

УДК 533.6.011.72

**ДИФРАКЦИЯ ПЕРЕСЖАТОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ,
РЕГУЛЯРНО ОТРАЖЕННОЙ ОТ СТЕНКИ,
НА МАЛОМ ЕЕ ИЗЛОМЕ**

Тер-Минасянц С. М., Урмамбетов С. М.

Решается задача о дифракции на малом изломе стенки ε пересжатой детонационной волны, являющейся регулярным отражением плоской ударной волны. Свойства среды, интенсивность и угол падения ударного фронта предполагаются такими, что фронт не вызывает детонации, а отраженный инициирует и осуществляет ее исчерпывающе. Строится точное решение, отличающееся от решений для ударных волн [1, 2] лишь осложнениями выражений входящих в него параметров через параметры невозмущенного регулярного отражения [3].

Интенсивность падающего фронта, допускавшаяся произвольной при отсутствии теплоподвода, при его наличии связана с ним, как и другие параметры, условием допустимости решений указанного типа. Это вызывается осложнениями, характерными для одновременного присутствия двух малых параметров, вторым из которых может явиться степень пересжатия ι ($0 < \iota \leq 1$). Однако при конечных ι это условие не вносит ограничений: интенсивность остается произвольной.

Для тех значений определяющих параметров, которые допускают решения указанного типа, эти решения радикально упрощаются путем разложения их в ряды по степеням ι в окрестности значения $\iota = 0$, хотя при этом значении ι они не имеют смысла. Удерживаются лишь линейные члены. Давление вдоль фронта, его форма и давление на стенку представляются в простом обозримом виде, причем последнее — выражениями того же типа, что и при дифракции акустической волны (с дополнительными слагаемыми).

Упрощенные решения близки к точным и при умеренных конечных ι . Поэтому их можно считать приближенными решениями для пересжатых детонационных волн произвольной интенсивности.

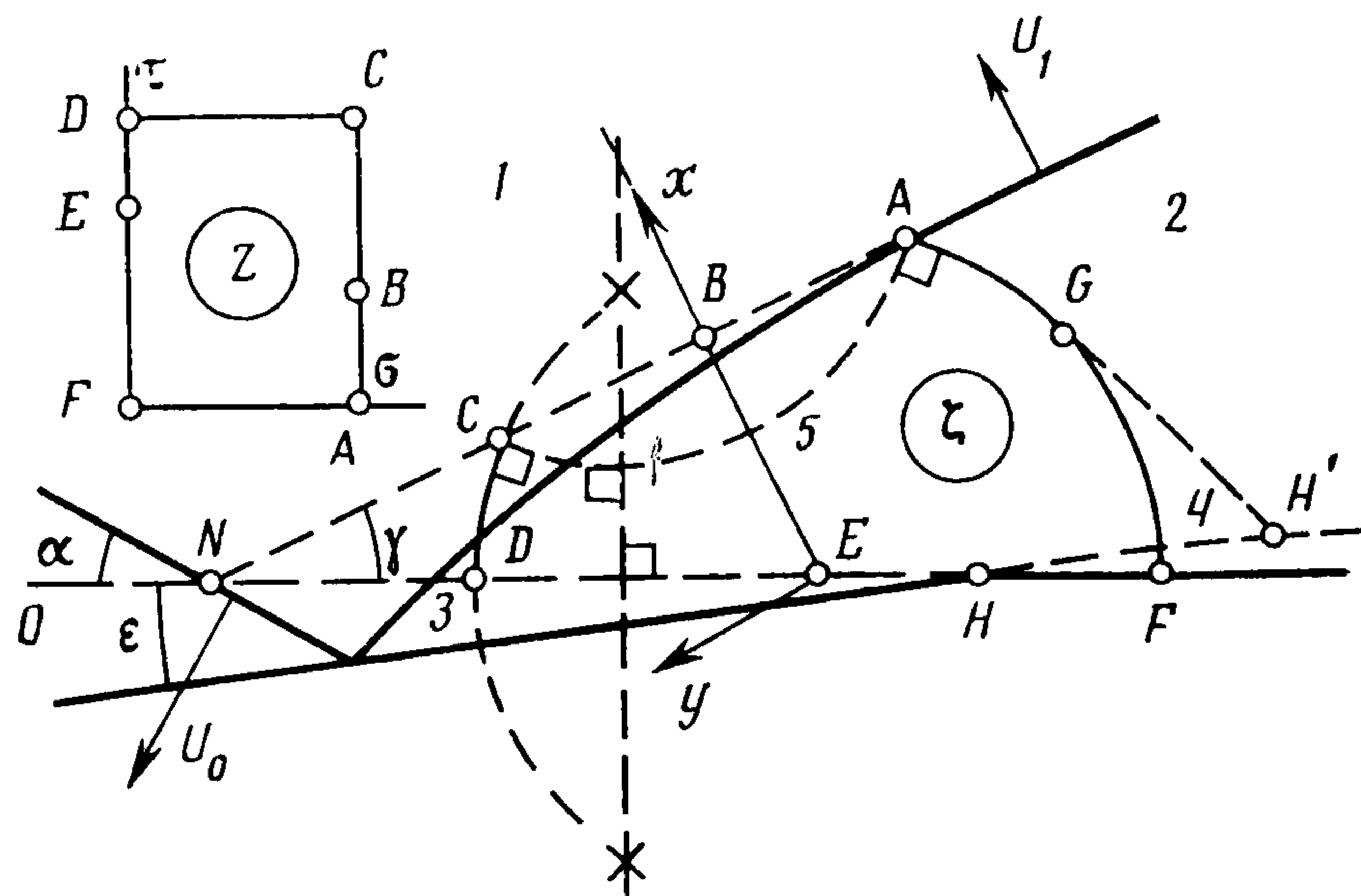
Ранее была рассмотрена дифракция детонационной волны, теплоподвод в которой является малой величиной [4].

1. Картина течения. Фронт плоской ударной волны, распространяясь по горючей смеси газов, падает под конечным углом α на жесткую стенку и регулярно отражается от нее. Горение происходит мгновенно в отраженном пересжатом детонационном фронте. Такое отражение рассмотрено в [3]. Чтобы пренебречь нелинейными эффектами [5], предполагается, что величина угла α находится вне непосредственной близости своего максимально возможного значения при регулярном отражении.

