

УДК 532.592.

МНОГОСЛОЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНОГО ДАВЛЕНИЯ

Бежанов К. А.

Исследуется плоская задача обтекания неровности дна при наличии поверхностного давления установившимся сдвиговым потоком идеальной несжимаемой тяжелой слоистой жидкости конечной глубины. Жидкость имеет конечное число слоев, на границах которых стратификация разрывна. Получено точное нелинейное интегродифференциальное уравнение, описывающее поверхностные и внутренние волны, генерируемые неровностью дна и поверхностным давлением. Сформулированы основные свойства спектра линейной задачи, доказанные в работе [1] и обобщающие результаты работ [2, 3]. Решение линейной задачи получено в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующего интегрального уравнения Фредгольма или эквивалентной граничной задачи. При средних скоростях потока, близких к критическим, но меньших них, рассмотрен случай резонансного усиления соответствующей моды. При средних скоростях потока, близких к критическим, но больших них, рассмотрена нелинейная задача обтекания с образованием двусолитонной внутренней волны.

1. Вывод основных уравнений. Рассматривается плоский установившийся поток идеальной несжимаемой тяжелой слоистой жидкости над неровным дном в случае, когда к свободной поверхности жидкости приложено известное давление. Ось x направлена по горизонтальному уровню дна, а ось y — вертикально вверх. При $x \rightarrow -\infty$ задан одномерный сдвиговой поток, имеющий устойчивую разрывную стратификацию. Одномерный слоистый поток под действием известного поверхностного давления $p_0(x)$ и неровности дна $y_0(x)$ порождает двумерный слоистый поток, функции $p_0(x)$ и $y_0(x)$ предполагаются непрерывными и финитными, а отрезок $[-x_0, x_0]$ — их общий носитель. В жидкости имеется n слоев, на границах $y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) которых терпят разрывы первого рода плотность и тангенциальная составляющая вектора скорости, а давление и нормальная составляющая вектора скорости непрерывны. Удобно еще предположить, что пространство над свободной границей заполнено фиктивной жидкостью нулевой плотности и скорости. В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным, беря в качестве единицы длины глубину потока h , а в качестве единицы плотности и скорости — среднюю плотность ρ_0 и среднюю скорость c одномерного потока [4].

В рамках постановки задачи, изложенной в работе [4], можно сформулировать следующую граничную задачу для возмущения ординаты линии тока $w(x, \eta)$ в эйлерово-лагранжевых переменных, где лагранжева координата η задает при $x \rightarrow -\infty$ расстояние невозмущенной линии тока от горизонтального дна

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a^2(\eta) \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + F_1 w \right) \right) + a^2(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + F_2 w \right) - \\ - \nu \rho(\eta) w = 0, \quad (x, \eta) \in T \\ a^2(1) \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}(x, 1) + F_1 w(x, 1) \right) - \nu \rho(1) w(x, 1) = -p_0(x)$$

$$\begin{aligned} & \left[a^2(\eta) \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}(x, \eta) + F_1 w(x, \eta) \right) - \nu \rho(\eta) w(x, \eta) \right]_k(x) = 0 \\ & [w(x, \eta)]_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ & w(x, 0) = y_0(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x, \eta) = 0 \\ & a^2(\eta) = \rho(\eta) V^2(\eta), \quad \nu = \frac{gh}{c^2} = \frac{1}{Fr^2} \end{aligned}$$

Здесь $[f]_k(x)$ — скачок функции $f(x, \eta)$ при переходе через k -ю границу раздела, $\rho(\eta)$ и $V(\eta)$ — плотность и скорость одномерного потока, имеющие разрывы первого рода в точках $\eta = \eta_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), $\eta_0 = 0$, $\eta_n = 1$ и удовлетворяющие условиям

$$\rho'(\eta) \leq 0, \quad \rho(\eta) \geq \rho_1 > 0, \quad V(\eta) \geq V_1 > 0$$

g — ускорение силы тяжести, Fr — число Фруда, $F_1 w$ и $F_2 w$ — нелинейные операторы

$$(1.2) \quad F_1 w = - \frac{w_x^2 + 3w_\eta^2 + 2w_\eta^3}{2(1 + w_\eta)^2}, \quad F_2 w = - \frac{w_x w_\eta}{1 + w_\eta}$$

$$T = \bigcup_{k=1}^n T_k, \quad T_k = \{(x, \eta) : -\infty < x < +\infty, \eta_{k-1} < \eta < \eta_k\}$$

а нижние индексы x и η указывают на операцию дифференцирования по соответствующей переменной.

