УДК 62-50

О ДИНАМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Максимов В. И.

Исследуются задачи динамического восстановления нагрузки, действующей на мембрану, жестко закрепленную на горизонтальной рамке, а также восстановления потока тепла, поступающего в термостат. Эти задачи рассматриваются как частные случаи общей проблемы динамического моделирования неизвестных характеристик в параболических вариационных неравенствах. Для решения указанной проблемы конструируется устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм, основанный на методах теории позиционного управления [1, 2]. Этот алгоритм можно рассматривать как модификацию алгоритма, предложенного [3] для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Приводится модельный пример. Работа опирается на исследования [3, 4] и продолжает [5].

1. Был предложен ([6], с. 472) численный метод нахождения прогиба $y(x, t)$ мембраны, жестко закрепленной на горизонтальной рамке с постоянным натяжением F и подвергающейся воздействию заданной нагрузки $g(x, t)$.

Рассмотрим обратную задачу определения нагрузки $g(x, t)$ по известному прогибу $y(x, t)$. Пусть Ω — плоская область, ограниченная рамкой. Обозначим

$$u(x, t) = g(x, t)/F, \quad K = \{v(\cdot) \mid v(x) \in H_0^1, \quad v(x) \leqslant 0 \text{ в } \Omega\}$$
$$K_* = \{v(\cdot) \mid v(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; H_0^1), \ \partial v/\partial t \in L_2([t_0, \vartheta]; H^{-1}), \ v(t_0) = y_0\}$$

$H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ — пространства Соболева. Процесс прогиба мембраны, подвергающейся воздействию $g(x, t)$, описывается неравенством (Δ — оператор Лапласа)

$$\int_\Omega (\partial y(x,t)/\partial t - \Delta y(x,t) - u(x,t), v(x) - y(x,t))\, dx \geqslant 0, \quad y(t) \in K$$

при п.в. $t \in [t_0, \vartheta]$ и всех $v(\cdot) \in K$, $y(\cdot) \in K$.

Предположим, что натяжение F задано, а нагрузка $g(x, t)$, действующая в течение промежутка времени $[t_0, \vartheta]$, неизвестна. В моменты $\tau_i \in [t_0, \vartheta]$, $\tau_i = t_0 + i\delta$, $\delta > 0$, с некоторой точностью замеряется прогиб $y(x, \tau_i)$, т. е. находится функция $\psi(x, \tau_i)$, приближающая $y(x, \tau_i)$. Требуется указать работающий в темпе реального времени динамический алгоритм вычисления $g(x, t)$. Такова содержательная постановка задачи динамического восстановления нагрузки. Измерение прогиба пластины в каждой точке $x \in \Omega$ может быть связано с техническими трудностями. В этом случае естественно поставить задачу о вычислении g по прогибам $y(x, \tau_i)$, замеряемым в дискретных точках $x = x_j \in \Omega$.

Примем обозначения: H, V и U — действительные гильбертовы пространства с нормами $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_V$, $V \subset H$, вложение V в H непрерывно и плотно, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H, $(\cdot, \cdot)_{V\times V^*}$ — двойственность между V и V^*; $L(U, X)$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов из U в X; $W^{1,2}([t_0, \vartheta]; H)$, $C([t_0, \vartheta]; H)$ и $L_2([t_0, \vartheta]; H)$ — стандартные пространства; $W^{1,2}((t_0, \vartheta]; H)$, $(L_2((t_0, \vartheta]; H))$ — пространство функций $y(\cdot)$: $(t_0, \vartheta] \to H$, таких, что $y(\cdot)$: $[t_0 + \varepsilon, \vartheta] \to H$ есть элемент $W^{1,2}([t_0 + \varepsilon, \vartheta]; H)$ $(L_2([t_0 + \varepsilon, \vartheta]; H))$ для всякого $\varepsilon \in (0, \vartheta - t_0)$; Δ — разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\delta = \delta(\Delta)$ (это совокупность точек $\{\tau_i\}$, $i \in [0: m]$, $m = m(\Delta)$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = \vartheta$, $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$); U_0 — множество допустимых управлений; $\bar{R} = R \cup \{+\infty\}$; $\bar{A}$ — замыкание $A \subset H$, $A_1 - A_2 = \{x - y \mid x \in A_1,\ y \in A_2\}$; $D(B)$ и $R(B)$ — области определения и значений оператора B; $\partial\varphi$ — субдифференциал φ; $\partial\varphi_\lambda$ — оператор Иосиды [7] отображения $x \to \partial\varphi(x)$, отвечающий параметру $\lambda > 0$; $\partial\varphi^0(y) = \{z \in H \mid |z| = \inf |x|,\ x \in \partial\varphi(y)\}$; $u_{a,b}(\cdot)$ — функция $u(t)$, $t \in [a, b]$. Интеграл всюду понимается в смысле Бохнера, а производная — в обобщенном смысле. Из свойств операторов Иосиды (см., например, [7]), в частности, следует, что $\partial\varphi_\lambda(x) \to \partial\varphi^0(x)$ при $\lambda \to 0+$.

