

УДК 62-50

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ,
СОГЛАСОВАННЫЕ С ДИНАМИКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ
ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Панасюк А. И.

Разрабатывается новый подход к анализу и синтезу нелинейных дискретных систем управления

$$(0.1) \quad x[k+1] = f(k, x[k], u[k]), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m$$

первоначально предложенный в [1] для непрерывных нелинейных систем. Он основан на задании новых законов сложения векторов состояния и управления и умножения их на числа таким образом, чтобы в новом линейном пространстве система стала линейной. В качестве приложения подхода дается описание класса нелинейных систем управления, изоморфных своему линейному приближению, и приводятся явные формулы, задающие этот изоморфизм. В результате обладающий заданными динамическими характеристиками регулятор строится для системы линейного приближения при помощи хорошо развитой для линейного случая теории, а затем по изоморфизму пересчитывается в регулятор нелинейной системы, обеспечивающий требуемую динамику замкнутой системы. Фактически это достигается введением нелинейной обратной связи, компенсирующей нелинейности разомкнутой системы.

1. Уравнение согласования закона сложения в $R^m \times R^n$ с динамикой системы. Закон композиции \oplus_x^k на множестве R^n ищем в виде отображения $R^{2n} \rightarrow R^n$

$$(1.1) \quad x'' = x \oplus_x^k x' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(k, x, x')$$

Здесь k — параметр, x, x' — независимые переменные.

Аналогично $\oplus_u^k: R^{2m} \rightarrow R^m$

$$(1.2) \quad u'' = u \oplus_u^k u' \stackrel{\text{def}}{=} \psi(k, x, x', u, u')$$

Здесь k, x, x' — параметры, u, u' — независимые переменные.

Наконец, $\oplus^k: R^{2(m+n)} \rightarrow R^{m+n}$

$$(1.3) \quad (u, x) \oplus^k (u', x') \stackrel{\text{def}}{=} (u \oplus_u^k u', x \oplus_x^k x'), \quad (u, x) \in R^{m+n}$$

Там, где не возникает необходимости уточнить k , опускаем k при \oplus^k .

Обозначим W множество всех пар функции $u(k), x(k)$, $a < k < b$, удовлетворяющих (0.1). Значения $a = -\infty$, $b = \infty$ допустимы. Для $(u[k], x[k]), (u'[k], x'[k]) \in W$ положим

$$(1.4) \quad (u[k], x[k]) \oplus (u'[k], x'[k]) \stackrel{\text{def}}{=} (u[k] \oplus_u u'[k], x[k] \oplus_x x'[k])$$

Согласованность \oplus с динамикой (0.1) означает, что \oplus не выводит за W , т. е. $x''[k+1] = f(k, x''[k], u''[k])$. Учитывая (1.1), получаем

$$(1.5) \quad \varphi(k+1, f(k, x, u), f(k, x', u')) = f(k, \varphi(k, x, x'), \psi(k, x, x', u, u'))$$

Определение 1.1. Скажем, что закон композиции \oplus , определенный согласно (1.3), согласован с динамикой системы (0.1) в момент k , если $\varphi(k,$

x, x'), $\varphi(k+1, x, x')$, $\psi(k, x, x', u, u')$ удовлетворяют (1.5) при всех $x, x' \in R^n, u, u' \in R^m$.

2. Уравнение согласования закона умножения векторов управлений и состояний на числа с динамикой системы. Определим \odot_x, \odot_u как отображения $R^{n+1} \rightarrow R^n, R^{m+1} \rightarrow R^m$

$$(2.1) \quad x' = \lambda \odot_x^k x \stackrel{\text{def}}{=} p(k, \lambda, x), \quad u' = \lambda \odot_u^k u \stackrel{\text{def}}{=} q(k, x, \lambda, u)$$

Переменные λ, x и λ, u являются независимыми в первом и втором определениях соответственно. Зададим \odot как отображение $R^{m+n+1} \rightarrow R^{m+n}$

$$(2.2) \quad \lambda \odot^k (u, x) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda \odot_u^k u, \lambda \odot_x^k x)$$

Согласованность операции \odot с динамикой системы (0.1) означает, что если $(u[k], x[k]) \in W$, то $\lambda \odot (u[k], x[k]) \in W$, т. е. $x'[k+1] = f(k, x'[k], u'[k])$. При учете (2.1) это дает (2.3)

$$(2.3) \quad p(k+1, \lambda, f(k, x, u)) = f(k, p(k, \lambda, x), q(k, x, \lambda, u))$$

Определение 2.1. Скажем, что закон композиции \odot (2.2) согласован с динамикой системы (0.1) в момент k , если $p(k, \lambda, x), p(k+1, \lambda, x), q(k, x, \lambda, u)$ удовлетворяют (2.3) при всех $\lambda \in R, x \in R^n, u \in R^m$.