Граничную задачу (1.1) можно свести к следующему нелинейному интегродифференциальному уравнению (ИДУ) с непрерывными и симметризуемыми ядрами:

$$(1.3) \quad w(x, \eta) - \nu \int_0^1 G(\eta, \xi) w(x, \xi) d\mu(\xi) = y_0(x) - q(\eta) p_0(x) -$$

$$- \int_0^\eta F_1 w d\xi + \int_0^1 a^2(\xi) G(\eta, \xi) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, \xi) + \frac{\partial}{\partial x} F_2 w \right) d\xi$$

где $d\mu(\eta)$ — мера Лебега—Стилтьеса, порожденная монотонной функцией $\mu(\eta) = \rho(0) - \rho(\eta)$, а $G(\eta, \xi)$ — функция Грина

$$(1.4) \quad G(\eta, \xi) = \begin{cases} q(\eta), & 0 \leq \eta \leq \xi \\ q(\xi), & \xi \leq \eta \leq 1 \end{cases}, \quad q(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\tau}{a^2(\tau)}$$

являющееся ядром интегрального уравнения Фредгольма

$$(1.5) \quad \varphi(\eta) - \nu \int_0^1 G(\eta, \xi) \varphi(\xi) d\mu(\xi) = 0$$

На отрезке $\Omega = \{\eta : 0 \leq \eta \leq 1\}$ интегральное уравнение (1.5) имеет счетное множество вещественных простых положительных характеристических чисел ν и полную в $L_2(\mu, \Omega)$ ортонормированную систему собственных функций $\{\varphi_m(\eta)\}$, а резольвента есть мероморфная функция параметра ν с простыми полюсами в точках $\nu = \nu_m$

$$(1.6) \quad \Gamma(\xi, \eta, \nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(\xi) \varphi_m(\eta)}{\nu - \nu_m}$$

Далее характеристические числа занумерованы в порядке возрастания, их называют еще критическими значениями параметра ν и им соответствуют критические скорости распространения длинных волн $c_m = \sqrt{gh/V_m}$.

Если продифференцировать уравнение (1.5) при $\eta \neq \eta_k$ и использовать выражение для производной $G(\eta, \xi)$ из (1.4), то можно получить формулу

$$(1.7) \quad v_m \int_{\eta}^1 \varphi_m(\xi) d\mu(\xi) = a^2(\eta) \varphi_m'(\eta)$$

где штрих здесь и далее означает операцию дифференцирования.

Если теперь обратить оператор Фредгольма, стоящий в левой части уравнения (1.3), и воспользоваться формулой (1.7), то можно получить основное нелинейное ИДУ, описывающее поверхностные и внутренние волны, генерируемые неровностью дна и поверхностным давлением

$$(1.8) \quad w(x, \eta) + \int_0^1 a^2(\xi) \Gamma(\xi, \eta, v) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, \xi) d\xi + \\ + \int_0^{\eta} F_1 w d\xi + \int_0^1 a^2(\xi) \Gamma(\xi, \eta, v) \frac{\partial}{\partial x} F_2 w d\xi - \\ - v \int_0^1 a^2(\xi) \Gamma_1(\xi, \eta, v) F_1 w d\xi = F(x, \eta)$$

$$(1.9) \quad F(x, \eta) = \chi(\eta, v) y_0(x) - \kappa(\eta, v) p_0(x)$$

$$\kappa(\eta, v) = 1 - v \int_0^1 \Gamma(\xi, \eta, v) d\mu(\xi)$$

$$\kappa(\eta, v) = q(\eta) - v \int_0^1 \Gamma(\xi, \eta, v) q(\xi) d\mu(\xi)$$

$$\Gamma_1(\xi, \eta, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m'(\xi) \varphi_m(\eta)}{v_m(v - v_m)}$$

Существенное отличие ИДУ (1.8) от (1.3) состоит в том, что соответствующее (1.8) однородное уравнение не содержит меры Лебега—Стилтьеса. Представляет интерес численное решение уравнения (1.8) и сравнение с полученными ниже результатами линейной и нелинейной теории.