В момент времени $t = 0$ точка отражения N (фиг. 1) проходит через точку излома стенки H на малый угол ε ($\varepsilon > 0$, если излом выпуклый), а за искривляющимся отраженным фронтом начинает расширяться ограниченная им, стенкой и дугами окружности Маха (центр E которой — в частице, находящейся при $t = 0$ в точке N) область неоднородного потока $ABCDEF$, граничащая через дуги CD и AF (или AG и GF) с однородными потоками. Точка H может оказаться как внутри этой области, так и вне ее (H'). В последнем случае к ней примыкает область однородного потока — сверхзвукового обтекания излома стенки FGH' . Соответствующие случаи дифракции названы до- и сверхзвуковыми.

Исследуемое движение есть малое возмущение однородного потока прореагировавшей газовой смеси, движущейся за плоским отраженным фронтом, наклоненным к стенке под конечным углом γ . Линеаризованные краевые условия сносятся на контур $ABCDEF$, содержащий участок ABC невозмущенного отраженного фронта.

Области различных однородных потоков помечены на фиг. 1 цифрами 0 — 4, а обозначения давления p , плотности ρ , скорости звука a , показателей политропы κ , относящиеся к этим областям, ниже помечены соответствующими индексами ($\kappa_0 = \kappa_1$, $\kappa_4 = \kappa_3 = \kappa_2$). Для скоростей падающего и отраженного фронтов относительно сред перед ними вводятся обозначения $U_0 = M_0 a_0$ и $U_D = M_D a_1 = a_1 (\kappa_2/\kappa_1)^{1/2} M_d$.



Фиг. 1

Выделение тепла в детонационном фронте характеризуется величиной Q , через которую выражается теплотворная способность газовой смеси $a_0^2 Q / (\kappa_1 - 1)$ и скорость $U_J = a_1 M_J$ распространения детонационного фронта в режиме Чепмена — Жуге, причем

$$(1.1) \quad M_J = Q_0^{1/2} + \left(Q_0 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{1/2} = \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{1/2} M_j$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1 - 1} \left[(\kappa_2 - 1) Q \frac{a_0^2}{a_1^2} - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1} \right]$$

Вводится параметр ι , степень пересжатия детонационной волны

$$(1.2) \quad \iota^4 = (M_d^2 - M_j^2)(M_d^2 - M_j^{-2})(M_d^2 - 1)^{-2}$$

При $\kappa_1 = \kappa_2$ (1.2) сводится к $\iota^4 = 1 - Q/Q_J$, где Q_J отвечает $\iota = 0$.

Среди определяющих параметров отсутствует характерный линейный размер; движение автомодельно.

Если $\kappa_1 = \kappa_2$, то при $M_J = 1$ имеем $\iota = 1$; детонационная волна является просто ударной волной, а при $M = M_J$, $\iota = 0$ — детонационной волной Чепмена — Жуге.

Законы сохранения на поверхностях разрывов с различными значениями показателя политропы по разные их стороны [6] позволяют записать связь значений параметров потоков в областях 1 и 2 (V_1, V_2 — скорости газа за фронтами относительно газа перед ними)

$$(1.3) \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_2 + 1} (M_d^2 - 1)(1 + \iota^2),$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{1}{\kappa_2 + 1} (1 - M_d^{-2})(1 + \iota^2)$$

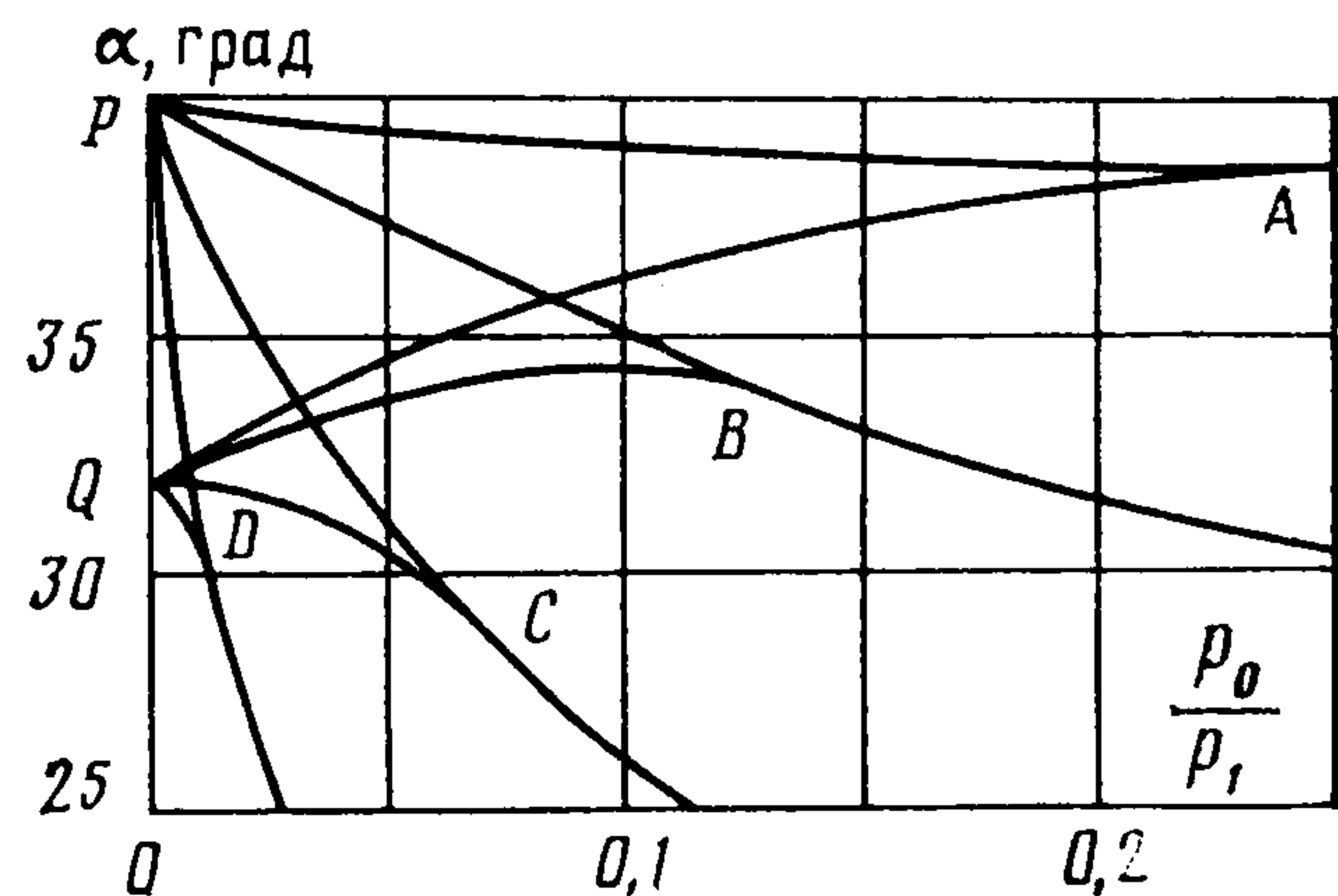
$$V_2 = \frac{U_D}{\kappa_2 + 1} (1 - M_d^{-2})(1 + \iota^2), \quad W_2 = V_2 \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\sin \beta}$$