2. Рассматривается динамическая система Σ, описываемая параболическим вариационным неравенством

$$(2.1)\qquad (y^{\cdot}(t) - B(t, y(t))u(t) - f(t),\ y(t) - z) + (Ay(t),\ y(t) - z)_{V\times V^*} + \varphi(y(t)) - \varphi(z) \leqslant 0 \text{ при п.в. } t \in (t_0, \vartheta) \text{ и всех } z \in V$$

Здесь $f(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; H)$ — заданная функция, $A: V \to V^*$ — линейный, непрерывный и симметричный оператор, удовлетворяющий для некоторых $\omega > 0$ и α условию коэрцитивности

$$(Az, z)_{V\times V^*} + \alpha\, |z|^2 \geqslant \omega\, \|z\|^2 \text{ при всех } z \in V$$

φ: $V \to \bar{R}$ — выпуклая, полунепрерывная снизу, собственная функция.

Семейство зависящих от параметров $t \in [t_0, \vartheta]$ и $y \in H$ операторов $B(t, y) \in L(U, H)$ таково, что для любой кусочно-постоянной с конечным числом точек разрыва функции $y(\cdot)$ имеется деминепрерывный оператор B_y: $L_2([t_0, \vartheta]; U) \to L_2([t_0, \vartheta]; H)$, допускающий представление $\{B_y u(\cdot)\}(t) = B(t, y(t))u(t)$.

Функция $y(\cdot)$: $[t_0, \vartheta] \to H$ называется сильным решением (2.1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; U)$ и начальному состоянию $y_0 \in E_1 \equiv D(\varphi) \cap V$, если она при п.в. $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет (2.1), $y(\cdot) \in W^{1,2}([t_0, \vartheta]; H) \cap C([t_0, \vartheta]; V)$, $y(t_0) = y_0$, $Ay(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; H)$ и

$$(2.2)\qquad y^{\cdot}(t) = (-Ay(t) - \partial\varphi(y(t)) + B(t, y(t))u(t) + f(t))^{\circ} \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta]$$

Функция $y(\cdot)$: $[t_0, \vartheta] \to H$, $y(t_0) = y_0$, есть сильное решение (2.1), отвечающее условиям $u(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; U)$ и $y_0 \in E_2 \equiv \overline{D(\varphi) \cap V} \setminus D(\varphi) \cap V$, если $y(\cdot) \in W^{1,2}([t_0, \vartheta]; H) \cap C([t_0, \vartheta]; H)$ и при п.в. $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет (2.1), (2.2).

В дальнейшем рассматриваются два случая: 1) $y_0 \in E_1$, 2) $y_0 \in E_2$. Предполагается, что начальному положению y_0 и действующему на систему Σ управлению $u_p(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; U)$ отвечает единственное сильное решение $y_p(\cdot) = y(\cdot; y_0, u_p)$. Это имеет место, например, когда $B(t, y) \equiv B$, φ: $H \to \bar{R}$ — полунепрерывная снизу функция и существует независимая от $\lambda > 0$ постоянная $C > 0$, такая, что для всех элементов $y \in$

$\in D(A_H) = \{y \in V \mid Ay \in H\}$ и всех операторов $\partial\varphi_\lambda(y)$

$$(Ay, \partial\varphi_\lambda(y)) \geqslant -C(1 + |\partial\varphi_\lambda(y)|)(1 + |y|), \quad \lambda > 0$$

Задача, обсуждаемая в работе, состоит в следующем. Имеется система Σ, на которую действует неизвестное управление $u_p(\cdot) \in U_0 \subset \subset L_2([t_0, \vartheta]; U)$, порождающее реализующееся движение $y_p(\cdot)$ — сильное решение (2.1). Само движение $y_p(\cdot)$, а также точка y_0 тоже неизвестны. Однако имеется текущая информация о реализации $y_p(\cdot)$ — поступающие в моменты τ_i, $i \geqslant 1$, сигналы $\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}(\cdot)$, являющиеся кусочно-постоянными функциями с конечным числом точек разрыва.

