k\pi}{2} \right) \sin \frac{j\pi\xi}{2} d\xi, & j = 2m, \quad k = 2n \\ 0, & j + k - \text{нечетное} \quad (n, m = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно представить в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \varphi_1(\xi, \beta) &= A \sin \beta\xi - B \cos \beta\xi, \quad \varphi_2(\xi, \beta) = A \cos \beta\xi + \\ &+ B \sin \beta\xi \\ A &= \text{ci}(\beta + \beta\xi) - \text{ci}(\beta - \beta\xi), \quad B = \pi + \text{si}(\beta + \beta\xi) + \\ &+ \text{si}(\beta - \beta\xi)! \\ \text{si}(x) &= - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \end{aligned}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и интегрируя, получим представление ненулевых элементов матриц осредненных аэродинамических нагрузок через известные функции

$$(2.5) \quad \begin{aligned} L_{jk} &= \left[ \frac{\pi k}{2} + k \text{si}(\pi k) + \frac{(-1)^k - 1}{\pi} \right] \delta_{jk} + \\ &+ \frac{2(-1)^{(j+k)/2}}{\pi(k^2 - j^2)} [\text{ci}(\pi j) - \text{ci}(\pi k) + \ln k - \ln j] (1 - \delta_{jk}) \\ \Phi_{jk} &= \frac{8}{\pi^3 k^2} \left[ \text{ci}(\pi k) - G - (-1)^k \ln 2 - \ln \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{2} L_{kk} \right] \delta_{jk} + \\ &+ \frac{8(-1)^{(k+2jk+j)/2}}{\pi^3 k j (j^2 - k^2)} \left[ (k^2 - j^2) (G + (-1)^{kj} \ln 2) + \right. \\ &+ \left. k^2 \left( -\text{ci}(\pi j) + \ln \frac{\pi j}{2} \right) + j^2 \left( \text{ci}(\pi k) - \ln \frac{\pi k}{2} \right) \right] (1 - \delta_{jk}) \\ L_{jk} &= \Phi_{jk} = 0, \quad j + k = 2n - 1 \\ T_{jk} &= (-1)^{(k+j-1)/2} \left\{ \frac{\pi^2 j}{2(j^2 - k^2)} + \frac{j \text{si}(\pi k) + k \text{si}(\pi j)}{j^2 - k^2} \times \right. \\ &\times [1 + \text{sign}(j - k)] + \left. \frac{j [\text{si}(\pi j) - \text{si}(\pi k)]}{j^2 - k^2} [1 - \text{sign}(j - k)] \right\} \\ T_{jk} &= -T_{kj}, \quad j = 2n - 1, \quad k = 2m; \quad T_{jk} = 0, \quad j + k = 2n \\ &(n, m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

( $\delta_{jk}$  — символ Кронекера;  $G = 0,577 \dots$  — постоянная Эйлера).

В рассматриваемом случае матрицы  $L_{jk}$ ,  $\Phi_{jk}$  симметричны и выполняются соотношения взаимности [5], характерные для неконсервативных задач теории упругой устойчивости  $T_{jk} = (-1)^{k+j} T_{kj}$ .

Решение системы (2.3) будем искать в виде  $f_j = A_j e^{st}$ .

Неизогнутая форма пластины устойчива, если все корни характеристического уравнения

$$(2.6) \quad \det [(s^2 + gs + \omega_j^2) \delta_{jk} + \frac{1}{2} c \Phi_{jk} s^2 + 2uc T_{jk} s - 2u^2 c L_{jk}] = 0$$

лежат в левой полуплоскости [5]. Наименьшее значение  $u$ , при котором хотя бы один из корней  $s$  попадает в правую полуплоскость, является критическим параметром скорости.

