

УДК 532.525.2;532.516

## НЕОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ ЗАТОПЛЕННЫЕ СТРУИ

Яворский Н. И.

Обобщенный мультипольный подход, разработанный [1] для осесимметричных неавтономных затопленных струй, распространяется на неосесимметричный случай. Для струй с большой асимметрией в области неавтономности предсказывается периодический поворот направления асимметрии с удалением от источника струи на прямой угол. Показывается, что первые три члена асимптотического разложения в бесконечно удаленной точке, полученные [1] для осесимметричных струй, остаются справедливыми и в неосесимметричном случае. Обсуждается влияние асимметрии на устойчивость струйного течения. Рассматриваются вопросы сходимости полученных разложений в осесимметричном случае. Указывается на возможность постановки задачи в ограниченной области и на ее связь с устойчивостью течения.

1. Основными результатами работы [1] являются следующие утверждения.

Асимптотическое поведение неавтономных струй в целом определяется собственными решениями  $w$ ,  $q$  уравнений Навье — Стокса, линеаризованных на точном автономном решении  $v_1$ , полученном Ландау [2]

$$(1.1) \quad (w, \nabla)v_1 + (v_1, \nabla)w = -\nabla q + \nu \Delta w, \quad \operatorname{div} w = 0$$

причем собственные функции (мультиполи) имеют степенную зависимость от сферического радиуса

$$w = W(\theta)R^{-\alpha}, \quad q = Q(\theta)R^{-\alpha-1}$$

$(R, \theta, \varphi)$  — сферические координаты. Показатель степени  $\alpha$  определяется как собственное значение соответствующей спектральной задачи на  $W$ ,  $Q$ , следующей из (1.1).

Первые три члена разложения функции тока  $\psi$  имеют вид

$$(1.2) \quad \psi = \nu R y_1(x) + \nu \ln Ru(x) + \nu z(x) + \dots, \quad x = \cos \theta$$

$$(1.3) \quad y_1(x) = 2 \frac{1-x^2}{A-x}, \quad A > 1$$

$$(1.4) \quad u(x) = B(1-x^2) \frac{1-Ax}{A(A-x)^2}, \quad z(x) = z_1(x) + c_0 u(x)$$

где  $y_1(x)$  — решение Ландау [2], а  $z_1(x)$  — аналитическое решение неоднородного линейного уравнения, приведенного в [1]. Неизвестные постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $c_0$  определяются заданием основных интегралов сохранения: импульса, расхода и трансверсальной компоненты момента количества соответственно.

С той же точностью окружная скорость есть

$$(1.5) \quad w_\varphi = c_1 \Gamma_2(x)(1-x^2)^{-1/2} R^{-2} + \dots$$

где  $\Gamma_2(x) = (1-x^2)(A-x)^{-2}$  [3], а произвольная постоянная  $c_1$  определяется заданием продольной компоненты момента количества движения.

Оказывается, что аналогичный мультипольный подход справедлив и для неосесимметричной задачи о неавтономных затопленных струях.

В этом случае решение (1.1) представляется в виде

$$(1.6) \quad \mathbf{w} = \sum_{n=1, m=0}^{\infty} [W_{1nm}(x) \cos m\varphi + W_{2nm}(x) \sin m\varphi] R^{-\alpha_{nm}}$$

$$q = v \sum_{n=1, m=0}^{\infty} [Q_{1nm}(x) \cos m\varphi + Q_{2nm}(x) \sin m\varphi] R^{-\alpha_{nm}-1}$$

Пусть

$$(1.7) \quad \mathbf{w} = (1 - x^2)^{m/2} \left[ U(x) \cos m\varphi, \frac{V(x)}{\sqrt{1-x^2}} \cos m\varphi, \right. \\ \left. \frac{W(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sin m\varphi \right] R^{-\alpha}$$

$$q = v (1 - x^2)^{m/2} Q(x) R^{-\alpha-1}$$

Для простоты в (1.7) опущены индексы и знак суммы. Вид (1.7) напоминает представление присоединенных полиномов Лежандра и диктуется видом правой части (1.1) так, чтобы функции  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $W(x)$ ,  $Q(x)$  были аналитическими при соответствующем выборе  $\alpha$ . Подставляя (1.7) в систему уравнений (1.1) записанную в сферической системе координат, и исключая величину  $(1 - x^2)V''$  при помощи уравнения неразрывности, приходим к системе уравнений

$$(1.8) \quad (1 - x^2)U'' = 2(m+1)U' + [m(m+1) - (\alpha-1)(\alpha-2)]U - \\ - (\alpha+1)Q + y_1U' + \left[ (\alpha+1)y_1' - \frac{mxy_1}{1-x^2} \right]U + \left( y_1'' + \frac{2y_1}{1-x^2} \right)V$$

$$(1 - x^2)V' = (1 - x^2)(2 - \alpha)U + mxV + mW$$

$$(1 - x^2)W'' = (2m + 2\alpha - 4)U + 2V' + (y_1 + 2mx)W' + \\ + \left[ (\alpha - 1)y_1' - \frac{mxy_1}{1-x^2} + m(m-1) - \alpha(\alpha-1) \right]W - mQ$$

$$(1 - x^2)Q' = \alpha(1 - x^2)U' - 2mxU + (y_1 + mx)V' + \\ + \left[ \alpha y_1' + (2 - m) \frac{xy_1}{1-x^2} + m^2 - \alpha(\alpha-1) \right]V - mW' + mxQ$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Уравнения (1.8) можно представить как результат действия несамо-сопряженного обобщенного дифференциального оператора Лежандра [4], поэтому в окрестности особых точек  $x = \pm 1$  существуют аналитические решения, а условия ограниченности  $U''$ ,  $V'$ ,  $W''$ ,  $Q'$  равносильны требованию аналитичности функций в этих точках. Условия аналитичности следуют из (1.8), в которых функция  $y_1(x)$  представлена в виде (1.3) и положено  $x = 1$  или  $x = -1$ . Выбором параметра  $\alpha$  можно осуществить аналитическое продолжение решения из точки  $x = 1$  вплоть до точки  $x = -1$  (или наоборот).

Из (1.8) видно, что условия аналитичности представляют собой четыре однородных уравнения относительно семи неизвестных  $U$ ,  $U'$ ,  $V$ ,  $V'$ ,  $W$ ,  $W'$ ,  $Q$ . Три из них могут быть заданы произвольно (удобно выбрать  $U$ ,  $W$ ,  $Q$ ). Этот факт вполне согласуется с физической постановкой задачи о неавтономном струйном течении вне некоторой сферы радиуса  $R_0$ , на которой задано произвольное непрерывное поле скорости  $v_R$ ,  $v_\theta$ ,  $v_\varphi$  при условии, конечно, что системы собственных функций  $\{U_{nm}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{V_{nm}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{W_{nm}\}_{n=1}^{\infty}$ , соответствующие собственным значениям  $\alpha_{nm}$  полны для каждого азимутального числа  $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Последнее утверждение можно доказать в случае  $Re = 0$   $A( = \infty)$ , где число Рейнольдса  $Re$  определено через полный импульс струи  $J$  [2] и монотонно зависит от постоянной  $A$  в решении (1.3), причем  $Re \rightarrow \infty$

при  $A \rightarrow +1$ :

$$\operatorname{Re} = \left( \frac{J}{\pi \rho v^2} \right)^{1/2}, \quad J = 16\pi \rho v^2 A \left[ 1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right]$$

Действительно, разыскивая решения (1.8) в виде полиномов от  $x$ :  $U, Q$  —  $n$ -й степени,  $V$  —  $(n+1)$ -й степени и  $W$  —  $(n+2)$ -й степени, найдем следующие спектральные значения

$$(1.9) \quad \alpha_1 = n + m + 2, \quad \alpha_2 = n + m + 2, \quad \alpha_3 = n + m \\ \alpha_4 = -n - m - 1, \quad \alpha_5 = -n - m - 1, \quad \alpha_6 = -n - m + 1$$

Собственные значения  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  соответствуют задаче о течении вне шара,  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  — внутренней задаче. При помощи показателей  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  можно построить решения в шаровом слое или какой-либо другой двусвязной области, ограниченной звездными поверхностями. Таким образом, при  $\operatorname{Re} = 0$  собственные значения целые, а соответствующие им собственные функции — полиномы. Из (1.9) видно, что для каждого  $m = 0, 1, 2, \dots$  семейство собственных функций является базисом пространства всех полиномов, полнота которых в  $C[-1, 1]$  хорошо известна.