Будем называть (1.5) и (2.3) *уравнениями согласования*.

Рассмотрим связь между согласованным с динамикой введением алгебраических операций и линеаризующими заменами переменных. Пусть имеется линейная система управления

$$(2.4) \quad y[k+1] = A[k]y[k] + B[k]v[k], \quad x \in R^n, \quad v \in R^m$$

и найдутся биективные отображения $x \rightarrow y, u \rightarrow v$ ($y = H(k, x), v = V(k, x, u)$), переводящие удовлетворяющую (2.4) пару $y[k], v[k]$ в пару $x[k] = H^{-1}(k, y[k]), u[k] = V^{-1}(k, x[k], v[k])$, удовлетворяющую (0.1), где H^{-1}, V^{-1} — обратные к H, V отображения. Тогда определенные формулами

$$\begin{aligned} x'' &= x \oplus_x^k x' = H^{-1}(k, H(k, x) + H(k, x')) \\ x^* &= \lambda \odot_x^k x = H^{-1}(k, \lambda H(k, x)) \\ u \oplus_u^k u' &= V^{-1}(k, x'', V(k, x, u) + V(k, x', u')) \\ \lambda \odot_u^k u &= V^{-1}(k, x^*, \lambda V(k, x, u)) \end{aligned}$$

операции согласованы с динамикой (0.1). Оказывается, что при весьма общих предположениях справедливо и обратное: на основе введенных операций \oplus, \odot можно построить биективное преобразование H, V системы (0.1) к виду (2.4). Доказательству этого посвящена оставшаяся часть п. 2.

Ограничимся анализом автономной системы

$$(2.5) \quad x[k+1] = f(x[k], u[k])$$

Обозначим: E — множество R^n , снабженное операциями \oplus_x, \odot_x , а G — состоящее из пар (x, u) множество R^{n+m} , снабженное операциями \oplus, \odot . Для автономной системы (2.5) операции $\oplus_x, \odot_x, \oplus_u, \odot_u, \oplus, \odot$ полагаем независимыми от k . Для линейных пространств E, G согласованность операций \oplus, \odot с динамикой (2.5) означает, что отображение $f: G \rightarrow E$ линейно.

Теорема 2.1. Пусть G, E — линейные пространства размерности $n+m$ и n ; отображение $f: G \rightarrow E$ линейно. Тогда найдется взаимно однозначное

преобразование координат

$$(2.6) \quad y = \begin{vmatrix} \lambda_1(x) \\ \dots \\ \lambda_n(x) \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} \lambda_{n+1}(x, u) \\ \dots \\ \lambda_{n+m}(x, u) \end{vmatrix}$$

преобразующее систему (2.5) к линейному виду

$$(2.7) \quad y[k+1] = Ay[k] + Bv[k]$$

Здесь A и B — матрицы размером $n \times n$ и $n \times m$. В оставшейся части п. 2 полагаем выполненными условия теоремы 2.1.

Для нулевого элемента $\Theta \in G$ имеем

$$\begin{vmatrix} \lambda \odot_u \Theta_u \\ \lambda \odot_x \Theta_x \end{vmatrix} \equiv \lambda \odot \Theta \equiv \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \Theta_u \\ \Theta_x \end{vmatrix}$$

Отсюда $\lambda \odot_x \Theta_x \equiv \Theta_x$, т. е. Θ_x — нулевой элемент в E . Выберем базис e_1, \dots, e_n в E и фиксируем u_* .

Лемма 2.1. Векторы $g_1 = (e_1, u_*)$, \dots , $g_n = (e_n, u_n)$ линейно независимы.

Доказательство. Предполагая противное, найдем λ_i , $\sum \lambda_i^2 \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$), такие, что $\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot (e_i, u_*) = \Theta$, откуда

$$\begin{vmatrix} \dots \\ \bigoplus_{xi=1}^n \lambda_i \odot_x e_i \end{vmatrix} = \Theta$$

Поэтому $\bigoplus_{xi=1}^n \lambda_i \odot e_i = \Theta_x$, что противоречит линейной независимости e_i . Здесь $\bigoplus_{i=1}^n$ — сумма от $i = 1$ до $i = n$.