2. Исследование линейной задачи. Для решения линейного ИДУ, соответствующего уравнению (1.8), надо рассмотреть следующее интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным симметризуемым ядром [1, 4]:

$$(2.1) \quad z(\eta, v) - \lambda \int_0^1 a^2(\xi) \Gamma(\xi, \eta, v) z(\xi, v) d\xi = 0$$

Для уравнения (2.1) можно сформулировать эквивалентную граничную задачу типа задачи Штурма—Лиувилля, содержащую два параметра λ и v , которая получается из граничной задачи (1.1), если искать решение линейной задачи о свободных волнах методом разделения переменных

$$(2.2) \quad \frac{d}{d\eta} \left(a^2(\eta) \frac{dz}{d\eta} \right) - (\lambda a^2(\eta) + v\rho'(\eta)) z = 0, \quad \eta \in \Omega_1$$

$$a^2(1) \frac{dz}{d\eta}(1, v) - v\rho(1) z(1, v) = 0$$

$$\left[a^2(\eta) \frac{dz}{d\eta} - v\rho(\eta) z \right]_k = 0, \quad [z]_k = 0$$

$$z(0, v) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

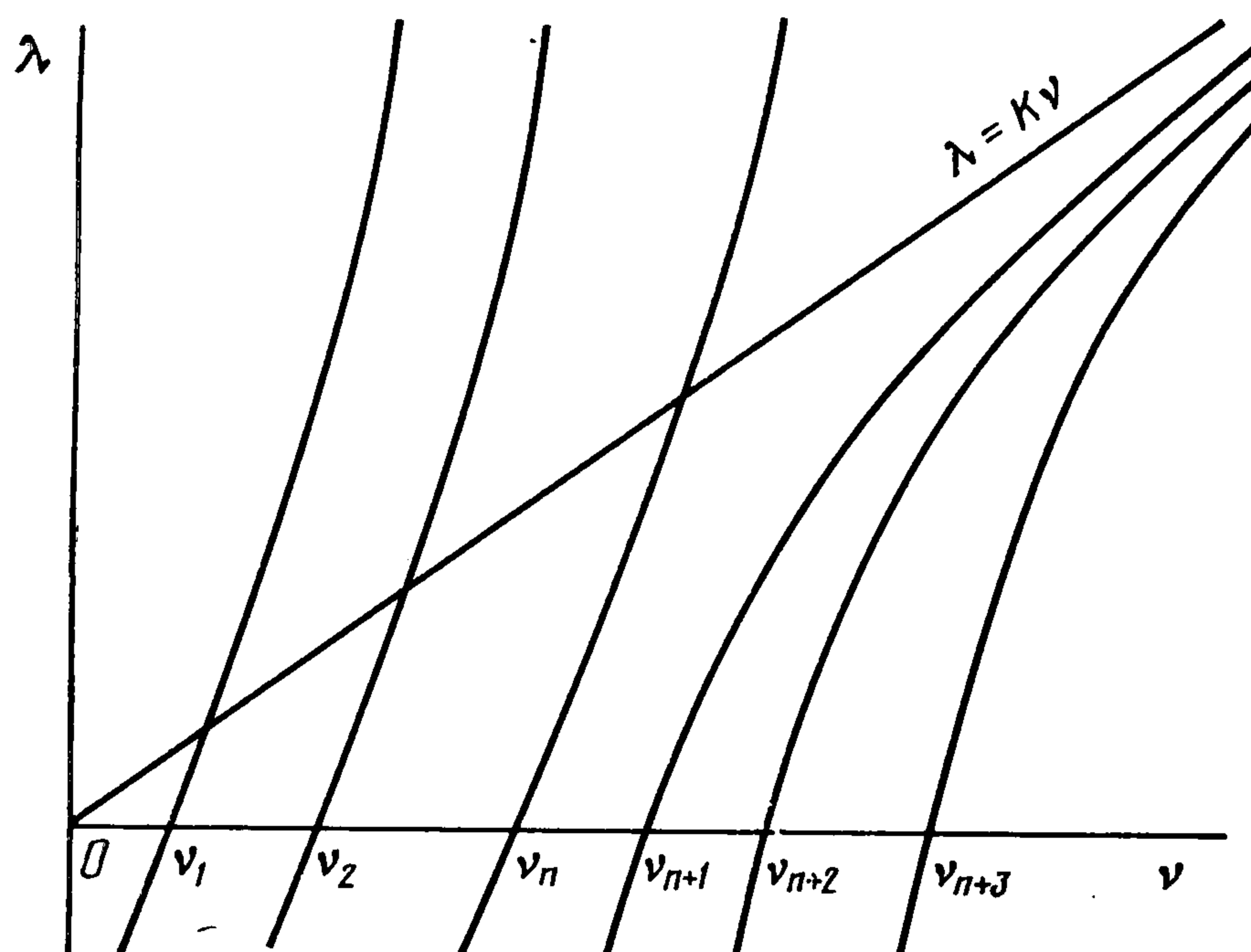
$$\Omega_1 = \{ \eta: 0 < \eta < 1, \eta \neq \eta_k, k = 1, \dots, n-1 \}$$