3. Исследование сходимости. Используя асимптотические представления интегрального синуса и косинуса [6]

$$\text{si}(x) \sim -\frac{\cos x}{x}, \quad \text{ci}(x) \sim \frac{\sin x}{x}, \quad x \gg 1$$

получим оценки абсолютных величин элементов матриц осредненных аэродинамических нагрузок при  $j, k \gg 1$

$$\begin{aligned} \Phi_{jk} &\leq A_1 \left[ \frac{\delta_{jk}}{k} + \frac{|k^2 - j^2| + k^2 \ln j + j^2 \ln k}{jk |k^2 - j^2|} (1 - \delta_{jk}) \right] \\ T_{jk} &\leq A_2 \left[ \frac{1}{|k - j|} + \frac{k^2 + j^2}{jk |k^2 - j^2|} \right], \quad A_3 B_{jk} \leq |L_{jk}| \leq A_4 B_{jk} \\ B_{jk} &= k \delta_{jk} + jk \frac{|\ln k - \ln j|}{|k^2 - j^2|} (1 - \delta_{jk}) \end{aligned}$$

Здесь и далее  $A_i$  — некоторые постоянные, не зависящие от  $k$  и  $j$ . Как известно [5], бесконечный определитель вида

$$(3.1) \quad \Delta = |\delta_{jk} + d_{jk}|$$

сходится, если сходится двойной ряд (здесь и далее суммирование ведется по  $j$  и  $k$  от 1 до  $\infty$ )

$$(3.2) \quad \sum_j \sum_k |d_{jk}|$$

Определитель, удовлетворяющий этому условию, называется нормальным.

Представим определитель (2.6) в виде (3.1). Для этого  $j$ -ю строку разделим на  $\omega_j$ , а  $k$ -й столбец на  $\omega_k$ . В результате преобразования получим

$$d_{jk} = \frac{s^2 + gs}{\omega_k^2} \delta_{jk} + \frac{1}{2} cs^2 \frac{\Phi_{jk}}{\omega_j \omega_k} + 2ucs \frac{T_{jk}}{\omega_j \omega_k} - 2u^2 c \frac{L_{jk}}{\omega_j \omega_k}$$

Из формулы (2.2) для мембраны при  $D = 0$  следует, что  $\omega_k = k \sqrt{N}$ . Поскольку,  $|k - j| \geq \sqrt{k} + \sqrt{j} \geq 2j^{1/4} k^{1/4}$ , а  $k^2 + j^2 < kj(j + k)$ , то

$$(3.3) \quad \frac{|\Phi_{jk}|}{\omega_j \omega_k} < A_1 \left[ \frac{\delta_{jk}}{k^3} + \frac{1 - \delta_{jk}}{j^2 k^2} + \frac{1 - \delta_{jk}}{j^{5/4} k^{5/4}} \right], \quad \frac{|T_{jk}|}{\omega_j \omega_k} < \frac{2A_2}{j^{5/4} k^{5/4}}$$

Очевидно, что в случае пластины при  $H = 0$  и  $\omega_k = k^2$  аналогичные оценки не только сохраняются, но и усиливаются. Итак, сходимость ряда (3.2) зависит от сходимости ряда

$$S = \sum_j \sum_k \frac{|L_{jk}|}{\omega_j \omega_k}$$

Рассмотрим вначале случай пластины, тогда

$$(3.4) \quad \frac{|L_{jk}|}{\omega_j \omega_k} < A_4 \left[ \frac{\delta_{jk}}{k^3} + \frac{1 - \delta_{jk}}{j^{5/4} k^{5/4}} \right]$$

Двойные ряды, составленные из правых частей неравенств (3.3), (3.4) сходятся, откуда вытекает сходимость ряда (3.2). Следовательно, определитель (2.6) для пластины относится к классу сходящихся (нормальных).

Перейдем к случаю мембраны, тогда

$$S > A_3 \left[ \sum_j \frac{1}{j} + 2 \sum_j \sum_{k < j} \frac{\ln j - \ln k}{j^2 - k^2} (1 - \delta_{jk}) \right]$$

Примем  $j/k = n$ , где  $1 < n < j$ , и введем в рассмотрение функцию  $f(n) = n^2 \ln n / [j^2 (n^2 - 1)]$

Можно показать, что для  $n \in [1; +\infty]$  минимум  $f(n)$  достигается при  $n = 1$  и равен  $1/(2j^2)$ . Учитывая, что число отличных от нуля членов в  $k$ -м столбце равно либо  $j/2$ , либо  $(j \pm 1)/2$ , но не меньше, чем  $j/6$ , получим

$$S > A_5 \sum_j 1/j$$

т. е. как и при сверхзвуковом обтекании [5], достаточный признак сходимости ряда (3.2) в случае мембраны не выполняется.