Каждый вектор $x \in E$ однозначно разложим в виде суммы $x = \bigoplus_{xi=1}^n \lambda_i(x) \odot_x e_i$. Определим в этом п. 2 отображение $h: E \rightarrow G$ формулой

$$h(x) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i(x) \odot (e_i, u_*)$$

Лемма 2.2. Отображение h линейно.

Доказательство. Для

$$x = \bigoplus_{xi=1}^n \lambda_i(x) \odot_x e_i, \quad x' = \bigoplus_{xi=1}^n \lambda_i(x') \odot_x e_i$$

имеем

$$x \oplus_x x' = \bigoplus_{xi=1}^n [\lambda_i(x) + \lambda_i(x')] \odot_x e_i$$

$$h(x \oplus_x x') = \bigoplus_{i=1}^n [\lambda_i(x) + \lambda_i(x')] \odot (e_i, u_*)$$

$$h(x) \oplus h(x') = [\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i(x) \odot (e_i, u_*)] \oplus [\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i(x') \odot (e_i, u_*)]$$

Отсюда $h(x \oplus_x x') = h(x) \oplus h(x')$.

Определим операторы $G \rightarrow G$ формулами

$$P_x(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} h(x), \quad P_u(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} (x, u) \oplus (-1) \odot P_x(x, u)$$

Из определения $h(x)$ и доказанных лемм получаем утверждение (см. также [2]).

Лемма 2.3. P_x и P_u являются операторами проектирования, а G разлагается в прямую сумму линейных подпространств $P_x(G)$ и $P_u(G)$.

В $P_u(G)$ найдутся m линейно независимых векторов g_{n+1}, \dots, g_{n+m} . Тогда векторы g_i ($1 \leq i \leq n+m$) служат базисом G . Любой вектор $(x, u) \in G$ однозначно разлагается в сумму

$$(2.8) \quad (x, u) = \bigoplus_{i=1}^{n+m} \lambda_i(x, u) \odot g_i$$

Лемма 2.4. $\lambda_i(x, u) = \lambda_i(x)$ при $1 \leq i \leq n$.

Доказательство. В силу леммы 2.3

$$P_x(x, u) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i(x, u) \odot g_i$$

Согласно определениям

$$P_x(x, u) = h(x) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i(x) \odot g_i$$

В силу линейной независимости g_i отсюда вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2.1. Запишем действие f на G при помощи матриц $A = [a_{ji}]$, $B = [b_{ji}]$

$$f(g_i) = \bigoplus_{j=1}^n a_{ji} \odot_x e_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$f(g_i) = \bigoplus_{j=1}^n b_{ji} \odot_x e_j, \quad n+1 \leq i \leq n+m.$$

В силу линейности f на G при учете леммы 2.4 и (2.8) систему (2.5) перепишем в виде

$$\bigoplus_{j=1}^n \lambda_j(x[k+1]) \odot_x e_j = x[k+1] = \bigoplus_{j=1}^n \Lambda_j \odot_x e_j$$

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \lambda_i(x[k]) + \sum_{i=n+1}^{n+m} b_{ji} \lambda_i(x[k], u[k])$$

Поскольку e_j ($1 \leq j \leq n$) — базис в E , то эта система эквивалентна системе

$$\lambda_j(x[k+1]) = \Lambda_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

что при учете (2.6) эквивалентно (2.7).

Отметим, что исследование уравнений согласования, по-видимому, удобнее, чем непосредственный поиск линеаризующего преобразования координат. Например, на основе такого исследования удалось в явном виде описать целый класс систем управления и их преобразований к линеаризованному виду (см. ниже).

3. Условия разрешимости уравнений согласования. Далее ограничимся рассмотрением линейной по управлению системы

$$(3.1) \quad x[k+1] = X^\circ(k, x[k]) + Y^\circ(k, x[k]) u[k], \quad x \in R^n, u \in R^m$$

Фиксируем $k \in (a, b-1)$ и обозначим $\Gamma_x = \text{Im } Y^\circ(k, x[k])$ образ R^m для линейного отображения $Y^\circ(k, x[k]): R^m \rightarrow R^n$. Уравнение (1.5) для (3.1) примет вид

$$(3.2) \quad \varphi(k+1, X^\circ(k, x) + Y^\circ(k, x) u, X^\circ(k, x') + Y^\circ(k, x') u') = \\ = X^\circ(k, \varphi(k, x, x')) + Y^\circ(k, \varphi(k, x, x')) \psi(k, x, x', u, u')$$

Определение 3.1. Будем говорить, что уравнение (3.2) разрешимо в момент k , если найдутся функции $\varphi(k, x, x')$, $\varphi(k+1, x, x')$ переменных $x, x' \in R^n$ и функция $\psi(k, x, x', u, u')$ переменных x, x', u, u' , удовлетворяющие уравнению (3.2) для всех $x, x' \in R^n, u, u' \in R^m$.