Эти сигналы удовлетворяют одному из условий:

1) при всех $i \geqslant 1$ выполнены неравенства

$$|y_p(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \tag{2.3}$$

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |Ay_p(t) - A\psi(t)|\, dt \leqslant \varepsilon \tag{2.4}$$

2) при всех $i \geqslant 1$ справедливы лишь неравенства (2.3), а величины $|Ay_p(t) - A\psi(t)|$ могут принимать произвольные значения. Кроме того, в момент $t = t_0$ известны U_0 и элемент $\psi(t_0) \in H$, $|\psi(t_0) - y_0| \leqslant \varepsilon$, а также указано, какому из множеств — E_1 или E_2 — принадлежит y_0.

Требуется:

а) построить модель Σ_Δ, описываемую управляемой системой вида

$$z^{\cdot}(t) = f_\delta(t, \psi_{t_0, t}(\cdot), u(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.5}$$

$$z \in H, \quad z(t_0) = \psi(t_0), \quad f_\delta\colon t \times \psi_{t_0, t}(\cdot) \times u \to H$$

б) сконструировать зависящее от информационной погрешности $\varepsilon > 0$, вспомогательного параметра ν и разбиения Δ отображение

$$U_{\varepsilon, \nu, \Delta}: \{\tau_i, \psi_{t_0, \tau_i}(\cdot), z_{t_0, \tau_i}(\cdot)\} \to L_2([\tau_i, \tau_{i+1}]; U)$$

в) указать такое правило выбора ε, ν и Δ, чтобы при любом сигнале ψ величина

$$p(u^e(\cdot), U_*) \equiv \inf\left\{\left(\int_{t_0}^{\vartheta} \|u^e(t) - u(t)\|_U^2\, dt\right)^{1/2} \Big| \, u(\cdot) \in U_*\right\}$$

была достаточно мала, когда

$$u^e_{\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot) \in U_{\varepsilon, \nu, \Delta}\{\tau_i, \psi_{t_0, \tau_i}(\cdot), z^\delta_{t_0, \tau_i}(\cdot)\}, U_* \subset L_2([t_0, \vartheta]; U)$$

— множество всех управлений, порождающих $y_p(\cdot)$, $z^\delta(\cdot) = z(\cdot; \psi(\cdot), u^e(\cdot))$ — траектория модели, отвечающая управлению $u = u^e(\cdot)$.

Функция $z(\cdot) = z(\cdot; \psi(\cdot), u^e(\cdot))$ является траекторией Σ_Δ, если она сильно абсолютно непрерывна и при п.в. $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет системе (2.5).

3. Укажем алгоритм решения поставленной задачи при $U_0 = L_2([t_0, \vartheta]; U)$. В качестве модели Σ_Δ возьмем систему (2.5) с правой частью

$$f_\delta(t, \psi_{t_0, t}(\cdot), u) = \begin{cases} 0 & \text{при п. в. } t \in [t_0, \tau_j] \\ r^\lambda(t - \delta) + B(t - \delta, \psi(t - \delta))\, u(t) & \text{при п. в. } t > \tau_j \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\lambda > 0$, $j = 1$ при $y_0 \in E_1$, $j = 2$ при $y_0 \in E_2 A_* y = \alpha y$, $\varphi^*(y) = \varphi(y) + {}^1/_2 |y|^2 + {}^1/_2 (Ay, y)_{V \times V^*}$, когда сигналы ψ удовлетворяют неравенству (2.3), $A_* y = -Ay$, $\varphi^*(y) = \varphi(y)$, когда для ψ выполнены неравенства (2.3) и (2.4), $r^\lambda(t) = A_*\psi(t) - \partial\varphi^0(\psi(t)) + f(t)$, если $\varphi^* = \varphi$ и функция $x \to \partial\varphi^0(x)$ удовлетворяет условию Липшица, $r^\lambda(t) = A_*\psi(t) - \partial\varphi_\lambda^*(\psi(t)) + f(t)$ в противном случае.

Отображение $U_{\varepsilon,\nu,\Delta}$ определим по правилу:

(3.2) $$U_{\varepsilon,\nu,\Delta}\{t_0, \psi(t_0), \psi(t_0)\} = 0 \in L_2([t_0, \tau_j]; U)$$

$$U_{\varepsilon,\nu,\Delta}\{\tau_i, \psi_{t_0,\tau_i}(\cdot), z^\delta_{t_0,\tau_i}(\cdot)\} = u^*_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot), i \in [j : m - 1]$$