При  $\operatorname{Re} > 0$  исследование вопросов полноты собственных функций представляет значительные трудности, связанные с тем, что собственные значения  $\alpha$  входят в уравнения (1.8) нелинейным образом. Строгой математической теории таких спектральных задач пока нет, поэтому ограничимся качественными соображениями, подкрепленными соответствующими численными расчетами.

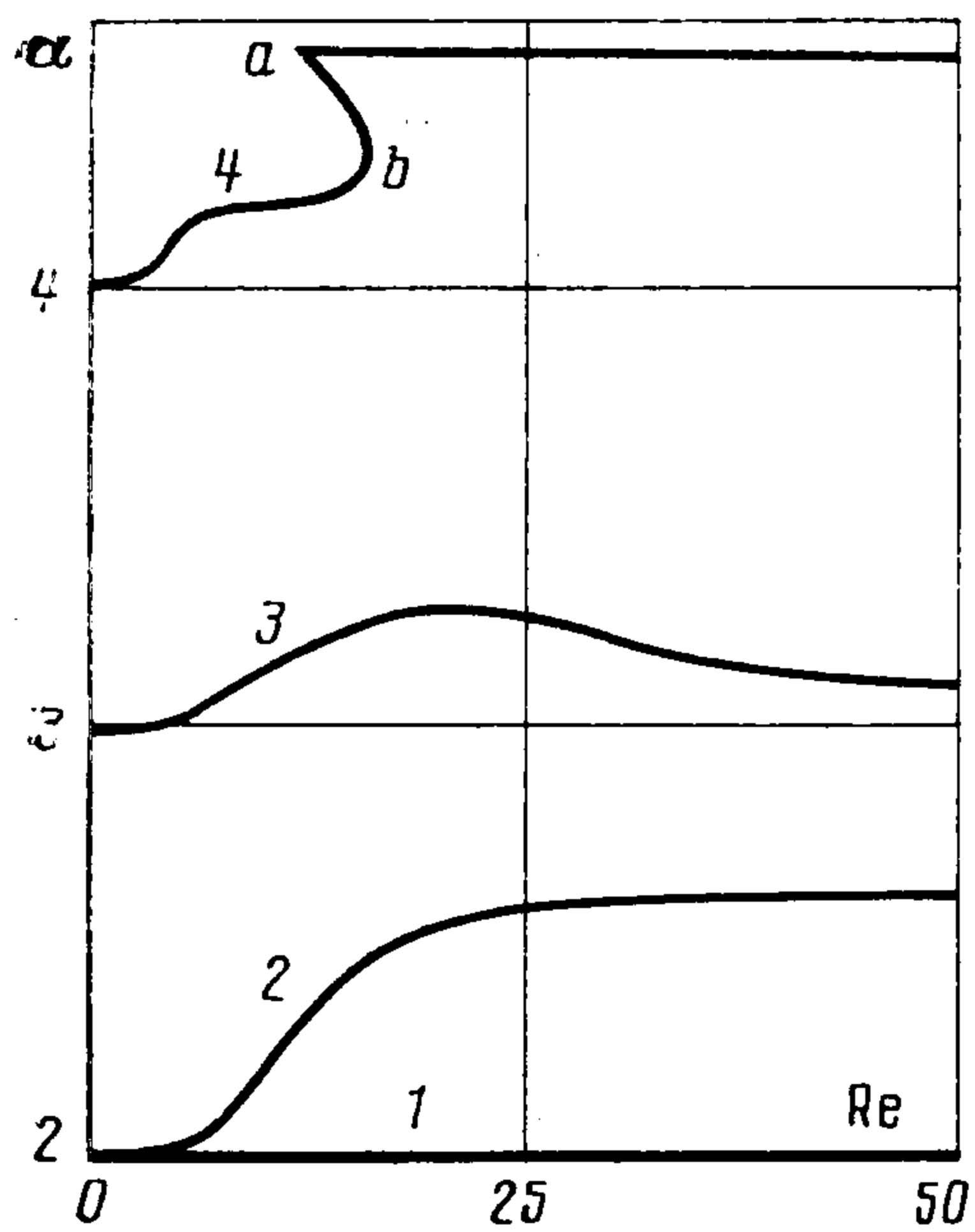
Коэффициенты системы (1.8) и импульс  $J(A)$  аналитичны по параметру  $0 \leq 1/A < 1$ . Отсюда по аналогии с известными теоремами о параметрической зависимости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений естественно предположить непрерывную (и кусочно-дифференцируемую при  $0 < \operatorname{Re} < \infty$ ) зависимость собственных функций от  $\operatorname{Re}$  как от параметра при  $0 \leq \operatorname{Re} < \infty$ . В этом случае число собственных функций и их линейная независимость будут сохранены по крайней мере в некоторой окрестности точки  $\operatorname{Re} = 0$ , и нет оснований полагать, что при увеличении числа  $\operatorname{Re}$  от нуля полнота систем собственных функций будет потеряна в этой окрестности. Следует отметить, что собственные значения  $\alpha_{nm}$  также становятся функциями числа Рейнольдса, причем как собственные функции, так и собственные значения могут быть комплекснозначными. Численные расчеты подтверждают непрерывную (и возможно, кусочно-дифференцируемую) зависимость  $\alpha_{nm}(\operatorname{Re})$  (фиг. 1—4) вместе с соответствующими им собственными функциями  $U_{nm}(x, \operatorname{Re}), V_{nm}(x, \operatorname{Re}), W_{nm}(x, \operatorname{Re}), Q_{nm}(x, \operatorname{Re})$ .

Расчеты проводились методом Рунге — Кутты — Мерсона с относительной точностью  $10^{-5}$  по следующей схеме. Выходя из особых точек  $x = \pm 1$  системы уравнений шестого порядка (1.8), строим по три линейно независимых аналитических решения  $U_1^\pm(x), U_2^\pm(x), U_3^\pm(x)$ , где  $\mathbf{U}$  — вектор  $\mathbf{U} = [U, U', V, W, W', Q]^T$ , вплоть до некоторой точки сшивки  $x_c, -1 < x_c < 1$ , находящейся в области наибольших градиентов искомой функции. Условие аналитичности решения есть

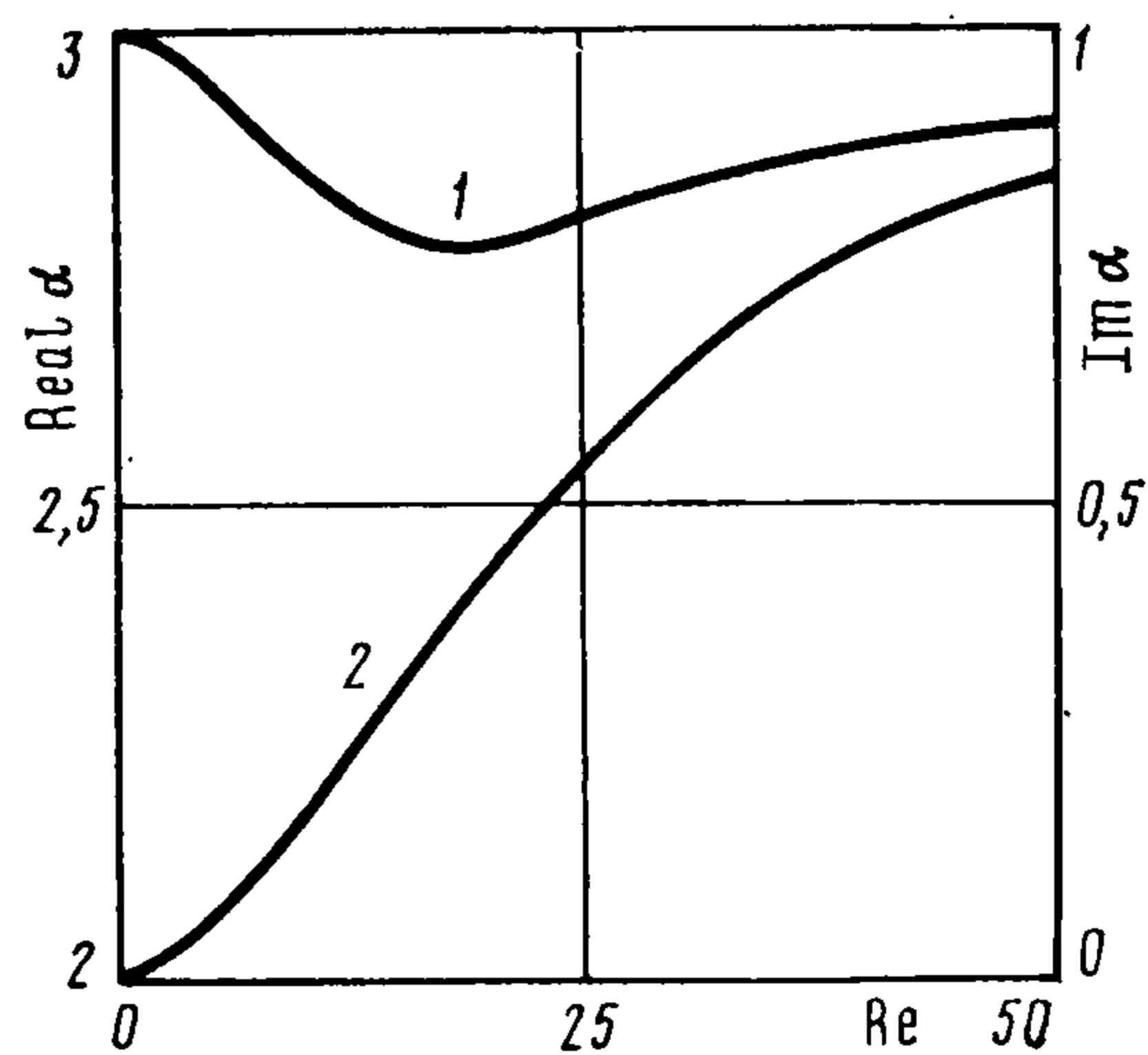
$$c_1^+ U_1^+(x_c) + c_2^+ U_2^+(x_c) + c_3^+ U_3^+(x_c) = c_1^- U_1^-(x_c) + c_2^- U_2^-(x_c) + c_3^- U_3^-(x_c)$$