В частных случаях эти формулы дают связь параметров потоков в областях 0 и 1; они получаются при $\iota = 1$ заменой индексов 2 на 1, 1 и D на 0, суммы $\beta + \gamma$ на α ; W_1 и W_2 — скорости потоков в областях 2 и 1 относительно точки отражения N ; β — угол поворота потока при переходе через падающий фронт. Скорость U_D выражается через угол γ : $U_D = W_1 \sin(\beta + \gamma)$, а угол γ находится из уравнения третьей степени [3]. Скорость потока в области 2 относительно стенки равна

$$(1.4) \quad V_W = a_2 M_W, \quad M_W = M_0 (a_0/a_2) \operatorname{cosec} \alpha - M, \quad M = W_2/a_2$$

Это выражение определяет положением точек H или H' до- или сверхзвуковой случай дифракции, а в последнем случае и острый угол θ_G' между радиусом EG и стенкой: $\sec \theta_G' = M_W$, $M_W > 1$. Если $\iota = 1$ и $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,4$, то, как показано в [2], точка G не может достичь точки A . При $\iota < 1$ и $\kappa_1 = \kappa_2 < 1,4$, как показывают расчеты, этого тем более не может быть.

Границы сверхзвуковых случаев даны на фиг. 2. В координатах p_0/p_1 , α с параметром $Q = 0,1; 1; 5; 20$ это — области APQ , BPQ , CPQ и DPQ . Каждая из них ограничена линией, которая ответвляется от соответствующей



Фиг. 2

границы регулярности, и все они имеют общий участок границы — вертикальный отрезок PQ , где $p_0/p_1 = 0$. Можно заметить, что они отвечают лишь очень сильно пересжатым волнам.

2. Краевая задача. Начало автомоделных координат x, y свяжем с точкой E , ось x направим перпендикулярно, а y — параллельно невозмущенному отраженному фронту. Эти координаты образуются из координат X, Y : $x = (X - V_2 t)/(a_2 t)$, $y = Y/(a_2 t)$, связанных с потоком перед отраженным фронтом, координата которого

$$(2.1) \quad x = m = M \sin \gamma = \left(\frac{1 + \kappa_2 M_d^2 - (M_d^2 - 1) \iota^2}{1 + \kappa_2 M_d^2 + \kappa_2 (M_d^2 - 1) \iota^2} \right)^{1/2}$$

Параметры неоднородного газового потока в области 5, помеченные чертой сверху, имеют выражения

$$\bar{p} = p_2 + p', \quad \bar{\rho} = \rho_2 + \rho', \quad \bar{u} = V_2 + u', \quad \bar{v} = v'$$

Штрихами помечены возмущения, заменяемые безразмерными функциями

$$p = p' / (\rho_2 a_2^2), \quad \rho = \rho' / \rho_2, \quad u = u' / a_2, \quad v = v' / a_2$$

Уравнение искривленного участка отраженного фронта с учетом (2.1) запишем в виде $x = m + f(y)$, где f — безразмерная функция порядка ϵ .

Ниже всюду вплоть до окончания постановки и построения решения задачи предполагается, что $\iota \neq 0$ — конечная величина. Тогда тем же путем, что и в [2], можно получить на дифрагирующем отраженном фронте условия

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{\kappa_2 + 1} \frac{M_d^2 + 1}{M_d^2} \frac{1 + \iota^2}{\iota^2} (f - yf') \\ v &= -\frac{1}{\kappa_2 + 1} \frac{a_1}{a_2} \frac{M_d^2 - 1}{M_d^2} M_D (1 + \iota^2) f' \\ p &= \frac{1}{\kappa_2 + 1} \frac{a_1}{a_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[2 + \frac{M_d^2 + 1 + (M_d^2 - 1) \iota^4}{M_d^2 \iota^2} \right] M_D (f - yf') \end{aligned}$$

Теми же преобразованиями, что и в [2], из этих условий получаются зависимости

$$(2.3) \quad u = Ar, \quad y \partial v / \partial y = B \partial p / \partial y$$

$$A = \frac{1-C}{m}, \quad B = \frac{\rho_2}{\rho_1} C, \quad C = \frac{(M_d^2 - 1) \iota^2}{M_d^2 + 1 + (M_d^2 - 1) \iota^2}$$

Система уравнений плоского нестационарного автомодельного движения газа линейризуется по параметру ε и после исключения функций ρ , u , v перехода к полярным координатам $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ и преобразования Буземана $r = 2R/(1 + R^2)$ переходит в уравнение Лапласа для возмущения давления p внутри единичного круга. Образом искривленного участка AC детонационного фронта оказывается дуга окружности $2R \cos \theta = m(1 + R^2)$, показанная штрихами на фиг. 1, ортогональная к окружности $R = 1$. Остальные элементы границы области неоднородного потока не меняют своих очертаний, но соответствие точек вдоль стенки меняется.

Получаемый криволинейный четырехугольник с ортогонально пересекающимися сторонами конформным преобразованием

$$z = \ln \frac{\zeta - \exp i\theta_2}{\zeta - \exp i\theta_1} - i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

$$\theta_1 = \arcsin M^{-1} - \gamma, \quad \theta_2 = \pi - \arcsin M^{-1} - \gamma$$

отображается на прямоугольник плоскости $z = \sigma + i\tau$ (фиг. 1)

$$(2.4) \quad 0 < \sigma < l, \quad 0 < \tau < \pi$$

$$l = -\frac{1}{2} \ln q, \quad q = \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma (M^2 - 1)^{1/2}}{1 + \operatorname{tg} \gamma (M^2 - 1)^{1/2}}$$

При этом сначала дробно-линейная функция, посылающая точки, отмеченные крестиками на фиг. 1, в 0 и ∞ , переводит область в полукольцо, а затем логарифмическая — в прямоугольник.