Следующие свойства характеристических чисел и собственных функций были доказаны в работах [1, 4, 5]. Большая их часть для однослойной модели и многослойной модели без сдвиговых потоков были известны ранее [2, 3, 6, 7].

а) Все характеристические числа $\lambda_m(\nu)$ интегрального уравнения (2.1) или граничной задачи (2.2) при $\nu \neq \nu_l$ вещественные и простые.

б) Если $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_l < \dots$ — критические значения параметра ν , то при $\nu < \nu_1$ все характеристические числа $\lambda_m(\nu)$ — отрицательны.

в) Функции $\lambda_m(\nu)$ и $\lambda_m(\nu)/\nu$, $\nu \in (0, +\infty)$ — строго монотонно возрастающие функции параметра ν .



г) Если числа

$$\frac{1}{V^4(1)}, \left(\frac{\rho(\eta_k + 0) - \rho(\eta_k - 0)}{a^2(\eta_k + 0) + a^2(\eta_k - 0)} \right)^2, \quad k = 1, \dots, n - 1$$

расположить в порядке убывания и обозначить их $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, то при $\nu \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \lambda_m(\nu) &\sim \alpha_m \nu^2, \quad m = 1, \dots, n \\ \lambda_m(\nu) &\sim K\nu, \quad m = n + 1, n + 2, \dots; \quad K = \max_{\eta \in \Omega} \frac{N(\eta)}{V^2(\eta)} \end{aligned}$$

где $N(\eta)$ — частота Брента—Вяйсяля.

д) При $\nu \in (\nu_l, \nu_{l+1})$ характеристические числа $\lambda_1(\nu), \dots, \lambda_l(\nu)$ — положительны, а все остальные отрицательны.

е) Интегральное уравнение (2.1) или эквивалентная граничная задача (2.2) имеет полную в $L_2(\Omega)$ ортонормированную с весом $a^2(\eta)$ систему собственных функций.

ж) Собственная функция $z_m(\eta, \nu)$ имеет на интервале $\eta \in (0, 1)$ точно $m - 1$ нулей типа узла, а нули функций $z_m(\eta, \nu)$ и $z_{m+1}(\eta, \nu)$ перемеживаются на том же интервале. При $\eta \in \Omega$ собственная функция $z_m(\eta, \nu)$ m раз обращается в нуль, поскольку $z_m(0, \nu) = 0$.

з) Если частота Брента—Вяйсяля имеет единственный максимум в точке η_0 , то в любой ее ε -окрестности найдется столь большое ν_0 , что при $\nu > \nu_0$ все $n - 1$ нулей собственной функции $z_m(\eta, \nu)$ сосредоточены на отрезке $[\eta_0 - \varepsilon, \eta_0 + \varepsilon]$ и имеет место захват внутренних волн в термоклине.

Свойства а) — д) позволяют построить графики дисперсионных кривых, приведенных на фигуре. Таким образом, в потоке слоистой жид-

кости с разрывной стратификацией и при наличии сдвиговых потоков могут возникать n волновых мод, соответствующих свободной поверхности и границам раздела с дисперсионными кривыми, пересекающими прямую $\lambda = K\nu$, и бесконечное число волновых мод, соответствующих непрерывной расслоенности в каждом слое с дисперсионными кривыми, лежащими ниже прямой $\lambda = K\nu$.