Для существования нетривиального решения  $c_k^\pm$  ( $k = 1, 2, 3$ ) этой системы уравнений необходимо, чтобы обращался в нуль определитель шестого порядка

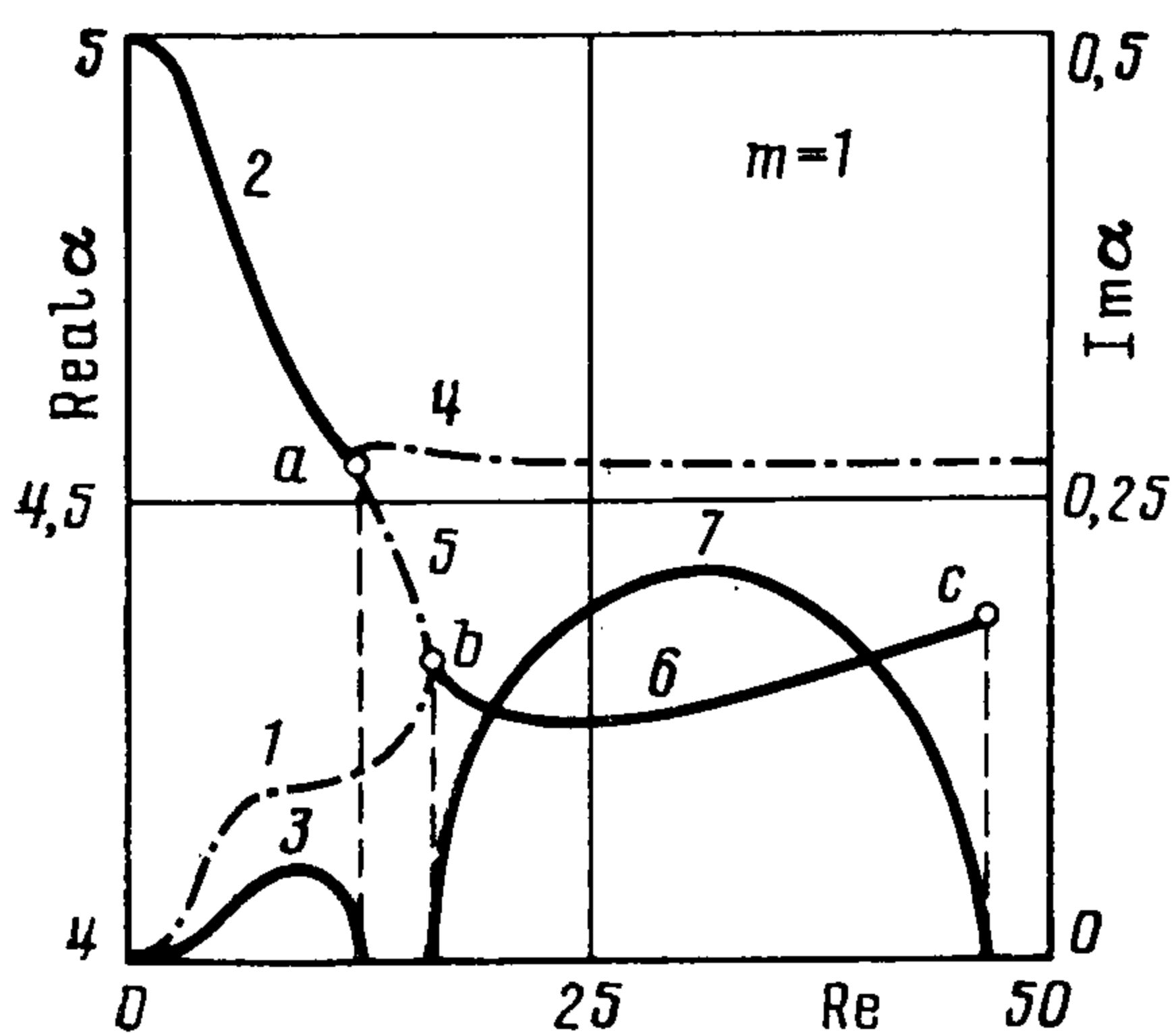
$$\Delta(\alpha, \operatorname{Re}, m) = | U_1^+ U_2^+ U_3^+ U_1^- U_2^- U_3^- |$$



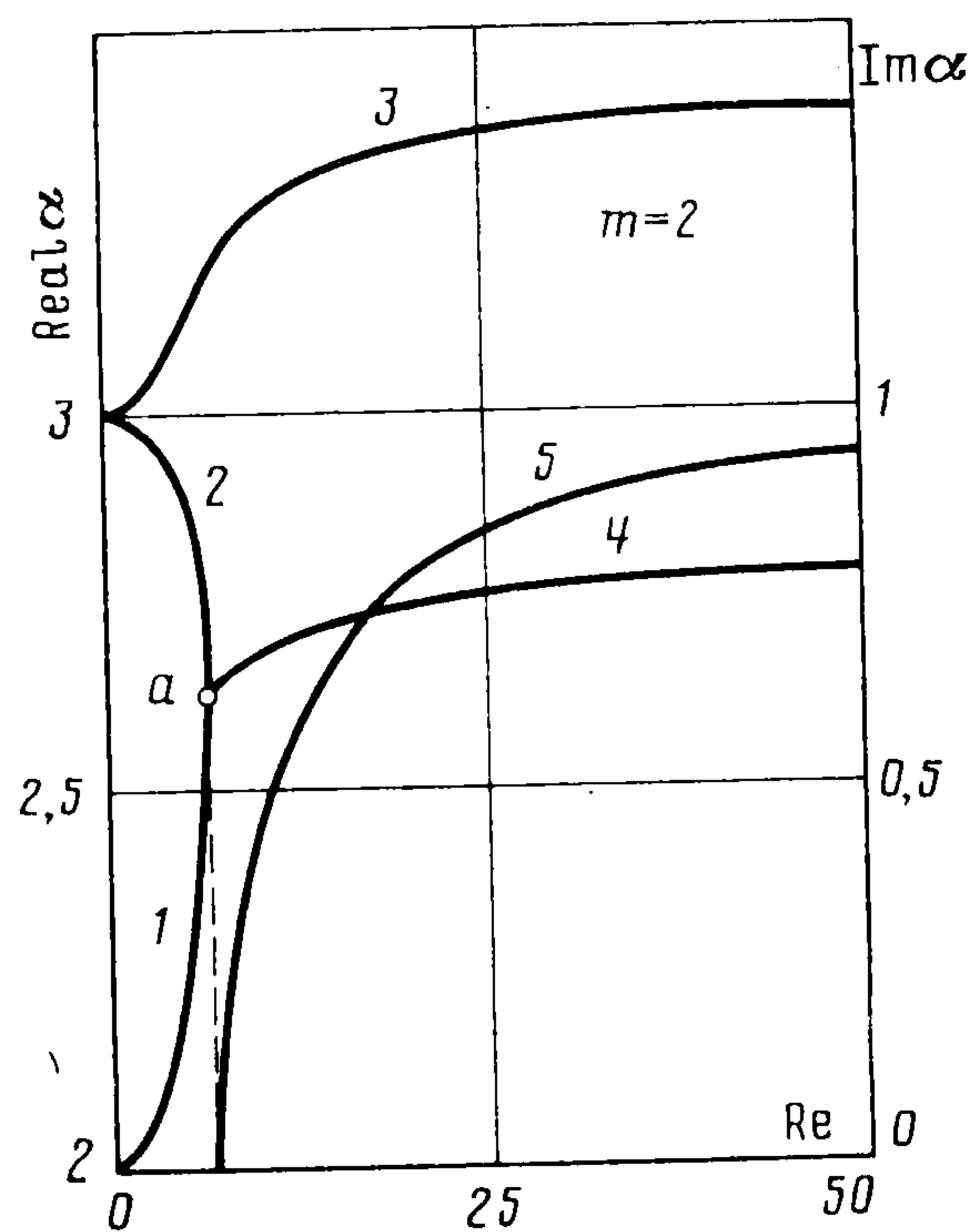
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Это уравнение определяет спектральные значения  $\alpha_n(\text{Re}, m)$ . Видно, что собственные значения не зависят от  $x_c$ , поскольку в результате сшивки решения в точке  $x_0$  получается аналитическое решение всюду в области  $-1 \leq x \leq 1$ .