Точки G и H в плоскости z приобретают координаты

$$\sigma_G = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos(\theta_G - \theta_2)}{1 - \cos(\theta_G - \theta_1)}, \quad \tau_G = 0$$

$$\sigma_H = 0, \quad \tau_H = \arccos \frac{1 + MM_W}{M + M_W}$$

Краевые условия на стенке ($\partial p / \partial n = 0$) и на дугах Маха ($\partial p / \partial s = 0$ или заданный скачок давления; s — координата вдоль контура) совпадают с приведенными в [2].

Как и в случае ударной волны, вся система краевых условий может быть записана единым соотношением

$$(2.5) \quad P(\partial p / \partial \sigma) - Q(\partial p / \partial \tau) = S$$

в котором при $\sigma = l$, $0 < \tau < \pi$ $P/Q = b(\tau)$, $S = 0$; $P = 1$, $Q = 0$, $S = \varepsilon M_W^2 (1 - M_W^2)^{-1/2} \delta(\tau - \tau_H) = s_- \delta(\tau - \tau_H)$ в дозвуковом ($M_W < 1$) и $S = \varepsilon M_W^2 (M_W^2 - 1)^{-1/2} \delta(\sigma - \sigma_G) = s_+ \delta(\sigma - \sigma_G)$ в сверхзвуковом случаях на остальной части контура. Коэффициент $b(\tau)$ и входящий в него параметр m_0 имеют выражения

$$b(\tau) = \frac{m_0^2 M (M^2 - 1)^{1/2} \operatorname{tg} \gamma (m_0 - M \cos \tau) \sin \tau}{m m_0^2 A (m_0 - M \cos \tau)^2 - M^2 B \operatorname{tg}^2 \gamma (M - m_0 \cos \tau)^2}$$

$$m_0 = [1 - (M^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \gamma]^{1/2}$$

Соотношение (2.5) — краевое условие неоднородной задачи Гильберта [7,8] для функции $\Gamma = \partial p / \partial \sigma - i \partial p / \partial \tau$ с коэффициентами, разрывными в точках A и C .

Искомое решение должно удовлетворять еще двум нормировочным условиям (Δv и Δp — разности значений v и p в областях 2 и 3)

$$(2.6) \quad B \int_0^{\pi} \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{y(\tau)} = \Delta v, \quad \int_0^{\pi} \frac{\partial p}{\partial \tau} d\tau = \Delta p$$

первое из которых получается из второй формулы (2.3), а второе очевидно.

Описанная постановка задачи представляется такой же, как и при отсутствии теплоподвода в ударной волне; однако он входит в фигурирующие здесь параметры через законы сохранения на детонационном фронте.

3. Давление на стенку и вдоль фронта и форма фронта. Общее решение поставленной краевой задачи подробно представлено в работе [2] и здесь опущено. Однако подвергаемые ниже упрощениям выражения распределения давления вдоль дифрагированного фронта и вдоль стенки хорошо отражают структуру этого решения. Они соответственно имеют вид

$$(3.1) \quad \frac{\partial p(l+i\tau)}{\partial \tau} = |\Lambda| \frac{b(\tau)L}{\sqrt{b^2(\tau)+1}} \frac{1-k\xi}{1+k\xi} \left[c(\xi - \xi_0) - \frac{c_0}{\sqrt{k}} \frac{\xi^2+1}{\xi - \xi_{G,H}} \right]$$

$$\frac{\partial p(i\tau)}{\partial \tau} = \Lambda \operatorname{Im}(L) \frac{1-k\xi}{1+k\xi} \left[c(\xi - \xi_0) - \frac{c_0}{\sqrt{k}} \frac{\xi^2+1}{\xi - \xi_{G,H}} \right]$$

Функции L и ξ выражаются через эллиптические тэта-функции $\vartheta_1, \dots, \vartheta_4$ [9], модуль k которых зависит от величины q (2.4)

$$k^2 = 1 - k'^2, \quad 2Kk' = \pi (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots)^2$$

$$2K = \pi (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2$$

В первом выражении (3.1) функции L и ξ на образе фронта имеют аргументом $l+i\tau$, во втором — на образе стенки — величину $i\tau$; в обоих выражениях на образе дуги Маха (точка G) аргументом является величина σ_G . Эти функции представляются формулами

$$L(l+i\tau) = k^{1/2} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, \quad \operatorname{Im} L(i\tau) = -k^{1/2} \frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}, \quad \operatorname{Im} L(\sigma) = -k^{1/2} \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}$$

$$\xi(l+i\tau) = -k^{-1/2} \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}, \quad \xi(i\tau) = -k^{-1/2} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad \xi(\sigma) = -k^{-1/2} \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}$$

Аргументам $l+i\tau$ и $i\tau$ функций L и ξ отвечает зависимость тэта-функций от τ , q , а аргументу σ — от σ , q' ($\ln q \ln q' = \pi^2$). Постоянная c_0 и составляющие ее величины даются формулами

$$c_0 = \frac{k^{1/2} s_{\pm} |\xi'_{\sigma, \tau}(\sigma_G, \tau_H)|}{\pi \Phi_{\pm}(\xi_{G,H}) (\xi_{G,H}^2 + 1)}, \quad s_{\pm} = \frac{\varepsilon M_W^2}{\sqrt{\pm 1 + M_W^2}},$$

$$\Phi_{\pm} = -\operatorname{Im} \Phi(\xi_{G,H})$$

$$\Phi = \Lambda L \frac{1-k\xi}{1+k\xi}, \quad \xi'_{\sigma} = -\frac{2Kk'}{\pi k^{1/2}} \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_3^2}, \quad \xi'_{\tau} = -\frac{2Kk'}{\pi k^{1/2}} \frac{\vartheta_1 \vartheta_4}{\vartheta_3^2}$$

Здесь в выражении ξ'_{τ} тэта-функции зависят от τ , q , а в выражении ξ'_{σ} — от σ , q' ; индексы G или H у величины ξ указывают образы точек, к которым относится значение ξ , а индексы σ и τ — переменные, по которым ведется дифференцирование; индексы плюс и минус соответствуют до- и сверхзвуковым случаям.