Сходимость определителя (2.6) исследовалась численно с удержанием в разложении прогиба различного числа (до двенадцати) координатных функций. Результаты вычислений показали, что определитель (2.6) сходится и в случае мембраны, но вклад высших форм в картину колебаний значительно более существен, чем для пластины.

Например, для пластины амплитуды третьей и пятой форм, отнесенные к амплитуде первой формы, составляют соответственно 0,44 и 0,23%, а для мембраны — 8 и 1%. Поэтому если для пластины двучленное приближение оправдано, то в случае мембраны целесообразно использовать большее число координатных функций.

В общем случае пластины, где  $D$  и  $H$  отличны от нуля,  $\omega_k^2 = k^4 + Nk^2$ . Очевидно, что всегда можно выбрать такое конечное число  $k$ , чтобы выполнялось неравенство  $\omega_k > A_6 k^{15/8}$ . Тогда при достаточно больших  $j$  и  $k$  имеем

$$\frac{|L_{jk}|}{\omega_j \omega_k} < A_7 \left[ \frac{\delta_{jk}}{k^{22/8}} + \frac{1 - \delta_{jk}}{j^{9/8} k^{9/8}} \right]$$

и, следовательно, ряд (3.2) сходится, причем сходимость тем медленнее, чем больше  $N$ , т. е. чем больше пластина приближается к мембране.

Итак, при дозвуковом обтекании определитель (2.6) сходится как для пластины, так и для мембраны.

**4. Численные результаты.** Сохраняя в разложении (2.1) два первых члена, получим, что флаттеру предшествует статическая потеря устойчивости (дивергенция по первой форме). Аналогичная картина наблюдалась и в эксперименте [7]. Критическая скорость дивергенции для пластины равна

$$(4.1) \quad V_* = 1,137 \left[ \frac{D\pi^3}{\rho(2a)^3} \right]^{1/2}$$

В работах [1—3] для коэффициента в правой части (4.1) получено значение 1,440. Использование большего числа членов в разложении (2.1) практически не меняет результат (например, удержание четырех членов ряда уменьшает указанный коэффициент лишь на 0,04%).

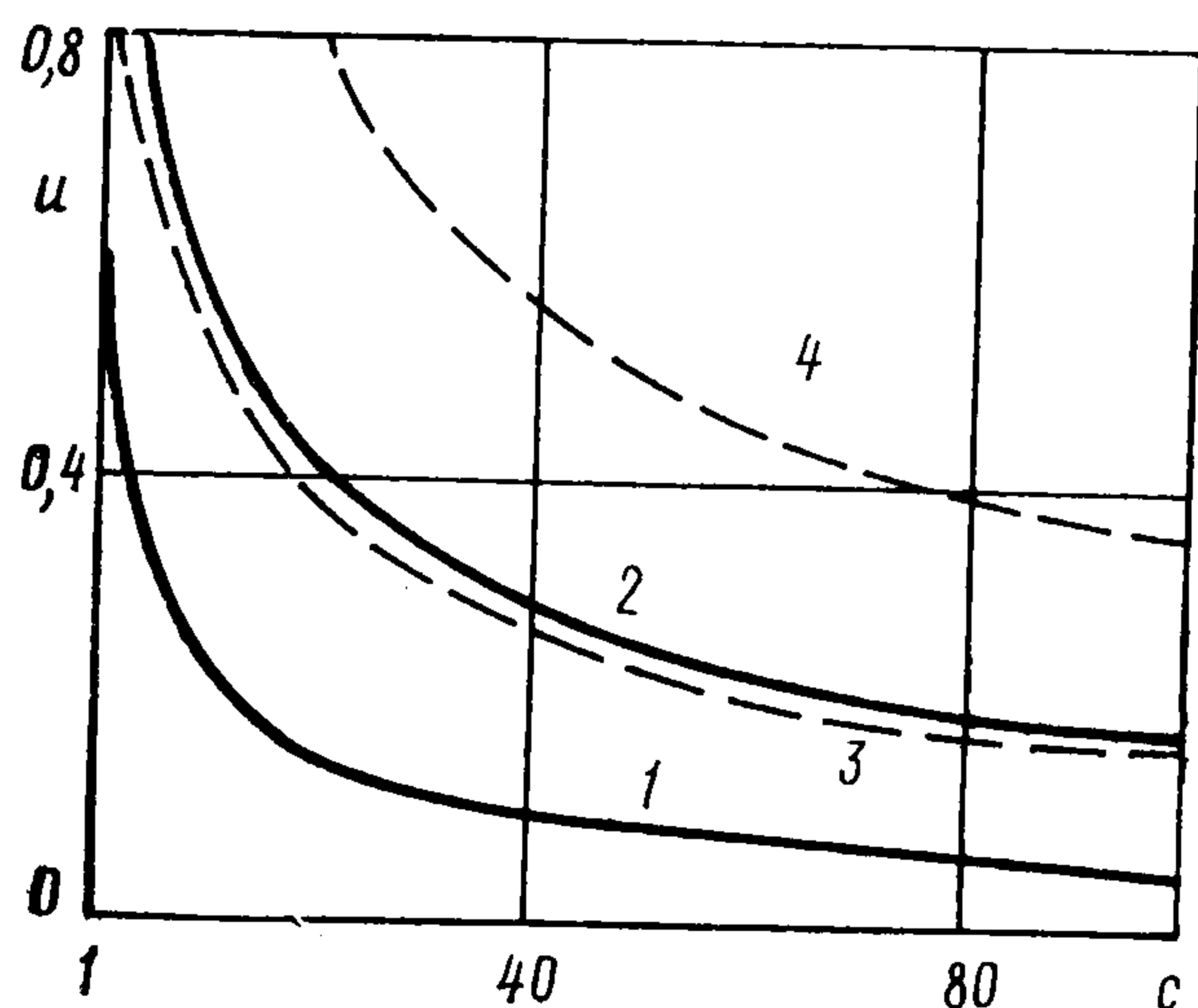
При учете двух членов разложения (2.1) условие возникновения флаттера имеет вид