вычисляя функции $u^*_{\tau_i,\tau+1}(\cdot)$ в моменты τ_i по формулам

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varkappa_i \leqslant 0 \text{ или } a_i \leqslant \nu\delta^{1/2} \\ \varkappa_i a_i^{-2} h_{i,\psi}(t-\delta) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\varkappa_i = \left(\pi_i, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r^\lambda(t)\,dt - \chi_i\right), \quad a_i = \left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|h_{i,\psi}(\xi)\|_U^2\, d\xi\right)^{1/2}$$

$$\chi_i = \psi(\tau_i) - \psi(\tau_{i-1}), \quad \pi_i = z^\delta(\tau_i) - \psi(\tau_{i-1})$$

$h_{i,\psi}(\cdot)$ — элемент пространства $L_2([\tau_{i-1}, \tau_i]; U)$, определяемый однозначно из условия: для любого $u(\cdot) \in L_2([\tau_{i-1}, \tau_i]; U)$

$$-\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\pi_i, B(\xi, \psi(\xi))\, u(\xi))\, d\xi = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (h_{i,\psi}(\xi), u(\xi))_U\, d\xi$$

$z^\delta(\cdot)$ — траектория модели с начальным состоянием $z^\delta(t_0) = \psi(t_0)$, отвечающая управлению $u = u^*(t)$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

1°. Для любого ограниченного множества $K \subset H$ найдется такое число $L = L(K)$, что

$$\|B(t, y) - B(t, z)\|_{L(U,H)} \leqslant L\,|y - z|, \quad y, z \in K$$

2°. $t \to B(t, y_p(t)) \in L_2([t_0, \vartheta]; L(U, H))$.

3°. Если $y_0 \in E_1$, то $\partial\varphi^{*,0}(y_p(t)) \in L_2([t_0, \vartheta]; H)$. Если $y_0 \in E_2$, то $\partial\varphi^{*,0}(y_p(t)) \in L_2((t_0, \vartheta]; H)$.

4°. Существует единственный элемент минимальной нормы $u_*(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; U)$ со свойством: при п. в. $t \in [t_0, \vartheta]$

$$y_p^{\cdot}(t) - f(t) - A_* y_p(t) + \partial\varphi^{*,0}(y_p(t)) = \{B_{y_p} u_*(\cdot)\}(t)$$

Возьмем произвольную монотонно возрастающую функцию $F(\nu)$, $D(F) = [0, +\infty)$, $F(0) = 0$.

Теорема 1. Для всякого $\alpha_0 > 0$ можно указать такие ν_0 и $\delta_0 > 0$, что, каковы бы ни были число $\nu \in (0, \nu_0)$ и разбиение Δ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\delta \leqslant \delta_0$, каков бы ни был сигнал ψ с описанными свойствами, справедливо неравенство

(3.3) $$p(u^e(\cdot), U_*) \leqslant \alpha_0$$

если

(3.4) $$u^e_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot) = U_{\varepsilon,\nu,\Delta}\{\tau_i, \psi_{t_0,\tau_i}(\cdot), z^\delta_{t_0,\tau_i}(\cdot)\}, \quad i \in [0 : m - 1]$$

(3.5) $$\max_{i \in [j:m]} \left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |\partial\varphi^{*,0}(y_p(\xi)) - \partial\varphi_\lambda^*(y_p(\xi))|^2\, d\xi\right)^{1/2} \leqslant \frac{\nu\sqrt{\delta}}{2}$$

(3.6) $$\varepsilon \leqslant \min\{\nu\delta, {}^1/_2\nu\lambda\}$$

и при $y_0 \in E_2$ число δ столь мало, что

$$\delta \int_{t_0+\nu/2}^{\vartheta} |y_p^{\cdot}(\xi)|^2 d\xi \leqslant F(\nu) \tag{3.7}$$

Справедливость теоремы 1 можно проверить воспользовавшись следующей леммой.

Лемма 1. Каковы бы ни были числа $\nu \in (0, (\vartheta - t_0)/3)$, $\delta \in (0, \nu/4)$ и разбиение Δ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\delta(\Delta) \leqslant \delta$, верны оценки

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \| u^e(t) \|_U^2 dt \leqslant \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \| u_*(t) \|_U^2 dt + k\delta^{1/2} | z^\delta(\tau_i) - \psi(\tau_{i-1}) |^2$$

$$| z^\delta(t) - y_p(t) | \leqslant \gamma(\nu, \delta), \; i \in [1 : m-1], \quad t \in [t_0, \vartheta]$$

если $u^e(\cdot)$ определено согласно (3.4), а λ и ε таковы, что имеют место неравенства (3.5), (3.6).