Функция Λ в любой точке области (2.4) или ее контура согласно [2] представляется рядом

$$\Lambda(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{\operatorname{ch} nz}{\operatorname{sh} nl}, \quad g_n = -n^{-1} [4 - (F_1^n + F_2^n) - (F_3^n + F_4^n)]$$

Суммы $F_1^n + F_2^n$ могут быть найдены по рекуррентным формулам

$$(3.2) \quad \begin{aligned} F_1^n + F_2^n &= [(F_1^{n-1} + F_2^{n-1})(H^2 - 1) - 2H\Delta_{n-1}(1 - D_1^2)]G, \\ n &\geq 2 \\ \Delta_{n-1} &= [\Delta_{n-2}(H^2 - 1) + 2H(F_2^{n-2} + F_3^{n-2})]G_1^{-1}, \quad n \geq 3 \\ F_1 + F_2 &= 2(H^2 - 1)/G_1, \quad \Delta_1 = 4H/G_1 \\ G_{1,2} &= H^2 + 1 + 2HD_{1,2}, \quad H = [(M + m_0)/(M - m_0)]^{1/2} \end{aligned}$$

Формулы (3.2) определяют также и сумму $F_3^n + F_4^n$, если заменить в них всюду F_1 на F_3 , F_2 на F_4 , G_1 на G_2 (величину Δ_i можно при этом обозначить через $\bar{\Delta}_i$) и D_1 на D_2 .

Величины $D_{1,2}$ выражаются через исходные параметры задачи зависимостями [2]

$$D_{1,2} = \frac{1 - m^2 + [(1 - m^2)^2 - 4mB[(1 - m^2)A - mB]]^{1/2}}{2[(1 - m^2)A - mB]}$$

Коэффициенты c и ξ_0 , определяемые условиями (2.6), и нормировочные параметры c_1 и c_2 , от которых они зависят, имеют выражения

$$\begin{aligned} c &= I^{-1} [c_1 I_4 - c_2 I_2 - c_0 (I_6 I_4 - I_5 I_2)], \quad I = I_1 I_4 - I_2 I_3 \\ \xi_0(z_0) &= -k^{-1/2} c^{-1} I^{-1} [c_1 I_3 - c_2 I_1 - c_0 (I_6 I_3 - I_5 I_1)] \\ I_1 &= \int_0^\pi \vartheta_3 \Psi \frac{d\tau}{y}, \quad I_2 = \int_0^\pi \vartheta_2 \Psi \frac{d\tau}{y}, \quad I_3 = \int_0^\pi \vartheta_3 \Psi d\tau \\ I_4 &= \int_0^\pi \vartheta_2 \Psi d\tau, \quad I_5 = \int_0^\pi \frac{\vartheta_2 \Psi (\xi^2 + 1)}{\xi - \xi_{G,H}} d\tau, \quad I_6 = \int_0^\pi \frac{\vartheta_2 \Psi (\xi^2 + 1)}{\xi - \xi_{G,H}} \frac{d\tau}{y} \\ \Psi &= \frac{\Lambda b}{\vartheta_1 (b^2 + 1)^{1/2}} \frac{1 - k\xi}{1 + k\xi}, \quad c_1 = \frac{v_+ - v_-}{B} = \frac{\Delta v}{B}, \quad c_2 = p_+ - p_- = \Delta p \end{aligned}$$

Здесь тэта-функции зависят от τ , q , функции Λ и ξ — от $l + i\tau$, функции Ψ , b , y — от τ , индексы плюс и минус относятся к правой и левой полустенкам разделенным изломом. Входящая сюда зависимость $y(\tau)$ имеет вид

$$y = m \operatorname{tg} \theta, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{m_0}{M \operatorname{tg} \gamma} \frac{m_0 - M \cos \tau}{M - m_0 \cos \tau}$$

Компоненты возмущения скорости v_\pm и возмущений давления p_\pm в областях 2 и 3 можно определить по формулам (2.2), удовлетворившись их линейной связью с изломом ε , но можно и по точным формулам, проводя независимо расчет отражения от стенки для указанных областей.

Полагая основное течение отвечающим любой из областей 2 или 3 или промежуточным областям, отвечающим промежуточным значениям угла падения α , упомянутые возмущения можно находить по следующим точным формулам:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p_\pm &= \kappa_2^{-1} (p_{2\pm}/p_1)/(p_{00}/p_1) \\ v_\pm &= M_{W\pm} (a_{2\pm}/a_2) \cos(\gamma - \varepsilon_\pm) - M_W \cos \gamma \end{aligned}$$

Индекс 00 указывает на основное течение, а ε_{\pm} — углы полунзломов правой и левой полустенок по отношению к стенке основного течения; $\varepsilon_+ > 0$, если правая полустенка повернута по часовой стрелке, а $\varepsilon_- > 0$, если левая — против нее.

Исходная координата r на стенке вычисляется по формуле $r = |(M \cos \tau - 1)/(M - \cos \tau)|$ и находится на ED (если $\tau > \arccos M^{-1}$) или на EF (фиг. 1).

Дифференциальное уравнение дифрагированного участка детонационного фронта получается разрешением относительно f' второго соотношения (2.2), дифференцированием его по y , заменой $\partial v/\partial y$ по (2.3)

$$(3.4) \quad f''_{yy} = - \frac{FB}{y} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad F = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{a_2}{a_1} \frac{(\kappa_2 + 1) M_d}{(M_d^2 - 1)(1 + \iota^2)}$$

Интегрирование при условиях $f(-m') = f_y'(-m') = 0$, где $\pm m' = \pm \sqrt{1 - m^2}$ — концы отрезка — образа дифрагированного участка детонационного фронта (основное течение совпадает с потоком в области 2) и несложные преобразования дают функцию f в двух видах

$$(3.5) \quad f = -FB \int_{-m'}^y (y-t) \frac{1}{t} \frac{\partial p}{\partial t} dt = -FB y \int_{-m'}^y \frac{1}{t^2} p(t) dt$$

4. Упрощение результатов. Рассмотрение детонационных волн, близких по режиму к волнам Чепмена — Жуге, затрудняется на пути получения условий на образе детонационного фронта (2.2). При линейризации задачи по ε в выражениях x -составляющей возмущения скорости и возмущения давления необходимо разложить в ряд Тейлора квадратный корень

$$(4.1) \quad \sqrt{1 + N \frac{f - yf'}{\iota^4}} = \sqrt{1 + \bar{N}}, \quad N = \frac{2}{M_D} \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{M_d^2 + 1}{M_d^2 - 1} + \iota^4 \right)$$

где функция $f - yf'$ порядка ε определяется решением задачи.

Для получения оценок возможности указанного разложения, а значит, и для допустимости решения при малых ι , прежде всего в целях удобства его анализа, оно было упрощено путем разложения его в ряд по степеням ι . Существенно, что, хотя разложение проведено в окрестности значения $\iota = 0$, решения могут браться при значениях ι , в той или иной степени близости к нему, но не равных ему точно. В решении удерживается первая степень ι . Опуская все промежуточные преобразования, приводим результат упрощения решения.