Следует отметить, что при  $\text{Re} = 0$  из (1.9) вытекает, что для каждого  $m$  спектр есть  $\alpha = m, m + 1, m + 2, \dots$ , причем  $\alpha = m$  — однократно, а  $\alpha = m + 2, m + 3, \dots$  — трехкратно вырожденные собственные значения. В случае  $\alpha = m + 1, m > 0$  решение двукратно вырождено, хотя из (1.9) можно было бы сделать вывод, что вырождения нет. «Дополнительное» решение — это решение вида  $U = Q \equiv 0, V(x)$  — полином нулевой, а  $W(x)$  — первой степени, которое не было учтено при построении решений в виде полиномов и выводе (1.9). В случае  $\alpha > 0$  других решений нет. При  $\text{Re} > 0$  вырождение снимается, причем некоторые собственные значения остаются действительными, а другие образуют комплексно-сопряженные пары.

На фиг. 1 представлены действительные показатели степени для случая  $m = 1$  как функции числа Рейнольдса. Прямая 1, соответствующая  $\alpha(\text{Re}) = 2$ , и кривая 2 — две действительные ветви, порожденные двукратным собственным значением  $\alpha = 2$  при  $\text{Re} = 0$ . Кривая 3 представляет собой единственную действительную ветвь трехкратного вырожденного собственного значения  $\alpha = 3$  при  $\text{Re} = 0$ , две другие ветви которого образуют комплексно-сопряженную пару (фиг. 2). Показатель степени  $\alpha(\text{Re})$ , изображенный кривой 4, имеет две точки возврата  $a$  и  $b$  и более сложное происхождение (см. фиг. 3).

Кривая 1 на фиг. 2 ( $m = 1$ ) представляет собой действительную, а кривая 2 — мнимую части собственного значения комплексно сопряженной пары, соответствующей  $\alpha = 3$  при  $\text{Re} = 0$ .

На фиг. 3 ( $m = 1$ ) продемонстрированы довольно сложные изменения показателей степени при увеличении числа Рейнольдса. Штрихпунктиром обозначено действительное собственное значение, соответствующее кривой 4 на фиг. 1. Из точки  $\alpha = 4$  при  $Re = 0$  отходят одна действительная (кривая 1) и две комплексно-сопряженных ветви (на фиг. не показаны), аналогично из точки  $\alpha = 5$  при  $Re = 0$  отходят одна действительная (на фиг. не показана) и две комплексно-сопряженные ветви, действительная часть которых есть кривая 2, а мнимая — кривая 3. В точке  $a$  эта комплексно-сопряженная пара сливается и рождаются два действительных показателя степени (кривые 4 и 5). В точке  $b$  два действительных показателя степени (кривые 1 и 5) сливаются и рождается комплексно-сопряженная пара, действительная часть которой описывается кривой 6, а мнимая — кривой 7. В точке  $c$  эта комплексная пара превращается в действительную пару показателей степени (на фиг. не показана).

На фиг. 4 представлены зависимости  $\alpha(Re)$  при азимутальном числе  $m = 2$ . Кривая 1 соответствует действительному показателю степени, выходящему из невырожденного собственного значения  $\alpha = 2$  при  $Re = 0$ . Кривые 2 и 3 представляют собой действительные ветви двукратного собственного значения  $\alpha = 3$  при  $Re = 0$ . В точке  $a$  два действительных показателя степени сливаются (кривые 1 и 2) и рождается комплексно-сопряженная пара, действительная часть которой описывается кривой 4, а мнимая — кривой 5.

Наличие комплексных показателей степени сферического радиуса  $R$  в разложении (1.6) важно для понимания ряда физических эффектов (см. п. 3).

2. В точной автомодельной постановке задачи о ламинарной затопленной струе профиль скорости должен иметь вид [5]

$$\mathbf{v} = \nu R^{-1} \mathbf{V}(\theta, \varphi)$$

Решение Ландау (1.3) относится к классу течений, когда  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\theta)$ . Возникает вопрос о существовании асимптотически неосесимметричных затопленных струй, когда  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\theta, \varphi)$ . В линейном приближении по неосесимметричности такие решения допустимы. Действительно, в случае  $m = 1$  из (1.9) следует наличие решения уравнений (1.8) при  $\alpha = 1$  и  $Re = 0$  ( $n = 0$ ). Можно найти точное решение (1.8) при  $\alpha = 1$ ,  $m = 1$  и произвольных  $Re$ , полагая, что функции  $U, V, W, Q$  — полиномы переменной  $1/(A - x)$ . Искомое решение есть

$$(2.1) \quad U(x) = \frac{2}{(A-x)^2}, \quad V(x) = \frac{1}{(A-x)^2} - \frac{A}{A^2-1} \frac{1}{A-x}$$

$$W(x) = -\frac{1}{A^2-1} \frac{1}{A-x}, \quad Q(x) = \frac{4}{(A-x)^3} - \frac{2A}{A^2-1} \frac{1}{(A-x)^2}$$

Можно показать, что решение (2.1) непротиворечиво в том смысле, что разрешимо следующее приближение, полученное итерацией по нелинейности. Решение (1.3) соответствует случаю, когда ось  $z$  и ось струи совпадают.

Пусть ось струи не совпадает с осью  $z$  и направлена вдоль единичного вектора  $\boldsymbol{\tau} = (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$ . Обозначим единичные орты сферической системы координат  $O(R, \theta, \varphi)$ , построенной относительно декартовой системы координат  $x, y, z$ , через  $\mathbf{n}_R, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\varphi$ , а  $\mathbf{n}'_R, \mathbf{n}'_\theta, \mathbf{n}'_\varphi$  — единичные орты сферической системы координат  $O'(R, \theta', \varphi')$ , построенной относительно декартовой системы координат  $x', y', z'$ , ось  $z'$  которой направлена по  $\boldsymbol{\tau}$ , а начало координат совпадает с точкой  $O$ . В этом случае

$$(2.2) \quad \mathbf{n}_R = \mathbf{n}'_R, \quad (\mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}'_\theta) = -\cos \psi, \quad (\mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}'_\varphi) = \sin \psi$$

Основываясь на результатах Ландау (1.3) [2], получим точное решение уравнений Навье — Стокса в системе координат  $O(R, \theta, \varphi)$

$$(2.3) \quad v_R = \frac{2\nu}{R} \left[ \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta')^2} - 1 \right]$$

$$v_\theta = \frac{2\nu}{R} \frac{\sin \theta'}{A - \cos \theta'} \cos \psi, \quad v_\varphi = -\frac{2\nu}{R} \frac{\sin \theta'}{A - \cos \theta'} \sin \psi$$

Можно показать, что справедливы соотношения

$$(2.4) \quad \cos \theta' = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0)$$

$$\cos \theta_0 = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \psi$$

при помощи которых и определяется решение (2.3) в системе координат  $O(R, \theta, \varphi)$ .