При $y_0 \in E_1$ в лемме 1 $\gamma = k_1(\nu + \delta + \nu_*(\delta))$, k и k_1 — постоянные, выписываемые в явном виде, и

$$\nu_*(\delta) = \max\left\{ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \| B(\xi, y_p^{\cdot}(\xi)) \|_{L(U,H)}^2 d\xi \,|\, i \in [1 : m] \right\}$$

В случае $y_0 \in E_2$ в лемме 1 $\gamma(\nu, \delta)$ — нелинейная функция со свойством: $\gamma(\nu, \delta) \to 0$, когда $\nu \to 0+$, $\delta \to 0+$ и справедливы соотношения (3.5)—(3.7).

Теорема 2. Пусть отображение $x \to \partial\varphi^0(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда утверждение теоремы 1 имеет место, если $u^e(\cdot)$ определено согласно (3.4), $\varepsilon \leqslant \delta\nu$, $\varphi^* = \varphi$ и при $y_0 \in E_2$ выполняется соотношение (3.7).

В условиях теоремы 2 при $y_0 \in E_1$ верны следующие оценки, дающие представление о качестве алгоритма:

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} \left| \int_{t_0}^{t} B(\xi, y_p(\xi)) \{u^e(\xi) - u_*(\xi)\} d\xi \right| \leqslant K_1(\delta + \varepsilon + \nu)^{1/2}$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \| u^e(t) \|_U^2 dt \leqslant \int_{t_0}^{\vartheta} \| u_*(t) \|_U^2 dt + K_2(\delta + \varepsilon + \nu)$$

где K_1 и K_2 — постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Обозначим

$$Q = \{y(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; H) \mid y(t) \in \partial\varphi^*(y_p(t)) \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta]\}$$

Условия 3°, 4° выполнены, когда $x \to \partial\varphi(x)$ — однозначное отображение. Они также справедливы, если $Q - Q \subset R(B_{y_p})$ и либо $A_* y_p(t) \in L_2([t_0, \vartheta]; H)$ либо $\varphi(x)$ — индикаторная функция выпуклого, ограниченного и замкнутого множества.

4. Пусть $u_p(\cdot)$ принадлежит некоторому выпуклому и замкнутому множеству $P = \{u(\cdot) \in L_2([t_0, \vartheta]; U) \mid u(t) \in P(t) \subset U$ при п. в. $t \in [t_0, \vartheta]\}$, которое в момент t_0 неизвестно. В каждый момент $\tau_i \in \Delta$, $i \geqslant 1$ становится известным сужение множества P на отрезок $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ — P_i. Полагая $U_0 = P$, модель Σ_Δ оставим ту же, что и выше, а стратегию $U_{\varepsilon,\nu,\Delta}\ \{\tau_i,\ \psi_{t_0,\tau_i}(\cdot),\ z^\delta_{t_0,\tau_i}(\cdot)\} \to \{u_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot) \mid u(t) \in P(t-\delta)$ при

п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\}$ зададим по правилу (3.2), вычисляя $u^*_{\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot)$ так:

(4.1) $$l_i(u^*_{\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot)) = \min\{l_i(u_{\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot)) \mid u_{\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot) \in P_i\}$$

$$l_i(u_{\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot)) = \Big(\pi_i, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B(\xi, \psi(\xi))\, u(\xi + \delta)\, d\xi\Big) + \nu \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \| u(\xi) \|_U{}^2\, d\xi$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, а также условия 1°—4°, причем в условии 4° $u_*(\bullet)$ — единственный элемент минимальной нормы из P. Тогда найдутс такие монотонно возрастающие функции $\delta(\nu)$ и $\varepsilon(\nu, \delta)$, $\delta(0) = \varepsilon(0, 0) = 0$, $D(\delta(\cdot)) = [0, +\infty)$, $D(\varepsilon(\cdot, \cdot)) = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, что при любых $\alpha_0 > 0$, $\nu \in (0, \nu_0)$, $\delta = \delta(\Delta) \in (0, \delta(\nu))$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\nu, \delta))$ и любом сигнале ψ с описанными в п. 2 свойствами справедливо неравенство (3.3), если $\nu_0 = \nu_0(\alpha_0)$ достаточно мало, а стратегия $U_{\varepsilon, \nu, \Delta}$ определяется согласно (3.2), (4.1).

Аналогичная теорема может быть доказана для случая, когда $U_0 = P$ и выполнены условия теоремы 1.

В силу известных результатов теории аккретивных операторов [7] для любых $\nu > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$ справедливо неравенство (3.5).