Давление на стенку при малых ι не зависит от ι ; его распределение имеет вид (на полустенке DE (фиг. 1) условно полагается $r < 0$)

$$(4.2) \quad p(r) = p_+ - \frac{\Delta v}{\pi} \frac{(1-r)^{1/2}}{1+r \sin \gamma} + \frac{\Delta p}{\pi} \arccos \frac{\sin \gamma + r}{1+r \sin \gamma} - \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{M_W^2}{(1-M_W^2)^{1/2}} \ln \left| \frac{1 - rM_W + (1-r^2)^{1/2} (1-M_W^2)^{1/2}}{r - M_W} \right|$$

Вдоль искривленного участка детонационного фронта давление изменяется по закону (направление оси y соответствует фиг. 1)

$$(4.3) \quad p(y) = p_+ - \frac{1}{i} \frac{\Delta v}{\pi m''} \frac{M_d + 1}{M_d - 1} \times \\ \times \left[(1 - y'^2)^{1/2} - \frac{\arctg [(M_d^4 - 1)(1 - y'^2)]^{1/2}}{(M_d^4 - 1)^{1/2}} \right] + J(y') \\ y' = \frac{y}{m'}, \quad m''^2 = (\kappa_2 + 1) \frac{M_d^2 - 1}{\kappa_1 M_D^2 + 1}$$

Слагаемое $J(y')$ (высшей — нулевой степени ι) дается формулами

$$J = -\frac{\Delta p}{\pi} (M_d^2 - 1)^{-2} (J_1 - J_2 + J_3)$$

$$J_1 = (M_d^4 + 1) \arccos(-y'), \quad J_2 = (M_d^4 - 1) y' (1 - y'^2)^{1/2}$$

$$J_3 = 2M_d^2 [\operatorname{arctg} [M_d^2 y'^{-1} (1 - y'^2)^{1/2}] - j\pi], \quad j = \begin{cases} 0, & y' < 0 \\ 1, & y' > 0 \end{cases}$$

Форма дифрагированного детонационного фронта, получаемая упрощением (3.5), приобретает выражение

$$f(y) = \iota \frac{\Delta v}{\pi} m'' \frac{M_d^2 F}{M_d^2 - 1} \left\{ y' \left[M_d^{-2} \operatorname{arctg} \left(M_d^{-2} \frac{y'}{1 - y'^2} \right) - \arcsin y' - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{2} \frac{M_d^2 - 1}{M_d^2} \right] + \frac{\operatorname{arctg} [(M_d^4 - 1)(1 - y'^2)]^{1/2}}{(M_d^4 - 1)^{1/2}} - (1 - y'^2)^{1/2} \right\}$$

В выражении F (3.4) следует при этом опустить ι^2 .

Как видно из выражения (4.1), для получения оценок допустимости решения необходимо выражение функции

$$(4.4) \quad f - yf' = \iota \frac{\Delta v}{\pi} m'' \frac{M_d^2 F}{M_d^2 - 1} \left[\frac{\operatorname{arctg} [(M_d^4 - 1)(1 - y'^2)]^{1/2}}{(M_d^4 - 1)^{1/2}} - (1 - y'^2)^{1/2} \right]$$

5. Область допустимости решения. Эту область желательно представить возможно более явно и наглядно. Нелинейная нормировка решения в данном случае есть существенное препятствие. Значение критерия \bar{N} какого-либо варианта решения можно получить лишь зная этот вариант. Необходима функция $f - yf'$, имеющая множителем Δv . Естественно поэтому обратиться к линейной связи Δv с ε , используя для определения $f - yf'$ формулу (4.4).

По второй формуле (2.2) можно определить Δv , зная наклоны фронта в крайних точках искривленного участка, находимые по формуле Кардана из уравнения третьей степени. Линеаризация здесь оказывается очень громоздкой и неудобной в важнейшем симметричном случае, когда плоскость симметрии образуемого изломом стенки тупого клина перпендикулярна фронту падающей ударной волны. В силу сказанного граница области допустимости находится для симметричного случая путем установления связи Δv с ε непосредственно независимо от (2.2).

Для указанного случая, имея выражение скорости фронта отраженной волны относительно стенки в виде $U_D - V_1 \cos(\varepsilon + \varepsilon')$, где ε' — угол фронта со стенкой, условия регулярного отражения и сохранения касательной к отраженному фронту составляющей скорости можно записать в виде

$$[U_D - V_1 \cos(\varepsilon + \varepsilon')] \operatorname{cosec} \varepsilon' = U_0 \operatorname{cosec} \varepsilon, \quad V_1 \sin(\varepsilon + \varepsilon') = v' \cos \varepsilon'$$

откуда можно получить формулы

$$(5.1) \quad \Delta v \frac{a_2}{a_1} = \frac{v'}{a_1} = M_1 \left(1 + \frac{M_D - M_1}{U_0/a_1} \right) \varepsilon \\ M_1 = (M_0^2 - 1) \left[\left(\kappa_1 M_0^2 - \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) \left(1 + \frac{\kappa_1 - 1}{2} M_0 \right) \right]^{-1/2}$$

Необходимый здесь частный случай выражения величины M_D получается из третьего равенства (1.3); величина формально определяемой скорости V_2 оказывается суммой V_1 и величин второго порядка малости. После разрешения возникающего соотношения относительно величины

M_D последняя представляется в виде

$$(5.2) \quad M_D = \frac{\kappa_2 + 1}{2} M_1 + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} M_1^2 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{1/2}$$

Наконец, $U_0/a_1 = M_0 a_0/a_1$ находится по (1.3).

Для получения условия допустимости величину y следует выбирать равной нулю, так как $|f - yf'|$ имеет максимум при $y = 0$: $(f - yf')' = -yf'' = 0$, производная f'' не имеет нулей при $-m' < y < m'$; из (4.4) видно, что $f - yf' = 0$ при $y = \pm m'$. Следовательно, максимум $|f - yf'|$ на указанном интервале будет наибольшим значением. Граница области допустимости определяется по (4.1) и условию

$$(5.3) \quad N(f - yf')/\iota^4 = \bar{N} = \lambda$$

Для вогнутых и выпуклых изломов соответственно знаку $f - yf'$ (см. (4.1)) можно брать $\lambda = 1$ и $\lambda = -0,5$. Относительная ошибка вычисления корней $(1 \pm \lambda)^{1/2} \approx 1 \pm \lambda/2$ при этом оказывается одинаковой и равной $3\sqrt{2}/4 \approx 0,06$.