$$(4.2) \quad \Delta_{12} + \Delta_{21} + T_{12}^2 c^2 u^2 - 4\Delta_{12}\Delta_{21} = 0 \\ \Delta_{jk} = (1 + 1/2 c \Phi_{jj}) (\omega_k^2 - 2cu^2 L_{kk}), \quad j, k = 1, 2$$

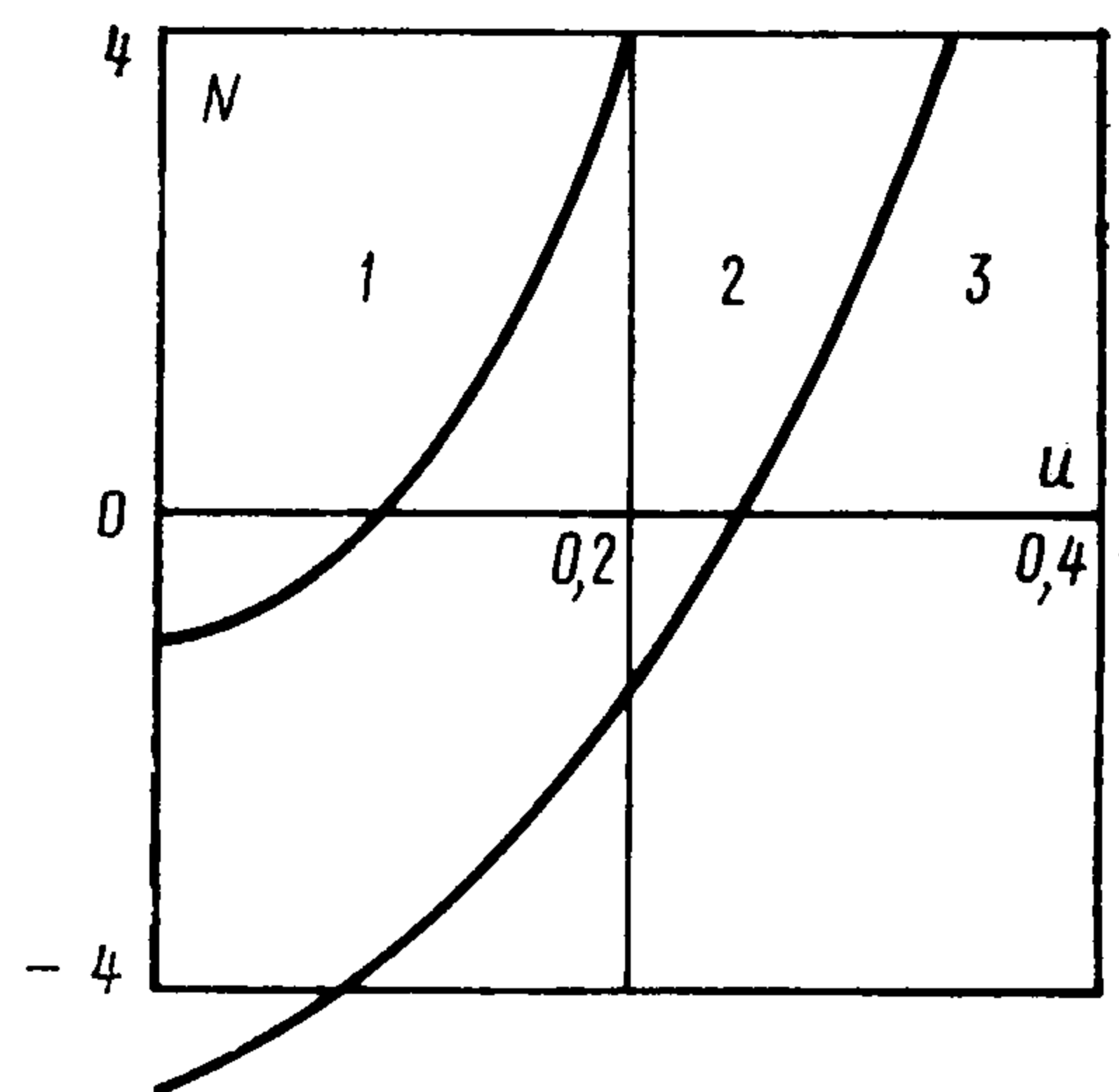
При выводе соотношения (4.2) величину  $g$  полагали равной нулю, так как было показано [2], что демпфирование не оказывает влияния на величину скорости флаттера.