Сформулированные свойства спектра линейной задачи позволяют решить линейное ИДУ, соответствующее уравнению (1.8), методом Фурье. Если разложить $w(x, \eta)$, $\chi(\eta, \nu)$ и $\kappa(\eta, \nu)$ в ряд Фурье по полной в $L_2(\Omega)$ системе $\{z_m(\eta, \nu)\}$ и подставить в линейное ИДУ, то для неизвестных коэффициентов Фурье $w_m(x)$ искомого решения получим

$$(2.3) \quad \frac{d^2 w_m}{dx^2} + \lambda_m w_m = \lambda_m f_m(x), \quad |x| < \infty$$

$$f_m(x) = \chi_m y_0(x) - \kappa_m p_0(x)$$

$$\chi_m = \int_0^1 a^2(\xi) z_m(\xi, \nu) d\xi - \frac{\nu}{\lambda_m} \int_0^1 z_m(\xi, \nu) d\mu(\xi)$$

$$\kappa_m = \int_0^1 a^2(\xi) q(\xi) z_m(\xi, \nu) d\xi - \frac{\nu}{\lambda_m} \int_0^1 q(\xi) z_m(\xi, \nu) d\mu(\xi)$$

Здесь χ_m и κ_m — коэффициенты Фурье функций $\chi(\eta, \nu)$ и $\kappa(\eta, \nu)$.

Решение уравнения (2.3), равное нулю вместе со своей производной при $x \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$(2.4) \quad w_m(x) = w_m^+(x) = \sqrt{\lambda_m} \int_{-x_0}^x f_m(\xi) \sin \sqrt{\lambda_m} (x - \xi) d\xi, \quad \lambda_m > 0$$

$$(2.5) \quad w_m(x) = w_m^-(x) = \frac{\sqrt{|\lambda_m|}}{2} \int_{-x_0}^{x_0} f_m(\xi) \exp(-\sqrt{|\lambda_m|} |x - \xi|) d\xi,$$

$$\lambda_m < 0$$

и окончательно

$$(2.6) \quad w(x, \eta) = \sum_{m=1}^L w_m^+(x) z_m(\eta, \nu) + \sum_{m=L+1}^{\infty} w_m^-(x) z_m(\eta, \nu)$$

Таким образом, при $\nu \in (\nu_l, \nu_{l+1})$ решение линейной задачи (2.4) — (2.6) представлено в виде суммы $l = L(\nu)$ гармонических волн и бесконечного числа экспоненциально затухающих возмущений [8, 9].

В рассматриваемом линейном случае при $\nu \rightarrow \nu_l + 0$ ($c \rightarrow c_l - 0$) имеет место эффект резонансного усиления l -й моды. В этом случае решение заметно упрощается и сводится к одному члену ряда (2.6). Была доказана [1] аналитичность функций $\lambda_l(\nu)$ и $z_l(\eta, \nu)$ по переменной ν в окрестности точки $\nu = \nu_l$. Тогда, если учесть, что $\lambda_l(\nu_l) = 0$, справедливы асимптотические формулы

$$(2.7) \quad \lambda_l(\nu) = \frac{\nu - \nu_l}{A_{ll}} + o(\nu - \nu_l), \quad A_{ll} = \int_0^1 a^2(\xi) \varphi_l^2(\xi) d\xi$$

$$z_l(\eta, \nu) = \frac{\varphi_l(\eta)}{\sqrt{A_{ll}}} + O(\nu - \nu_l)$$

Кроме того, из формул (1.6), (1.7) и (2.3) имеем следующие приближенные формулы при $v \rightarrow v_l + 0$:

$$(2.8) \quad \Gamma(\xi, \eta, v) \approx \frac{\varphi_l(\xi) \varphi_l(\eta)}{v - v_l}$$

$$\chi_l \approx \frac{v_l}{(v_l - v) \sqrt{A_{ll}}} \int_0^1 \varphi_l(\xi) d\mu(\xi) = \frac{\chi_0}{(v_l - v) \sqrt{A_{ll}}}$$

$$\kappa_l \approx \frac{v_l}{(v_l - v) \sqrt{A_{ll}}} \int_0^1 q(\xi) \varphi_l(\xi) d\mu(\xi) = \frac{\kappa_0}{(v_l - v) \sqrt{A_{ll}}}$$

$$\kappa_0 = a^2(0) \varphi_l'(0), \quad \chi_0 = \varphi_l(1)$$

где интеграл в формуле для κ_l вычисляется подстановкой в нее выражения для $q(\xi)$ из (1.4), переменной порядка интегрирования и использованием формулы (1.7)