В случае  $\theta_0 \ll 1$ , т. е. при малой неосесимметричности, из (2.3), (2.4) имеем

$$(2.5) \quad \theta' = \theta - \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0), \quad \psi = \theta_0 \frac{\sin (\varphi - \varphi_0)}{\sin \theta}$$

$$w_R = \frac{4\nu}{R} \theta_0 \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^3} \sin \theta \cos (\varphi - \varphi_0)$$

$$w_\theta = \frac{2\nu}{R} \theta_0 \left[ \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - \frac{A}{A - \cos \theta} \right] \cos (\varphi - \varphi_0)$$

$$w_\varphi = -\frac{2\nu}{R} \theta_0 \frac{\sin (\varphi - \varphi_0)}{A - \cos \theta}$$

что совпадает с точностью до численного множителя  $2(A^2 - 1)\theta_0$  с решением (2.1). Отсюда можно сделать вывод, что решение Ландау является по существу единственным главным членом асимптотического разложения и в неосесимметричной постановке задачи. Решение уравнений (1.8) при  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  и всех числах Рейнольдса может быть получено аналогичным образом из асимптотического представления (1.2)—(1.4), записанного в системе координат  $O'(R, \theta', \varphi')$  при  $\theta_0 \rightarrow 0$ . Таким образом, вклад неосесимметричных добавок, как это видно из результатов расчетов, приведенных в п.1, дается членами разложения с показателями степени  $\alpha > 2$ .

Итак, при  $R \rightarrow \infty$  струя приобретает осесимметричный вид, причем асимптотическое представление решения (1.2)—(1.4) остается справедливым и в неосесимметричном случае.

3. Представление решения в виде (1.6) не удовлетворяет полным уравнениям Навье — Стокса. Основываясь на разложениях (1.6), подобно тому, как это было сделано в [1], можно построить общее решение уравнений Навье — Стокса (при условии, что набор собственных функций  $\{w, q\}$  обладает полнотой в  $C[-1, 1]$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), что предполагается), если вести разложение по более полному набору показателей степени. Этот набор включает, в частности, степени, которые возникают при подстановке (1.6) в нелинейные члены. Такое семейство степеней должно обладать групповым свойством, чтобы линейные и нелинейные члены давали показатели степени из этого же семейства. Дополнительные члены разложения возникают как решения неоднородных линейных уравнений, правая часть которых определяется известными нелинейными членами.

Решение можно записать в виде (суммирование ведется по  $n$  и  $m$  от  $n = 1, m = 0$  до  $n = \infty, m = \infty$ )

$$(3.1) \quad v_R = \nu \sum (1 - x^2)^{m/2} R^{-\mu_{nm}} \Phi(m\varphi) U_{nm} \Phi^T(\nu_{nm} R)$$

$$v_\theta = \nu \sum (1 - x^2)^{(m-1)/2} R^{-\mu_{nm}} \Phi(m\varphi) V_{nm} \Phi^T(\nu_{nm} R)$$

$$v_\varphi = v \sum (1 - x^2)^{(m-1)/2} R^{-\mu_{nm}} \Phi \left( m \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) W_{nm} \Phi^T (v_{nm} R)$$

$$\frac{p}{\rho} = v^2 \sum (1 - x^2)^{m/2} R^{-\mu_{nm}-1} \Phi (m\varphi) Q_{nm} \Phi^T (v_{nm} R)$$

Здесь

$$(3.2) \quad \mu_{nm} + i v_{nm} = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} n_j (\alpha_{j m_j} - 1), \quad \sum_{j=2}^{\infty} m_j = m$$

$$(3.3) \quad U_{nm} = \begin{bmatrix} u_{nm}^{11} & u_{nm}^{12} \\ u_{nm}^{21} & u_{nm}^{22} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k R}{R^k} \begin{bmatrix} u_{knm}^{11} & u_{knm}^{12} \\ u_{knm}^{21} & u_{knm}^{22} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(\beta) = (\cos \beta, \sin \beta)$$

$n_j, m_i$  — неотрицательные целые числа, выбираемые так, чтобы выполнялись неравенства  $\mu_{nm} < \mu_{n+1m}$ ; матрицы  $V_{nm}, W_{nm}, Q_{nm}$  представляются в виде, аналогичном матрице  $U_{nm}$  (3.3), их элементы — функции  $x$ .

Важным отличием от осесимметричного случая [1] задачи о неавтономной затопленной струе является наличие в неосесимметричном случае (3.1) комплексных показателей степени (3.2).

Одно из физических следствий этого состоит в том, что для сильно асимметричной струи на начальном участке главную роль будут играть члены с  $m \neq 0$ . В частности, в задаче об истечении струи из прямоугольного отверстия, отношение прилежащих сторон которого сильно отличается от единицы, это члены с  $m = 1$ . Наличие комплексных показателей приведет, во-первых, к возникновению осцилляций в профиле скорости и, во-вторых, с ростом  $R$  (или  $z$ ) струя будет сжиматься с периодом  $2\pi/\text{Im}\alpha_1$  в направлении наибольшей асимметрии (большей стороны прямоугольника), что на фоне общего расширения струйного течения может быть интерпретировано как периодический поворот струи вокруг своей оси на  $90^\circ$ . При дальнейшем увеличении  $R$  профиль скорости будет сглаживаться и стремиться к автомоделному.

Сказанное относится к ламинарным струям. Однако качественные выводы, сделанные выше, могут иметь отношение и к турбулентным струям, поскольку для них применима гипотеза Буссинеска турбулентной вязкости [6, 7]. Для сравнения опытных данных с полученными результатами достаточно взять следующее из опыта значение турбулентного числа Рейнольдса:  $Re_T = 35$  [8]. Эксперименты [8, 9] показывают неплохое качественное согласие ( $z/d \sim 20$  и более) с указанными выше характерными особенностями течения в случае «прямоугольных» струй, причем из помещенной в [9] фотографии следует, что период разворота струи имеет порядок ширины струи в начальном сечении, что согласуется с данными, приведенными на фиг. 2 и 4, где  $\text{Im}\alpha \sim 1$ .

Другое следствие относится к проблеме гидродинамической устойчивости струйного течения. Как уже указывалось, вклад несимметричности при достаточно больших интенсивностях асимметричных мультиполей может приводить к осцилляциям в профиле скорости. Хорошо известна теорема Релея о невязкой гидродинамической неустойчивости в точках перегиба профиля скорости для одномерных плоских течений. В пространственном случае имеется ее аналог для осесимметричных плоскопараллельных течений. В общем случае критерий гидродинамической неустойчивости теряет релеевскую формулировку, тем не менее смена знака не малой по величине производной скорости может служить источником неустойчивости и в этом случае. Из фиг. 2 следует, что комплексные показатели степени возникают при  $Re = 0$ ; можно сделать вывод, что сильно

несимметричные струи, как и классический слой смешения, теряют устойчивость при бесконечно малых числах Рейнольдса. Если же асимметрия «умеренная», то критическое число Рейнольдса должно зависеть от степени асимметрии.

Таким образом, ламинарные струи неустойчивы при достаточно сильных возмущениях, поэтому область применимости решения (3.1)—(3.3) довольно ограничена (при  $Re \simeq 15$  струи неустойчивы относительно бесконечно малых возмущений [10]), хотя, как уже указывалось, предлагаемый обобщенный мультиполярный подход полезен и при исследовании развитых турбулентных струйных течений.

4. В п. 1 было указано, что решение задачи о струйном течении, представленное в виде разложения по собственным гидродинамическим мультиполям, применимо для краевой задачи в двусвязной области, ограниченной звездными поверхностями, в частности в шаровом слое, но тогда необходимо привлекать собственные решения, соответствующие показателям степени  $\alpha_{nm}$  с  $\text{Real } \alpha_{nm} < 0$ . Аналогично тому, как это было сделано в п. 3, формально можно построить общее решение и в данном случае в виде разложения (3.1), в котором индекс  $n$  изменяется от  $-\infty$  до  $\infty$ , причем  $\mu_{nm} < 0$ , если  $n < 0$ . Если указанное разложение сходящееся и имеет нужную степень гладкости, то оно представляет решение стационарных уравнений Навье—Стокса для краевой задачи о струйном истечении весьма общего вида.