Обозначим

$$X^\circ(k, x) + \Gamma_x = \bigcup_{y \in \Gamma_x} [X^\circ(k, x) + y]$$

Лемма 3.1. Уравнение (3.2) разрешимо в момент k тогда и только тогда, когда найдутся функции $\varphi(k, x, x')$, $\varphi(k+1, x, x')$ от $x, x' \in R^n$, такие, что для всех $x, x' \in R^n$ выполнены включения

$$(3.3) \quad \varphi(k+1, X^\circ(k, x) + \Gamma_x, X^\circ(k, x') + \Gamma_{x'}) \subset \varphi(k+1, X^\circ(k, x), X^\circ(k, x')) \subset \Gamma_{\varphi(k, x, x')}$$

$$(3.4) \quad \varphi(k+1, X^\circ(k, x), X^\circ(k, x')) \subset X^\circ(k, \varphi(k, x, x')) \subset \Gamma_{\varphi(k, x, x')}$$

Доказательство. Пусть уравнение (3.2) разрешимо. Тогда при $u = u' = 0$ для $u^\circ(k, x, x') = \psi(k, x, x', 0, 0) \in R^m$ получим равенство

$$(3.5) \quad \varphi(k+1, X^\circ(k, x), X^\circ(k, x')) = X^\circ(k, \varphi(k, x, x')) + \\ + Y^\circ(k, \varphi(k, x, x'))u^\circ(k, x, x')$$

Отсюда следует (3.4). Вычитая (3.5) из (3.2), получим при $u, u' \in R^m$

$$(3.6) \quad \varphi(k+1, X^\circ(k, x) + Y^\circ(k, x)u, X^\circ(k, x') + Y^\circ(k, x')u') - \\ - \varphi(k+1, X^\circ(k, x), X^\circ(k, x')) = Y^\circ(k, \varphi(k, x, x'))[\psi(k, x, x', u, u') - \\ - u^\circ(k, x, x')]$$

Из (3.6) следует (3.3).

Обратно, пусть включения (3.3), (3.4) выполнены. Тогда в силу (3.4) найдется функция $u^\circ(k, x, x')$, удовлетворяющая (3.5). Складывая (3.3) и (3.5), получаем $\varphi(k+1, X^\circ(k, x) + \Gamma_x, X^\circ(k, x') + \Gamma_{x'}) - X^\circ(k, \varphi(k, x, x')) \subset \Gamma_{\varphi(k, x, x')}$. Отсюда следует существование функции ψ , удовлетворяющей уравнению (3.2).

Дальше будет рассматриваться только частный случай системы (3.1) с постоянными коэффициентами при управлениях

$$(3.7) \quad x[k+1] = X^\circ(k, x[k]) + Y^\circ u[k], \quad 0 \leq m < n$$

$$(3.8) \quad Y^\circ = \begin{vmatrix} Y & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} Y_{11}, \dots, Y_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{m1}, \dots, Y_{mm} \end{vmatrix}, \quad \text{rank } Y = m$$

Если $Y = Y(k, x)$ и $\text{rank } Y(k, x) = m$, то, вводя новое управление $v = Y(k, x)u$, приводим систему (3.1) к виду (3.7), (3.8).

Уравнение (3.2) для системы (3.7), (3.8) переписется в виде

$$(3.9) \quad \varphi(k+1, X^\circ(k, x) + Y^\circ u, X^\circ(k, x') + Y^\circ u') = \\ = X^\circ(k, \varphi(k, x, x')) + Y^\circ \varphi(k, x, x', u, u')$$

Теорема 3.1. Уравнение (3.9) разрешимо в момент k тогда и только тогда, когда найдутся функции $\varphi(k, x, x') \in R^n$, $\varphi(k+1, x, x') \in R^n$ переменных x, x' , такие, что координаты $\varphi_i(k+1, x, x')$ с номерами $m+1 \leq i \leq n$ не зависят от компонент x_j, x'_j , $1 \leq j \leq m$, $x, x' \in X^\circ(k, R^n)$, т. е.

$$(3.10) \quad \varphi_i(k+1, x, x') = \varphi_i(k+1, x_{m+1}, \dots, x_n, x'_{m+1}, \dots, x'_n)$$