Подставляя в (5.3) последовательно $f - yf'|_{y=0}$ из (4.4), $\Delta v a_2/a_1$ и M_1 из (5.1) и M_D (5.2), опуская высшие степени ι в выражениях N (4.1) и F (3.4) и разрешая получающееся соотношение относительно ι^3/ε , получаем границу области допустимости (знак равенства) и саму эту область

$$(5.4) \quad \frac{\iota^3}{\varepsilon} \leq \frac{2}{\pi} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} m' \frac{(\kappa_1 M_D^2 + 1)(M_d^2 + 1)}{\lambda (M_d^2 - 1)^3} \left[\frac{\arctg(M_d^4 - 1)}{M_d^4 - 1} - 1 \right] \times \\ \times \left[M_1 + \frac{2}{\kappa_1 + 1} \frac{M_0^2 - 1}{M_0^2} (M_D - M_1) \right]$$

На фиг. 3 дан график величины, обратной к (5.4), в зависимости от M_0 , а также три границы допустимости в координатах ι, ε° для значений M_0 , равных 1,3; 1,5 и 5, причем последняя практически также и для всех $M_0 > 5$. Для малых ι они показаны еще вытянутыми по оси ε° в 5 раз. Правее и ниже этих границ решения допустимы. В случае выпуклых изломов ($\lambda = 0,5$) допустимый угол излома вдвое меньше, чем в случае вогнутых ($\lambda = 1$).

6. Некоторые выводы. Второе, основное, слагаемое в выражении распределения давления вдоль детонационного фронта (4.3) имеет минус первый порядок по ι , и поэтому решение при не зависящих друг от друга ε и ι может быть действительным лишь при конечных ι — для пережатых волн.

Однако коль скоро приближение к режиму Чепмена — Жуге осуществляется при малых ε , согласно условию допустимости (5.4) величина ε/ι^3 будет порядка единицы и множитель $\Delta v/\iota$ обуславливает для этого слагаемого второй порядок по ι . Решение сохраняет силу.

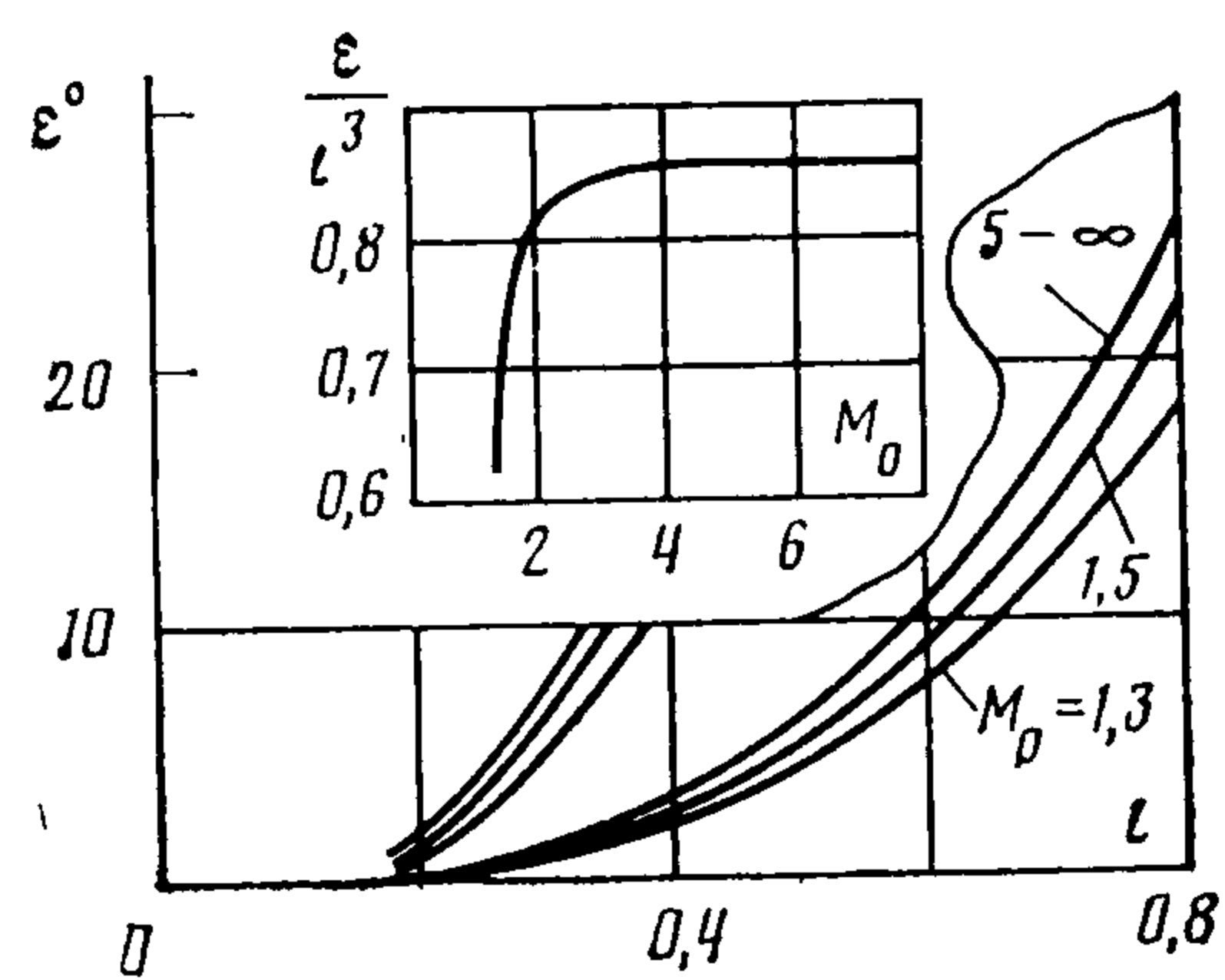
При рассмотрении симметричного случая непосредственно видно, что суммарное возмущение давления вдоль дифрагированного участка фронта оказывается не зависящим от ι . Интегрирование правой части (4.3) дает результат