Рассмотрим кратко вопросы сходимости рядов (3.1). Ввиду того что рассматриваемые ряды носят характер степенных рядов, в случае гидродинамической задачи для внешности шара радиуса  $R_0$  ряды ( $n > 0$ ) сходятся всюду в области  $R > R_0$ , если они сходятся при  $R = R_0$ . Таким образом, если при помощи представлений (3.1) оказывается возможным удовлетворить граничным условиям на сфере  $R = R_0$ , то указанные представления будут решениями уравнений Навье — Стокса в рассматриваемой области. Остается выяснить сходимость рядов при  $R = R_0$ . Для простоты изложения в дальнейшем предполагается, что течение обладает осевой симметрией ( $m = 0$ ), хотя аналогичные результаты могут быть получены и в неосесимметричном случае. Решение удобно записать в терминах функции тока [1]

$$(4.1) \quad \psi = \nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^{2-\mu_n} \left[ y_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{kn}(x) \frac{\ln^k R}{R^k} \right]$$

$$(4.2) \quad p = \rho \nu^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^{-1-\mu_n} \left( g_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty} h_{kn}(x) \frac{\ln^k R}{R^k} \right)$$

$$(4.3) \quad \mu_n = 1 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} [n_j(\alpha_j - 1) + m_j(\gamma_j - 1)]; \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} n_j \geq 1, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} m_j \geq 2$$

$$(4.4) \quad v_\varphi = \nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R^{-\zeta_n}}{\sqrt{1-x^2}} \left[ \Gamma_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{kn}(x) \frac{\ln^k R}{R^k} \right]$$

$$(4.5) \quad \zeta_n = 1 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} [n_j(\alpha_j - 1) + m_j(\gamma_j - 1)]$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} n_j \geq 0, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} m_j \geq 1; \quad n_j, m_j = 0, 1, 2, \dots$$

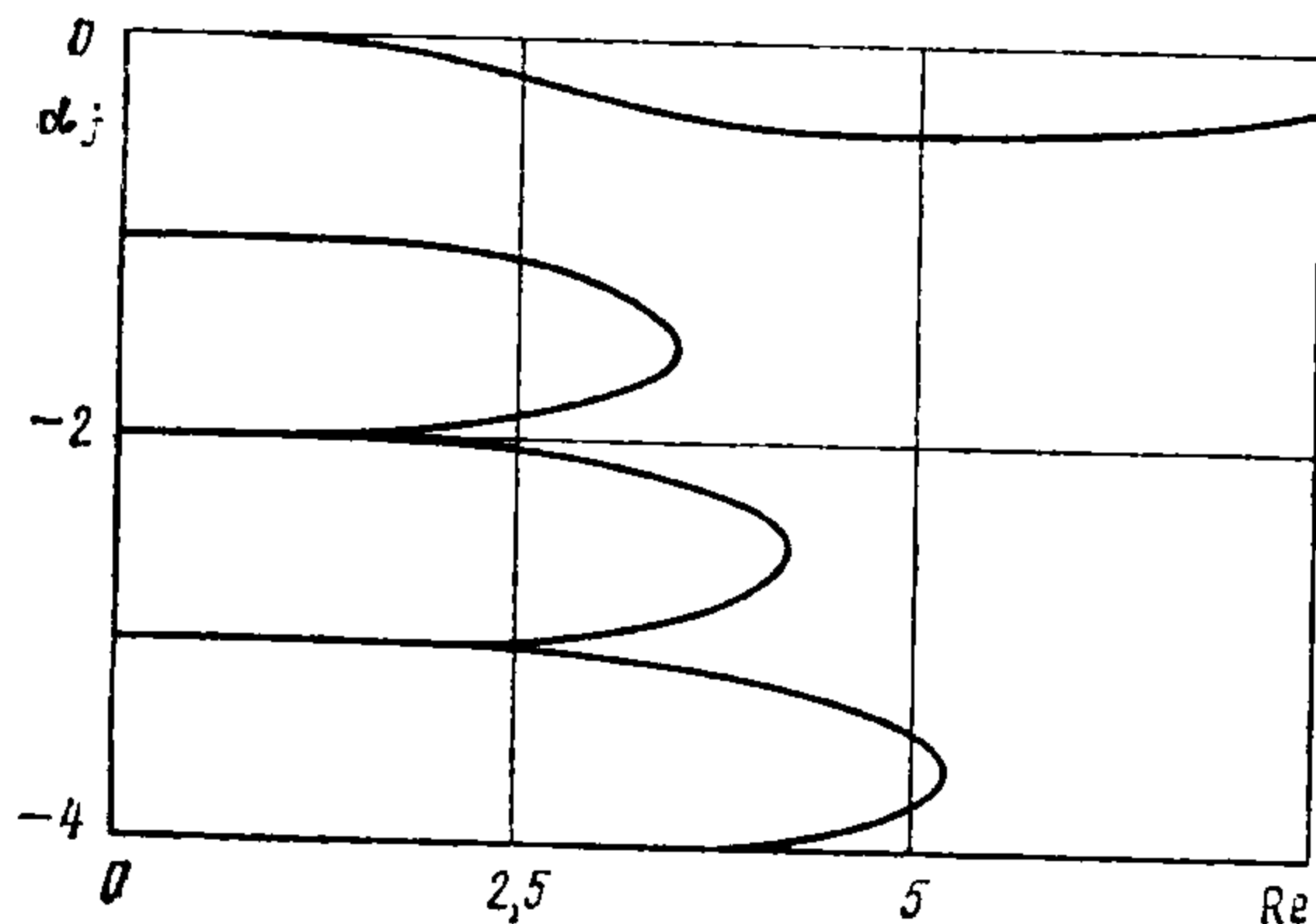
((4.3) отличается от (4.5) ограничениями на суммы  $n_j$  и  $m_j$ ), где  $\alpha_j$  и  $\gamma_j$  — собственные значения соответствующих спектральных задач, сформули-

рованных в [1]. Показатели степени упорядочены, как и в п. 1,  $\text{Real } \mu_n \leq \text{Real } \mu_{n+1}$ ,  $\text{Real } \zeta_n \leq \text{Real } \zeta_{n+1}$ . Пусть  $A_n, B_n, M_n$  — интенсивности соответствующих мультиполей, причем  $|A_n|, |B_n|, |M_n| < c/n^\alpha$ ,  $\alpha > 1$ ,  $0 < c < \infty$ , а расход для простоты положим равным нулю. (Случай с ненулевым расходом, т. е. в присутствии членов с  $\ln R$ , может быть рассмотрен аналогичным образом). Необходимо оценить вклад членов, возникающих из-за квадратичной нелинейности. Эти члены пропорциональны

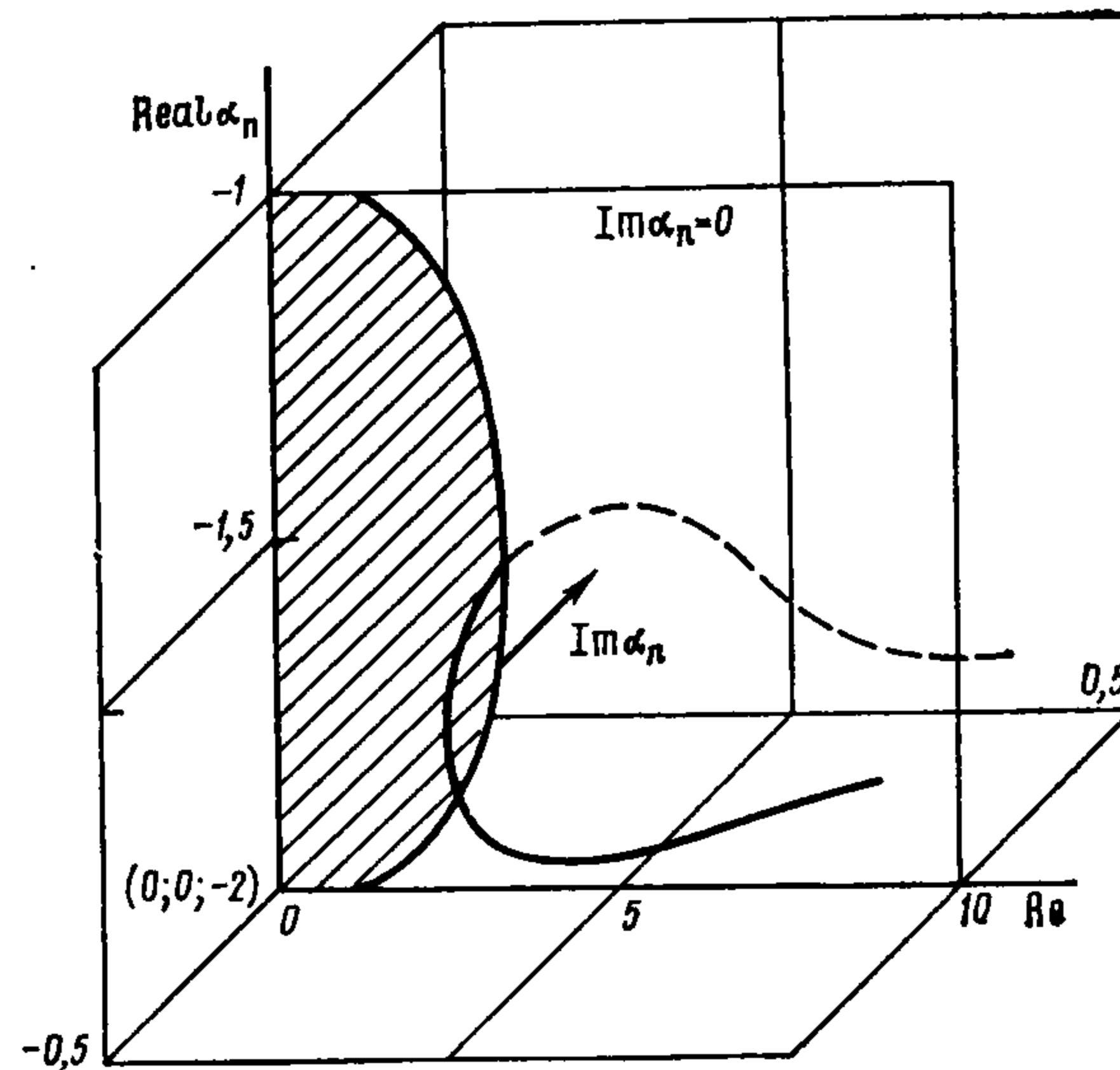
$$A_{i_1} \dots A_{i_s} B_{j_1} \dots B_{j_p} M_{k_1} \dots M_{k_m} R^{1-\alpha_{i_1}} \dots R^{1-\alpha_{i_s}} R^{1-\alpha_{j_1}} \dots \\ \dots R^{1-\alpha_{j_p}} R^{1-\gamma_{k_1}} \dots R^{1-\gamma_{k_m}}$$