Тогда, если

$$(2.9) \quad P = \int_{-x_0}^{x_0} p_0(x) dx = o(\sqrt{v - v_l}), \quad S = \int_{-x_0}^{x_0} y_0(x) dx = o(\sqrt{v - v_l})$$

т. е. при определенном согласовании величин P и S со степенью приближения средней скорости потока к критической скорости распространения длинных волн, справедливы предположения линейной теории и из формул (2.4)–(2.9) имеем при $x > x_0$

$$w(x, \eta) = \frac{\kappa_0 P - \chi_0 S}{\sqrt{(v - v_l) A_{ll}}} \sin \sqrt{\lambda_l} x \varphi_l(\eta) + O(\delta)$$

где $O(\delta)$ — величина порядка P и S .

3. Вывод нелинейного уравнения] при $v \rightarrow v_l - 0$. Пусть средняя скорость одномерного потока c близка к одной из критических скоростей распространения длинных волн, но больше нее: $c \rightarrow c_l + 0$ ($v \rightarrow v_l - 0$). В этом случае линейная теория становится неприменимой, а приближенная нелинейная теория дает качественно новый эффект, выражающийся в появлении «предвестника» в виде солитонов, расположенных по вертикали впереди обтекаемых источников возмущений, и солитонов, также расположенных по вертикали, за обтекаемыми источниками.

При $v \rightarrow v_l - 0$ справедливы асимптотические формулы (2.8), в которых удобно положить $A_{ll} = 1$, и кроме того]

$$(3.1) \quad \Gamma_1(\xi, \eta, v) \approx - \frac{\varphi_l'(\xi) \varphi_l(\eta)}{v_l \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = v_l - v$$

Подставляя формулы (2.8) и (3.1) в ИДУ (1.8), получим

$$(3.2) \quad \varepsilon^2 \frac{w(x, \eta)}{\varphi_l(\eta)} - \int_0^1 a^2(\xi) \varphi_l(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, \xi) d\xi - \int_0^1 a^2(\xi) \varphi_l(\xi) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x} F_2 w(x, \xi) d\xi + \int_0^1 a^2(\xi) \varphi_l'(\xi) F_1 w(x, \xi) d\xi = \chi_0 y_0(x) - \kappa_0 p_0(x)$$

Из уравнения (3.2) следует, что в первом приближении можно положить

$$(3.3) \quad w(x, \eta) \approx u(x) \varphi_l(\eta)$$

Кроме того, выражения для $F_1 w$ и $F_2 w$ представим приближенно в виде

$$(3.4) \quad F_1 w \approx -\frac{3}{2} w_\eta^2 + 2w_\eta^3 - \frac{1}{2} w_x^2, \quad F_2 w \approx -w_x w_\eta$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в уравнение (3.2), получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$(3.5) \quad \frac{1}{b^2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{3}{2d} u^2 - \frac{2}{e} u^3 - \varepsilon^2 u - Eu \frac{du}{dx} + \\ + \frac{E}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \kappa_0 p_0(x) - \chi_0 y_0(x)$$

$$(3.6) \quad \frac{1}{b^2} = \int_0^1 a^2(\xi) \varphi_l^2(\xi) d\xi, \quad \frac{1}{d} = \int_0^1 a^2(\xi) (\varphi_l'(\xi))^3 d\xi \\ \frac{1}{e} = \int_0^1 a^2(\xi) (\varphi_l'(\xi))^4 d\xi, \quad E = \int_0^1 a^2(\xi) \varphi_l'(\xi) \varphi_l^2(\xi) d\xi$$

Ниже предполагается, что интеграл в выражении для постоянной d в формулах (3.6) в нуль не обращается. Исследование вырожденного случая $((1/d) = 0)$ сопряжено с большими техническими трудностями и не представляет большого интереса.

4. Исследование одной нелинейной задачи. Нелинейное уравнение (3.5) еще достаточно сложное для аналитического исследования, поэтому ниже строится его приближенное решение. Для этого ось x разбивается на три промежутка: $(-\infty, -x_0]$, $(-x_0, x_0)$ и $[x_0, +\infty)$, для каждого из которых уравнение (3.5) упрощается, а далее в точках $\pm x_0$ происходит склейка решений за счет выбора произвольных постоянных.