Предположим, что $\varphi(y) = I_K(y)$ — индикаторная функция выпуклого замкнутого множества $K \subset H$. Неравенство (2.1) переписывается в виде

$$(y^{\boldsymbol{\cdot}}(t) - B(t, y(t))u(t) - f(t),\ y(t) - z) + (Ay(t), y(t) - z)_{V \times V^*} \leqslant 0 \text{ при п. в. } t \in (t_0, \vartheta) \text{ и всех } z \in K$$

Если сигналы ψ обладают свойствами (2.3), (2.4), то в выражении (3.1) можно положить $r^\lambda(t) = -A\psi(t) + f(t)$. В противном случае

$$r^\lambda(t) = \alpha y - \partial\Phi_\lambda(\psi(t)) + f(t),\ \Phi(y)\colon H \to \bar{R}$$

$$\Phi(y) = \begin{cases} {}^1/_2(Ay, y)_{V \times V^*} + {}^1/_2\alpha |y|^2, & y \in V \\ +\infty, & y \in H \setminus V \end{cases}$$

5. Процесс управления термостатом, регулируемым температурой в области $\Omega \subset R^3$ ([8], с. 30), формализуется в виде вариационного неравенства (2.1), когда Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей (например, класса C_2), $y(x, t)$ — температура тела, занимающего область Ω, $u(x, t)$ — управляемый тепловой поток, и $H = L_2(\Omega)$, $V = H_0{}^1(\Omega)$, $B(t, y)u = u$;

$$A : H_0{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) : (Ay, z)_{V \times V^*} = \sum_{i, j=1}^{3} \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\, y_{x_i} z_{x_j}\, dx + \int\limits_\Omega a_0(x)\, y(x)\, z(x)\, dx$$

$$a_0(\cdot) \in L_\infty(\Omega), \quad a_{ij}(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad a_{ij} = a_{ij}, \quad i \in [1:3]$$

$a_0(x) \geqslant \mu > 0$ при п.в. $x \in \Omega$, для некоторого $\omega > 0$

$$\sum_{i, j=1}^{3} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \omega \|\xi\|^2_{R^3} \text{ при всех } \xi \in R^3 \text{ и п. в. } x \in \Omega$$

$$\varphi(y) = \int\limits_\Omega g(y(x))\, dx, \quad \partial g(r) = \beta(r) = \begin{cases} a_1(r - \vartheta_1), & -\infty < r < \vartheta_1 \\ 0, & r \in [\vartheta_1, \vartheta_2] \\ a_2(r - \vartheta_2), & \vartheta_2 < r < +\infty \end{cases}$$

a_1, a_2, ϑ_1, ϑ_2 — постоянные.

Задача динамического восстановления потока тепла $u(x, t)$ по замеряемой в моменты τ_i температуре тела решается на основе приведенных в пп. 3 и 4 алгоритмов. Если приближенное значение температуры $y(x, t) - \psi(x, t)$ удовлетворяет (2.3), (2.4), то модель Σ_Δ описывается одной из систем

$$y_t^\cdot(x, t) = -A_0\psi(x, t-\delta) - \beta(\psi(x, t-\delta)) + u(x, t)$$

$$y_t^\cdot(x, t) = -A_0\psi(x, t-\delta) - \lambda^{-1}\{\psi(x, t-\delta) - J_\lambda\psi(x, t-\delta)\} + u(x, t)$$

Здесь $J_\lambda\psi(x) = w(x) \in L_2(\Omega)$ таково, что

$$w(x) = \psi(x) - \lambda\beta(w(x))$$

$$A_0 y(x) = -\sum_{i,j=1}^{3} (a_{ij}(x)\, y_{x_i}(x))_j + a_0(x)\, y(x)$$

Если $\psi(x, t)$ удовлетворяет лишь неравенствам (2.3), то Σ_Δ имеет вид

$$y_t^\cdot(x, t) = -\lambda^{-1}\{\psi(x, t-\delta) - J_\lambda(\psi(x, t-\delta))\} + u(x, t)$$

$J_\lambda\psi(x) = w(x) \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$ — решение уравнения

$$w(x) = \psi(x) - \lambda\{A_0 w(x) + \beta(w(x))\} \text{ п.в. на } \Omega$$

6. Пусть V, U, H — соболевские пространства на Ω, $B(t, y)u = u$, A — оператор Лапласа. Тогда, решая задачу моделирования управления на ЭВМ, естественно заменять Ω некоторой сеткой $\overline{\omega}_h = \{x_j \mid j = 1, \ldots, N\}$ ([9], с. 69) с шагом h и предполагать, что значения $\psi(x, \tau_i)$ измеряются в узлах x_j. При этом вместо уравнения (2.5) следует брать разностное уравнение

$$z^\delta(x_j, \tau_{i+1}) = z^\delta(x_j, \tau_i) + \delta\{r_1^\lambda(x_j, \tau_{i-1}) + u(x_j, \tau_i)\}, \quad i \geqslant 1$$