причем если сумма  $\text{Real } \{(\alpha_{i_1} - 1) + \dots + (\gamma_{k_m} - 1)\}$  лежит в интервале  $[N, N + 1)$ , то их вклад при  $N \gg 1$  можно оценить сверху величиной  $c_1/(1 + N)^\alpha$ ,  $c < c_1 < \infty$ ,  $c_1 = \text{const}$  (см. приложение). Отсюда следует, что рассматриваемые ряды при достаточно естественных и общих предположениях сходятся при  $R \geq R_0$ .

Следует отметить, что если рассматривается гидродинамическая задача в шаровом слое или какой-либо аналогичной области, то сходимость рядов (4.1)–(4.5) ставится под сомнение. Однако если интенсивности мультиполей, соответствующих показате-



Фиг. 5



Фиг. 6

лям степени с отрицательной действительной частью, экспоненциально быстро  $\sim (R_1/R_0)^{-|N|} / |N|^\alpha$  убывают с ростом  $|N|$ , то (см. Приложение) полные ряды сходятся и в этом случае. Фактическое вычисление интенсивностей мультиполей из граничных условий приводит к бесконечной нелинейной алгебраической системе, разрешаемой рекуррентным способом, для чего системы функций  $y_n, u_{kn}, \Gamma_n, \Omega_{kn}$  необходимо последовательно ортогонализировать. Эта процедура может оказаться довольно трудоемкой, если для построения приближенного численного решения требуется достаточно большое число собственных функций. Однако вклад членов, возникающих в результате итераций по нелинейности, асимптотически мал при  $N \rightarrow \infty$  (см. Приложение), поэтому достаточно ограничиться решением линейной задачи при больших  $N$ , что сильно упрощает алгебраическую систему для определения  $A_n, B_n, M_n$  и говорит о ее хорошей обусловленности.

Следует отметить, что выбор базиса в виде собственных функций не является единственно возможным для задачи в ограниченной области. В принципе можно рассматривать произвольные галеркинские приближения. Однако представляется, что базис из собственных мультиполей наиболее предпочтителен, поскольку имеет ясное физическое содержание для каждого члена разложения, что важно для приближенного решения задачи. Вполне вероятно, что собственный базис дает наилучшую сходимость. В ряде случаев достаточно рассмотреть один-два члена разложения, чтобы получить достаточную физическую информацию о решении [11].

Характерной особенностью осесимметричного решения является то, что показатели степени с  $j > 0$ , т. е. с положительной действительной частью, вещественны:

$\text{Im } \alpha_j = \text{Im } \gamma_j = 0$  [11]. В случае  $j < 0$  показатели  $\alpha_j$ , будучи вещественными при  $0 \leq \text{Re} \leq \text{Re}_*$ , при  $\text{Re} \geq \text{Re}_* = 3,5$  последовательно сливаются (фиг. 5), образуя комплексно-сопряженные пары (фиг. 6), что свидетельствует о качественной перестройке течения и его возможной неустойчивости (см. п. 1). Интересно отметить, что значение критического числа Рейнольдса, при котором экспериментально наблюдается неустойчивость круглой струи  $\text{Re}_{\text{кр}} = 3,7 \div 4,1$  [12], весьма близко к значению  $\text{Re}_*$ . В то же время рассчитанное ранее [10, 13] обычными методами теории гидродинамической устойчивости критическое число Рейнольдса существенно превышает его экспериментальное значение.

*Приложение.* Оценим вклад членов разложения (4.1)–(4.5) при показателях степени  $\mu_n, \zeta_n$ , лежащих в интервале  $(N, N+1)$  при достаточно больших  $N$ , для задачи о струйном течении во внешности шара  $R \geq R_0$ .

Пусть для простоты показатели степени  $\alpha_n, \gamma_n$  — целые ( $\alpha_n = \gamma_n = n$ ),  $n > 0$ , а расход  $Q$  равен нулю, чему соответствует отсутствие в разложениях (4.1)–(4.5) членов с  $\ln R$ . Тогда в указанном интервале содержится только одно значение  $\mu_N = N$  (если  $\alpha_n, \gamma_n$  — дробные или комплексные, то получаемая ниже оценка не претерпевает значительных изменений, о чем будет указано в соответствующем месте). В этом случае разложение для полей скорости и давления принимают вид

$$(П.1) \quad \mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_n, \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad (\rho = 1)$$

где

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_n &= \mathbf{v}_n^0 + \mathbf{u}_n, & p_n &= p_n^0 + q_n \\ \mathbf{v}_n &= \mathbf{f}_n(\cos \theta) R^{-n}, & \mathbf{v}_n^0 &= \mathbf{f}_n^0(\cos \theta) R^{-n} \\ p_n &= g_n(\cos \theta) R^{-n-1}, & p_n^0 &= g_n^0(\cos \theta) R^{-n-1} \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнениям

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}_n^0 &= \nabla p_n^0 + (\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{v}_n^0 + (\mathbf{v}_n^0, \nabla) \mathbf{v}_1 \\ \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}_n &= \nabla q_n + \sum_{k=2}^{n-1} (\mathbf{v}_k, \nabla) \mathbf{v}_{n+1-k} \end{aligned}$$

Координаты скорости и давления отнесены к их характерным значениям на сфере  $R = R_0$ . Из (П. 2), (П. 3) находим

$$(П.4) \quad \begin{aligned} v_{n,i} &= v_{n,i}^0 + \sum_{j,k=1}^3 L_{ijk} \sum_{l=2}^{n-1} v_{l,j} v_{n+1-l,k} \\ L_{ijk} &= \text{Re } \Delta^{-1} \left( \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right) \end{aligned}$$

где  $\Delta^{-1}$  — обратный оператор к оператору Лапласа. Поскольку оператор  $L_{ijk}$  интегральный, то можно показать, что он ограничен на пространстве функций  $\mathbf{v}_n$  из (П. 2), где  $f_{n,i}, f_{n,i}^0 \in L_2$  ( $[-1, 1]$ )

$$(П. 5) \quad \|L_{ijk}\| \leq 1/3\lambda \text{Re } R_0 < \infty; \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad 0 < \lambda < \infty$$

причем норма определяется соотношениями

$$(П.6) \quad \|\mathbf{v}_n\| = R_0^{-n} \|f_n\|, \quad \|\mathbf{f}_n\| = \sum_{i=1}^3 \|f_{n,i}\|_{L_2}$$

Из (П. 4) при учете (П. 5), (П. 6) заключаем, что

$$(П.7) \quad \|\mathbf{f}_n\| \leq \|\mathbf{f}_n^0\| + \lambda \text{Re} \sum_{l=2}^{n-1} \|\mathbf{f}_l\| \|\mathbf{f}_{n+1-l}\|$$

Полагая

$$(П.8) \quad f(n) = \|\mathbf{f}_n\|, \quad \|\mathbf{f}_n^0\| \leq c_0/n^\alpha, \quad \alpha > 1$$

при  $n \geq 1$  соотношение (П. 7) можно записать в интегральной форме, где  $n$  принимает действительные значения

$$(П.9) \quad f(n) \leq c_0/n^\alpha + \lambda \text{Re} \int_2^{n-1} dx f(x) f(n+1-x)$$

Переход к интегральному соотношению тем более оправдан, поскольку при  $n \rightarrow \infty$  показатели степени  $\mu_n, \zeta_n$ , построенные по нецелым  $\alpha_j, \gamma_j$ , плотно заполняют интервал  $[N, N + 1)$ ,  $N \gg 1$  с ограниченной функцией распределения, тем самым условие (П. 9) будет справедливо и для дробных показателей степени. В случае комплексных показателей степени аргумент  $n$  представляет собой действительную часть показателя степени (мнимая часть приводит к появлению осциллирующих множителей, по модулю не превышающих единицу, которые при построении нормы можно заменить единицей).