При $|x| \geq x_0$ ищется длинноволновое приближение уравнения (3.5), которое в силу финитности функций $p_0(x)$ и $y_0(x)$ становится однородным. Для этого делаем растяжение независимой переменной по малому параметру ε и ищем решение в виде ряда по степеням ε , ограничиваясь первым членом разложения

$$\tau = \varepsilon b x, \quad u = \varepsilon^2 dv(\tau) + \dots$$

Тогда получим стационарное уравнение Кортевега-де Вриза

$$u''(\tau) + \frac{3}{2} v^2(\tau) - v(\tau) = 0$$

обладающее двухпараметрическим семейством периодических решений в виде кноидальной волны [11]. Окончательно имеем

$$(4.1) \quad u(x) = \begin{cases} u_-(x), & x \leq -x_0 \\ u_+(x), & x \geq x_0 \end{cases} \\ u_\mp(x) = \varepsilon^2 d \left(\alpha + (\beta - \alpha) \operatorname{cn}^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon \delta b (x \pm x_0) \pm A_\mp, s \right) \right) \\ \beta = (1 - \alpha + \delta)/2, \quad \delta = \sqrt{(1 - \alpha)(1 + 3\alpha)} \\ \gamma = (\alpha - 1 + \delta)/2, \quad s^2 = (\beta - \alpha)/(\beta + \alpha)$$

где α , A_- и A_+ — произвольные положительные постоянные.

При $\alpha \rightarrow 0$ из формул (4.1) имеем $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 1$, $s \rightarrow 1$ и кноидальная волна вырождается в солитон.

В этом случае

$$(4.2) \quad u_\mp(x) = \varepsilon^2 d \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon b (x \pm x_0) \pm A_\mp \right)$$

Произвольные постоянные A_- и A_+ определяются после нахождения приближенного решения уравнения (3.5) на отрезке $[-x_0, x_0]$ и согласования решений и их производных при $x = \pm x_0$. Для этого, используя формулы (4.2), получим

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u(\mp x_0) &= \varepsilon^2 d (1 - B_{\mp}^2), \quad B_{\pm} = \text{th } A_{\pm} \\ u'(\mp x_0) &= \mp \varepsilon^3 b d B_{\mp} (1 - B_{\mp}^2) \end{aligned}$$

При $x \in (-x_0, x_0)$ найдем решение уравнения (3.5) в предположении, что

$$\begin{aligned} x_0 &= O(1), \quad S = O(\varepsilon^3), \quad P = O(\varepsilon^3) \\ u(x) &= O(\varepsilon^2), \quad u'(x) = O(\varepsilon^3), \quad u''(x) = O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.5) заметно упрощается и принимает вид

$$(4.4) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = b^2 (\kappa_0 p_0(x) - \chi_0 y_0(x))$$

Решая задачу Коши для уравнения (4.4) с начальными условиями (4.3) в точке $-x_0$, получим

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= b^2 \int_{-x_0}^x (\kappa_0 p_0(\xi) - \chi_0 y_0(\xi)) d\xi - \varepsilon^3 b dB_-(1 - B_-^2) \\ u(x) &= b^2 \int_{-x_0}^x (x - \xi) (\kappa_0 p_0(\xi) - \chi_0 y_0(\xi)) d\xi + \\ &+ \varepsilon^2 d (1 - B_-^2) - \varepsilon^3 b d B_-(1 - B_-^2) (x + x_0) \end{aligned}$$

Согласование решений (4.2) и (4.5) в точке x_0 позволяет получить алгебраическую систему для определения постоянных B_- и B_+ . Из (4.3) и (4.5) имеем

$$(4.6) \quad B_-(1 - B_-^2) = \frac{b}{2d\varepsilon^3} (\kappa_0 P - \chi_0 S), \quad A_- = A_+$$

Система (4.6) имеет при $0 \leq B_{\pm} \leq 1$ два решения, которые удовлетворяют неравенствам

$$(4.7) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \frac{b}{d\varepsilon^3} (\kappa_0 P - \chi_0 S) \leq \frac{4}{3\sqrt{3}} \\ 0 &\leq B_-^{(1)} \leq (1/\sqrt{3}) \leq B_-^{(2)} \leq 1 \end{aligned}$$

т. е. при заданных параметрах набегающего потока и заданном ε двусолитонное решение может существовать только при определенных соотношениях между величинами P и S , при этом из двух решений надо отобрать одно физически реализуемое.