а вместо функции $u(\cdot) = u^*_{\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot)$ — сеточную функцию $u = u^*(x_j, \tau_i) = 0$, если $\varkappa_{1i} \leqslant 0$ или $a_{1i} \leqslant \nu\delta^{1/2}$, $u = u^*(x_j, \tau_i) = \varkappa_{1i}\, a_{1i}^{-2} h_{i,\psi}(x_j)$ в противном случае. Здесь a_{1i}, $r_1^\lambda(x_j, \tau_{i-1})$, $\varkappa_{1i}$ — разностные аналоги a_i, $r^\lambda(\tau_{i-1})$, $\varkappa_i$, $h_{i,\psi}(x_j) = z^\delta(x_j, \tau_i) - \psi(x_j, \tau_{i-1})$. Значения $A\psi(\tau_i)$ необходимо измерять, в том случае, когда это возможно, также в узлах x_j. Если значения $A\psi(\tau_i)$ в узлах x_j измерить не удается, их можно аппроксимировать какими-нибудь разностными соотношениями, например выражением $L_h\psi$ [9] при $\Omega = (a, b) \subset R^1$.

На ЭВМ был смоделирован процесс восстановления нагрузки $g(x, t)$, действующей на мембрану, при

$$F = 1,\ x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

$$t_0 = 0, \quad \vartheta = 1, \quad \nu = 10^{-4}$$

$$y_p(x, t) = \begin{cases} -10x_1(x_1 - \alpha(t))^2 x_2(1 - x_2) & x_1 \leqslant \alpha \\ 0, & x_1 > \alpha \end{cases}$$

$$u_*(x, t) = \begin{cases} \partial y_p(x, t)/\partial t - \Delta y_p(x, t), & x_1 \leqslant \alpha \\ 0, & x_1 > \alpha \end{cases}$$

$$\alpha = 1/2 + 1/4 \sin 2\pi t, \quad y_0(x) = y_p(x, 0)$$

Фазовая траектория модели $z^\delta(\cdot)$ считалась по методу Эйлера с шагом $\delta = 0{,}002$. Область Ω разбивалась на квадраты со стороной 0,02 и заменялась равномерной сеткой $\overline{\omega}_h$ с шагом $h = 0{,}02$ [9]. При формировании управления $u^e(t, x_j)$ использовались лишь значения $\psi(x_j, \tau_i)$ и $\Delta\psi(x_j, \tau_i)$ в узлах сетки $\overline{\omega}_h$.