Выражение (П. 9), записанное в виде равенства, может служить уравнением для получения верхней оценки функции  $f(n)$  при больших  $n$ , которой вполне достаточно для решения вопросов о сходимости разложений. Действительно, усилим неравенство (П. 9)

$$(П.10) \quad f(x) < f_0(x) + \mu \int_1^x dy f(y) f(x+1-y)$$

$$f_0(x) = cx^{-\alpha}, \quad c_0 < c < \infty, \quad \alpha > 1, \quad x \geq 1, \quad \mu = \lambda \operatorname{Re} > 0$$

причем по построению  $f(x) \geq 0, f(1) > 0$ .

Пусть существует непрерывное решение  $g(x)$  уравнения]

$$(П.11) \quad g(x) = f_0(x) + \mu \int_1^x dy g(y) g(x+1-y)$$

Можно показать, что  $g(x) > 0$ .

Обозначим

$$(П.12) \quad u(x) = f(x) - g(x)$$

Из (П.10)–(П.12) следует

$$(П.13) \quad u(x) < \mu \int_1^x dy u(y) [f(x+1-y) + g(x+1-y)]$$

Откуда  $u(1) < 0$ . Поскольку функция  $u(x)$  непрерывна, то существует такое число  $a > 1$ , что  $u(x) < 0$  при  $1 \leq x < a$ . Пусть  $u(a) = 0$ , тогда из (П.13) приходим к противоречию

$$\int_1^a dy u(y) [f(a+1-y) + g(a+1-y)] > 0$$

при  $u(x) < 0, f(a+1-x) + g(a+1-x) \geq 0, 1 \leq x < a$ . Таким образом,  $u(x) < 0$  для всех конечных  $x$ .

Итак

$$(П.14) \quad f(x) < g(x), \quad 1 \leq x < \infty$$

Обозначим

(П.15)  $\varphi(x-1) = g(x), \varphi_0(x-1) = f_0(x)$  тогда уравнение (П. 11) представляется в виде

$$(П.16) \quad \varphi(x) = \varphi_0(x) + \mu \int_0^x dy \varphi(y) \varphi(x-y)$$

Уравнение (П.16) можно решить методом преобразования Лапласа

$$(П.17) \quad \Phi(\lambda) = \Phi_0(\lambda) + \mu \Phi^2(\lambda)$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{2\mu} [1 \pm \sqrt{1 - 4\mu\Phi_0}]$$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \varphi(x) dx, \quad \Phi_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \varphi_0(x) dx$$

Величина  $\varphi_0(x) = c/(1+x)^\alpha$ , откуда [14]

$$(П.18) \quad \Phi_0(\lambda) = c \Gamma(1-\alpha, \lambda) \lambda^{\alpha-1} e^\lambda$$

Для того чтобы определить асимптотику  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , достаточно исследовать решения (П.17) при  $\lambda \rightarrow 0$ . В этом случае

$$\Phi_0(\lambda) = c \Gamma(1-\alpha) \lambda^{\alpha-1} + o(\lambda^{\alpha-1})$$

а два корня (П. 17) имеют вид

$$\Phi_1 = \mu^{-1} - \Phi_0(\lambda) + O(\Phi_0^2), \quad \Phi_2 = \Phi_0(\lambda) + O(\Phi_0^2)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, видно, что при  $x \rightarrow \infty$  первый корень

$$(П. 19) \quad \varphi_1(x) = \mu^{-1} \delta(x) - \varphi_0(x) + o(\varphi_0)$$

а второй

$$(П. 20) \quad \varphi_2(x) = \varphi_0(x) + o(\varphi_0)$$

Из (П.19) следует, что для достаточно больших  $x$  величина  $\varphi_1(x) < 0$ , что недопустимо для нормы. Таким образом, главный член асимптотического разложения при  $x \rightarrow \infty$  дается равенством (П.20) и не зависит от величины  $\mu$ . Поскольку  $\mu = \lambda \operatorname{Re}$ , можно сделать вывод, что сходимость рядов (4.1)–(4.5) не зависит от значения числа Рейнольдса  $\operatorname{Re}$ . Тем не менее следует учитывать, что интенсивности собственных мультиполей зависят от  $\operatorname{Re}$  и в оценке  $f_0(N) \leq c_0 N^{-\alpha}$  постоянные  $c_0$ ,  $\alpha$  могут, вообще говоря, зависеть от числа  $\operatorname{Re}$ , и не исключается, следовательно, возможность существования такого  $\operatorname{Re}$ , при котором условия  $\alpha > 1$  или  $c_0 < \infty$  могут нарушиться. С другой стороны, главный асимптотический член (П.20) показывает, что при больших значениях  $N$  решение определяется вкладом решения однородной задачи, вклад же части решения, полученной итерациями по нелинейности, пренебрежимо мал.

Можно полагать, что для весьма широкого класса профилей скорости, близких к автомодельному решению Ландау, рассмотренные выше оценки будут справедливы. Указанное характерное асимптотическое поведение членов разложения может сделать предлагаемый способ построения решений уравнений Навье — Стокса удобным с практической, вычислительной точки зрения, хотя вопрос о том, являются ли предлагаемые разложения наилучшими среди других возможных, остается открытым.

Следует отметить, что в случае задачи о струйном течении в шаровом слое можно получить аналогичные утверждения о сходимости рядов (4.1)–(4.5). В частности, неравенство (П.10) для решения на сфере  $R = R_0$  преобразуется к виду

$$(П.21) \quad f(x) < f_0(x) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) f(x+1-y)$$

Можно также показать, что

$$f(x) < g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

где  $g(x)$  — непрерывное решение уравнения

$$g(x) = f_0(x) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) g(x+1-y)$$

и при  $|x| \rightarrow \infty$  аналогичным образом можно получить

$$f(x) < qf_0(x); \quad q > 1, \quad q = \text{const}$$

если фурье-образ  $F_0(k)$  функции  $f_0(x)$  такой, что  $F_0(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ .

Для того чтобы ряды (4.1)–(4.5) сходились в области  $R_0 \leq R \leq R_1$ , достаточно сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-x} dx \leq c_1 < \infty$$

В частности, если

$$f_0(x) \leq \frac{c_0}{(1+x^2)^{\alpha/2}} \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^x, \quad x \leq 0$$

$$f_0(x) \leq \frac{c_0}{(1+x^2)^{\alpha/2}}, \quad x > 0$$

$$0 < c_0 < \infty, \quad \alpha > 1$$

то необходимые требования удовлетворяются и ряды абсолютно сходятся везде в области  $[R_0, R_1]$ . Следует отметить более жесткое условие на асимптотическое поведение собственных мультиполей при положительных степенях сферического радиуса  $R$  ( $N \rightarrow -\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ ), поэтому область применимости предлагаемых разло-

жений для струйного течения в шаровом слое может быть уже (по допустимому виду профилей скорости на внешней сфере или числу  $Re$ ), чем в случае краевой задачи вне сферы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А., Яворский Н. И. О затопленных струях // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 573—583.
2. Ландау Л. Д. Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. № 7. С. 299—301.
3. Цуккер М. С. Закрученная струя, распространяющаяся в пространстве, затопленном той же жидкостью // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 4. С. 500—503.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
7. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние 1981. 366 с.
8. Кузов К., Меликов А., Лозанова А. Макроструктура свободной турбулентной струи с прямоугольным начальным сечением // Докл. V Нац. конгр. по теор. и приложн. механике. Варна. 1985. София: Изд-во Болг. АН, 1985. Т. 2. С. 657—662.
9. Krothapalli A., Baganoff D., Karamscheti K. On the mixing of a rectangular jet // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 201—220.
10. Morris P. J. The spatial viscous instability of axisymmetric jets // J. Fluid Mech. 1976. V. 77. Pt 3. P. 511—529.
11. Яворский Н. И. Неавтомодельная струя, распространяющаяся в ограниченном пространстве // Актуальные проблемы теплофизики и физической гидрогазодинамики. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. С. 144—151.
12. Reynolds A. J. Observation of a liquid-into-liquid jet // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. No. 4. P. 552—556.
13. Lessen M., Singh P. J. The stability of axisymmetric free shear layers // J. Fluid Mech. 1973. V. 60. No. 3. P. 433—457.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
15.VII.1987