$$\int_{-m'}^{m'} [p(y) - p_+] dy = -\frac{1}{2} \Delta v$$

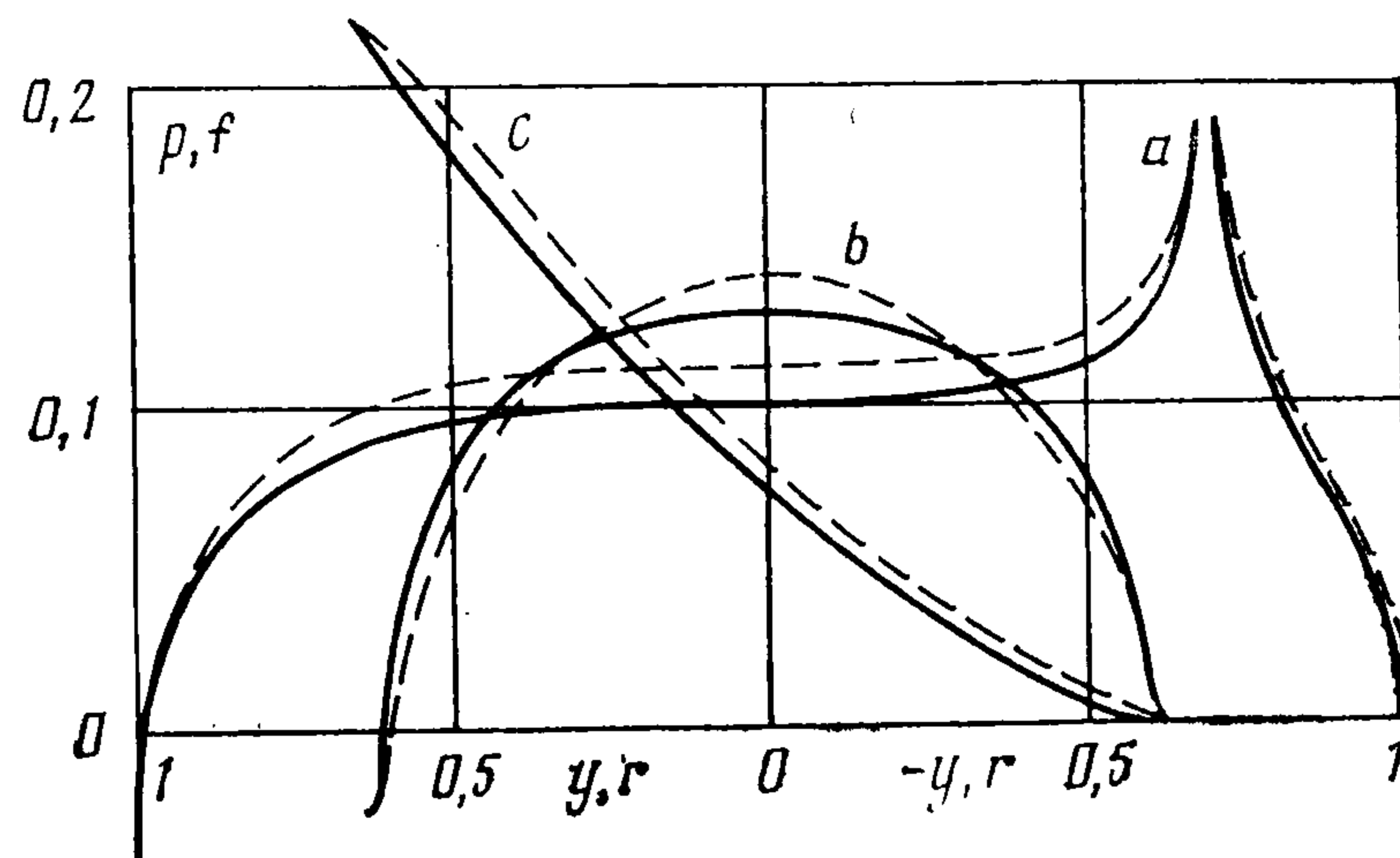
Распределение возмущения давления вдоль стенки (4.2) при малых ι не зависит от ι . Оба факта имеют место, так как можно показать, что $M_w, \Delta v, \Delta p$ и $\gamma \sim O(\iota^2)$.

Для симметричного случая ($\alpha = \gamma = 0$) это можно получить из формул (3.3), если записать выражение a_1/a_2 , и из (1.4) и (1.3). При $\gamma \neq 0$ необходимо привлечь уравнение третьей степени для $\text{tg}(\alpha + \gamma)$ [3], рассматривая которое как неявную функцию γ от ι , можно увидеть, что $\gamma'_\iota = 0$; однако в [3] фигурирует теплопровод, а не ι , т. е. необходима замена согласно (1.1) и (1.2).

В частном, симметричном, случае указанное распределение совпадает с имеющимся в [1] для акустических волн. При отсутствии симметрии



Фиг. 3



Фиг. 4

появляются еще слагаемые, отвечающие обтеканию малого излома стенки сжимаемым потоком конечной скорости, разности давлений у стенок $\Delta p \neq 0$.

Условие допустимости, а также анализ расчетов ряда вариантов дифракции указывает на то, что существует такой диапазон значений ι , в котором этот параметр не настолько мал, чтобы при заданном ε решение потеряло силу, но достаточно мал, чтобы простое линеаризованное по ι решение удовлетворительно совпадало с исходным.

Последний тезис иллюстрируется на фиг. 4, где дано сравнение упрощенного (штриховые линии) и неупрощенного (сплошные линии) решений в случае, когда детонационная волна является явно пересжатой: $\iota = 0,619$. Угол (вогнутый) излома здесь равен $\varepsilon = -9^\circ$. При этом $Q = 2,1$; $p/p_0 = 8,33$; $p_2/p_1 = 5,76$; $\alpha = 26,5^\circ$. Величина \bar{N} оказывается равной 0,978, т. е. набор входных параметров соответствует близости к границе допустимости. Кривые a — давление на стенку, b — вдоль фронта, c — форма фронта. При значениях $\iota < 0,25$ и $\varepsilon < 0,5^\circ$ сравниваемые кривые давлений и формы фронта практически сливаются.

За замечания и обсуждения авторы благодарят А. А. Бармина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast. II // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1950. V. 200. P. 554—565.
2. Ter-Minassiants S. M. The diffraction accompanying the regular reflexion of a plane obliquely impinging shock wave from the walls of an obtuse wedge // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. Pt 2. P. 391—410.
3. Урмамбетов С. М. О регулярном отражении детонационных волн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 178—180.
4. Бутковский А. В. Плоские нестационарные автомодельные течения газа с выделением энергии в ударных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 164—167.
5. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 5. С. 586—599.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз. 1962. 599 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз. 1963. 639 с.
9. Уиттекер Э. Т. и Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. 515 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.IX.1986