При фиксированном ε и $P \rightarrow 0$, $S \rightarrow 0$ первое решение вырождается в одномерный поток, в этом случае солитоны расходятся и уходят на бесконечность, а второе решение вырождается в уединенную волну, поскольку солитоны сходятся и сливаются. Так как при $v \rightarrow v_l = 0$ одномерный поток неустойчив, а уединенная волна устойчива, то можно предположить, что реализуется второе решение [12]. Представляет интерес исследование нестационарной задачи на устойчивость, а также исследование вопросов существования полученных приближенных решений.

Из формул (4.2) и (4.6) следует, что при заданных параметрах одномерного потока два солитона с вершинами в точках $\pm (x_0 + 2A/b\varepsilon)$ расположены симметрично относительно начала координат и расположение солитонов зависит от величин P , S и ε , а амплитуды определяются только величиной ε .

Склейка решения (4.5) с решением для кноидальной волны (4.1), а также склейка солитонного решения (4.2) при $x \leq -x_0$ с решением (4.5) и с решением для кноидальной волны (4.1) при $x \geq x_0$ приводит к системе двух уравнений для определения α , A_- и A_+ , т. е. дает однопараметрическое семейство решений, переходящее при $\alpha \rightarrow 0$ в полученное выше двухсолитонное решение.

5. Однослойная и двухслойная модели. В случае однослойной модели $\rho(\eta) = V(\eta) = 1$ и из граничной задачи (2.2) находится соответствующая нормированная собственная функция

$$(5.1) \quad \varphi_1(\eta) = \eta, \quad \eta \in \Omega$$

Условие (4.8) принимает вид

$$(5.2) \quad 0 \leq P - S \leq 4\varepsilon^3/9$$

из которого следует, что для существования двухсолитонного решения необходимо, чтобы величина суммарного давления на свободную поверхность превосходила величину S . Например, при отсутствии поверхностного давления для случая препятствия из условия (5.2) следует, что в однородной жидкости двухсолитонное решение не существует.

Для двухслойной модели рассматривается случай кусочно-постоянного распределения плотности, приведенный в работе [4]. При $\nu \rightarrow \nu_1 = 0$ нормированная собственная функция $\varphi_1(\eta)$ имеет вид (5.1) и условие (4.7) совпадает с (5.2), а при $\nu \rightarrow \nu_2 = 0$

$$\varphi_2(\eta) = \frac{1}{h_1 h_2 \sqrt{\Delta\rho}} \begin{cases} h_2 \eta, & 0 \leq \eta \leq h_1 \\ h_1 (1 - \eta), & h_1 \leq \eta \leq 1 \end{cases}$$

где $\Delta\rho > 0$ — малое изменение плотности, $h_1 + h_2 = 1$. Условие (4.7) существования двухсолитонного решения принимает вид

$$0 \leq (h_1 - h_2)S \leq 4\varepsilon^3 / (9h_1^3 h_2^2 (\Delta\rho)^{3/2})$$

и выполняется при некоторых ε и $\Delta\rho$ для случая, когда верхний слой не толще нижнего независимо от величины поверхностного давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М. Исследование спектральной задачи теории слоистых течений идеальной несжимаемой тяжелой жидкости // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 11. С. 1843—1851.
2. Yanowitch M. Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid // Commun. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. № 1. P. 45—61.
3. Доценко С. Ф. О структуре волнового движения в потоке при произвольном изменении плотности по глубине // Морские гидрофизич. исследования. Севастополь: Изд-е МГИ АН УССР, 1973. № 3. С. 32—41.
4. Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М. Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 750—760.
5. Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М. Обтекание тела многослойным потоком идеальной несжимаемой тяжелой жидкости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 392—400.
6. Long R. R. Some aspects of the flow of stratified fluids. I. A theoretical investigation // Tellus. 1953. V. 5. № 1. P. 42—58.
7. Yih C. S. Dynamics of Nonhomogeneous Fluids. New York: MacMillan, 1965. 306 p.
8. Доценко С. Ф., Черкесов Л. В. О влиянии непрерывного изменения плотности жидкости на волны, генерируемые движущимися поверхностными давлениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 55—62.
9. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук думка, 1976. 364 с.
10. Тер-Крикоров А. М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1067—1076.
11. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
12. Физика океана. Т. 2 / Под ред. Каменковича В. М. и Моница А. С. М.: Наука, 1978. 455 с.