Результаты расчетов скоростей дивергенции и флаттера при  $N = 0$  представлены на фиг. 1 (кривые 1, 2 соответствуют формулам (4.1), (4.2)). Полученная граница области статической устойчивости (кривая 1) совпадает с приведенной в работах [1—3]. В упомянутых работах не было получено решение задачи определения скорости флаттера. Кривые 3 и 4, ограничивающие область, внутри которой должно находиться искомое решение, построены по результатам качественного анализа, проведенного в [2]. В данной работе получена граница области флаттера при сохранении в разложении (2.1) двух первых членов ряда (кривая 2).

Границы областей неустойчивости, как функции скорости и осевого усилия для пластины с параметром  $c = 50$ , приведены на фиг. 2 (1 — область устойчивости, 2 — дивергенции, 3 — флаттера). Дозвуковой поток, в отличие от сверхзвукового (например, [8]), оказывает на пластину дестабилизирующее влияние, уменьшая величину



Фиг. 1



Фиг. 2

критического усилия сжатия. При сжимающих усилиях, значительно превышающих критическое в вакууме ( $N = -1$ ), пластина сразу попадает в область флаттера. Аналогичная картина имеет место и для сверхзвукового обтекания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Покровский Л. Н. Метод исследования аэроупругой устойчивости пологих оболочек, обтекаемых потоком несжимаемой жидкости // Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 7, С. 70—77.
2. Уивер Д. С., Юнни Т. Е. Гидроупругая устойчивость плоской пластины // Прикл. механика: Тр. амер. о-ва инж.-механ. 1970. Т. 37. № 3. С. 251—256.
3. Эллен К. Н. Устойчивость свободно опертых прямоугольных поверхностей в однородном дозвуковом потоке // Прикл. механика: Тр. амер. о-ва инж.-механ. 1973. Т. 40. № 1. С. 74—79.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
5. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
6. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.: Физматгиз, 1959. 420 с.
7. Догунджи Д., Доуэлл Е., Перкин Б. Дозвуковой флаттер панелей на непрерывном упругом основании // Ракетн. техника и космонавтика. 1963. Т 1. № 5. С. 155—167.
8. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.

Харьков

Поступила в редакцию  
19.II.1987