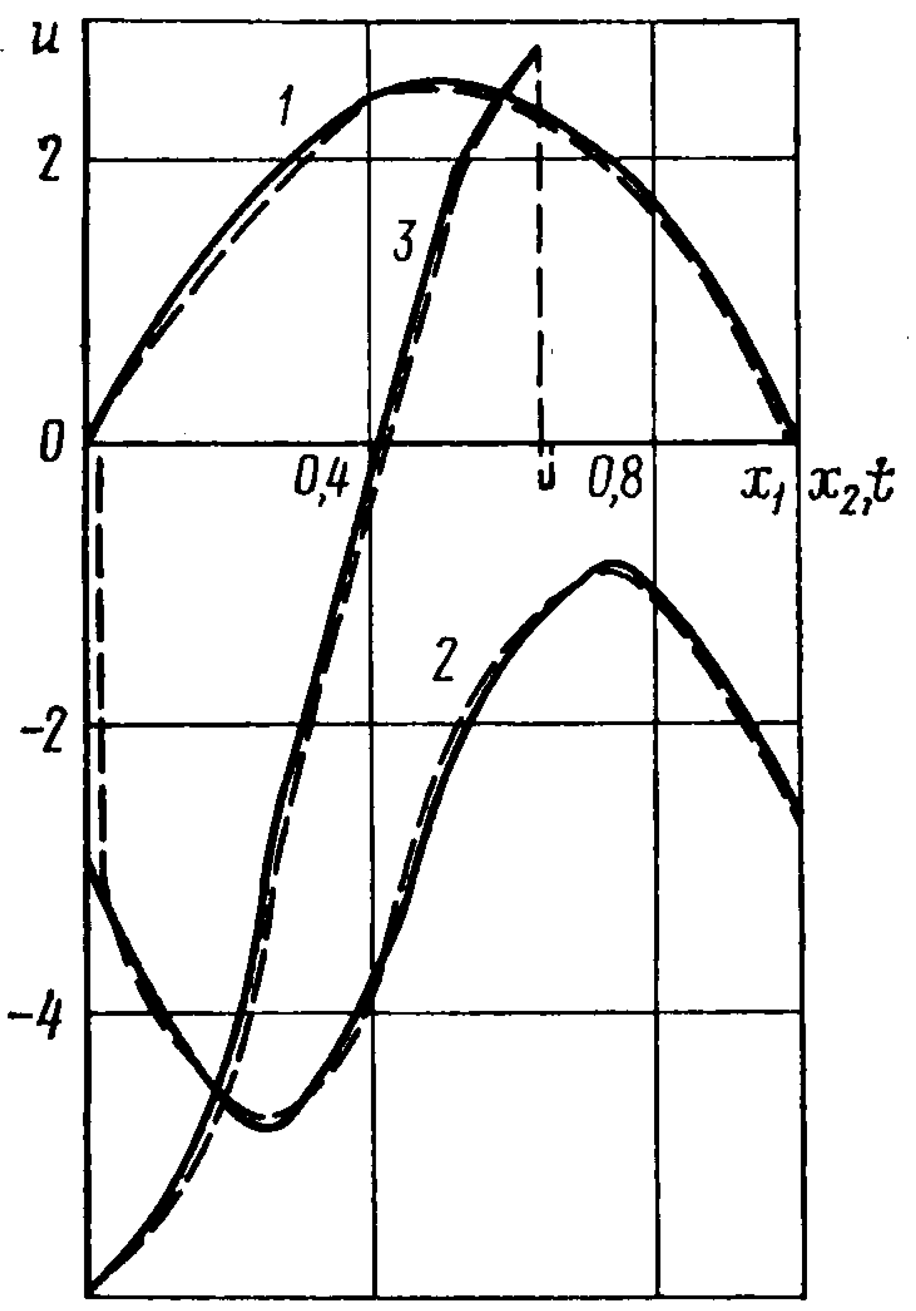
На фигуре изображены сечения гиперплоскостями Γ_1, Γ_2, Γ_3 нагрузки $g(x, t) = u_*(x, t)$ (сплошные линии *1*, *2*, *3*), а также сечения найденной при $\psi(x, \tau_i) = y_p(x, \tau_i) + 10^{-5}(x_1^2 + x_2^2)$ при помощи алгоритма (3.1), (3.2), (3.4) нагрузки $u^e(x, t)$ (штриховые линии *1*, *2*, *3*). Величина $p(u^e(\cdot), U_*) = 0{,}221$, а гиперплоскости Γ_i определяются следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{(x, t) \mid x_1 = 0{,}6, \quad t = 0{,}4\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, t) \mid x_1 = 0{,}08, \quad x_2 = 0{,}8\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, t) \mid x_2 = 0{,}6, \quad t = 0{,}4\}$$

Замечание. Остановившись на задаче о прогибе мембраны, поясним механический смысл неравенств (2.4) и условий $y_0 \in E_1$, $y_0 \in E_2$. Так как всякая сеточная функция



$\psi(x_j, \tau_{i-1})$ может быть доопределена в остальных точках Ω до некоторой функции $\psi = \psi_h(x, \tau_{i-1})$, то неравенства (2.4) означают требования к гладкости ψ_h и характеру аппроксимации этой функцией реализации y_p. Функция $\psi_h(x, \tau_{i-1})$, например, при $\psi(x, t) = \psi_h(x, \tau_{i-1})$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ должна иметь вторую производную по пространственным переменным, хорошо приближающую $\Delta y_p(x, t)$ в среднем на промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. Неравенства (2.4) можно трактовать как требования к частоте замеров прогиба. Это особенно наглядно видно, если оператор Лапласа аппроксимировать разностным оператором, например $L_h\psi$, а левую часть (2.4) заменить разностным соотношением.

Включение $y_0 \in E_1$ означает, что в качестве функции $y_0(x)$, описывающей начальный прогиб, взята функция с определенными свойствами «гладкости» ($y_0(x) \in H_0^1(\Omega)$). Условие $y_0 \in E_2$ соответствует случаю, когда прогиб в момент t_0 описывается функцией из $L_2(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456 с.
2. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314—1317.
3. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51—60.
4. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О динамическом решении операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 552—556.
5. *Максимов В. И.* Позиционное моделирование управлений и начальных функций для систем Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 618—629.
6. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир. 1979. 574 с.
7. *Evans L. C.* Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space // Isr. J. Math. 1977. V. 26. No. 1.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.*, Неравенства в механике и физике. М.: Наука. 1980. 383 с.
9. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1977. 656 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
22.VII.1987