при $m+1 \leq i \leq n$, $x, x' \in X^\circ(k, R^n)$

и удовлетворяют уравнениям

$$(3.11) \quad \varphi_i(k+1, X^\circ(k, x), X^\circ(k, x')) = X_i^\circ(k, \varphi(k, x, x')), \quad m+1 \leq i \leq n; \quad x, x' \in R^n$$

Доказательство. Согласно (3.8), $\Gamma = \Gamma_x$ представляет собой линейное пространство, натянутое на первые m координатных осей. Поэтому (3.3) эквивалентно равенствам

$$(3.12) \quad \varphi_i(k+1, X^\circ(k, x) + \Gamma, X^\circ(k, x') + \Gamma) - \varphi_i(k+1, X^\circ(k, x), X^\circ(k, x')) = 0, \quad m+1 \leq i \leq n$$

Это в свою очередь эквивалентно (3.10). Аналогично получаем, что для системы (3.7), (3.8) включение (3.4) эквивалентно равенствам (3.11). Отсюда утверждение теоремы следует в силу леммы 3.1.

Рассмотрим теперь закон умножения \odot . Уравнение (2.3) для системы (3.1) запишется в виде

$$(3.13) \quad p(k+1, \lambda, X^\circ(k, x) + Y^\circ(k, x)u) = \\ = X^\circ(k, p(k, \lambda, x)) + Y^\circ(k, p(k, \lambda, x))q(k, x, \lambda, u)$$

Определение 3.2. Будем говорить, что уравнение (3.13) разрешимо в момент k , если найдутся функции $p(k, \lambda, x)$, $p(k+1, \lambda, x)$, $q(k, x, \lambda, u)$ переменных λ, x, u , удовлетворяющие (3.13) для всех $\lambda \in R$, $x \in R^n$, $u \in R^m$.

Аналогичным образом получаем следующие утверждения.

Лемма 3.2. Уравнение (3.13) разрешимо в момент k тогда и только тогда, когда найдутся функции $p(k, \lambda, x)$, $p(k+1, \lambda, x)$ от λ, x , такие, что при всех $\lambda \in R$, $x \in R^n$ выполнены включения

$$(3.14) \quad \begin{aligned} p(k+1, \lambda, X^\circ(k, x) + \Gamma_x) - p(k+1, \lambda, X^\circ(k, x)) &\in \Gamma_{p(k, \lambda, x)} \\ p(k+1, \lambda, X^\circ(k, x)) - X^\circ(k, p(k, \lambda, x)) &\in \Gamma_{p(k, \lambda, x)} \end{aligned}$$

Уравнение (3.13) для системы (3.7), (3.8) примет вид

$$(3.15) \quad \begin{aligned} p(k+1, \lambda, X^\circ(k, x) + Y^\circ u) &= X^\circ(k, p(k, \lambda, x)) + \\ &+ Y^\circ q(k, x, \lambda, u) \end{aligned}$$

Теорема 3.2. Уравнение (3.15) разрешимо в момент k тогда и только тогда, когда найдутся функции $p(k, \lambda, x)$, $p(k+1, \lambda, x)$ переменных x, λ , такие, что координаты $p_i(k+1, \lambda, x)$ с номерами $m+1 \leq i \leq n$ не зависят от компонент x_j при $1 \leq j \leq m$, $x \in X^\circ(k, R^n)$, т. е.

$$(3.16) \quad \begin{aligned} p_i(k+1, \lambda, x) &= p_i(k+1, \lambda, x_{m+1}, \dots, x_n), \quad m+1 \leq i \leq \\ &\leq n, \quad x \in X^\circ(k, R^n) \end{aligned}$$

и удовлетворяют уравнениям

$$(3.17) \quad \begin{aligned} p_i(k+1, \lambda, X^\circ(k, x)) &= X_i^\circ(k, p(k, \lambda, x)), \quad m+1 \leq \\ &\leq i \leq n, \quad x \in R^n \end{aligned}$$

4. Решение уравнений согласования. Следующее утверждение очевидно.

Теорема 4.1. Пусть $H(x): R^n \rightarrow R^n$ — биективное отображение R^n на R^n . Тогда операции сложения \oplus_x и умножения на числа \odot_x , определенные формулами

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x \oplus_x x' &\stackrel{\text{def}}{=} H^{-1}(H(x) + H(x')), \quad \lambda \odot_x x \stackrel{\text{def}}{=} H^{-1}(\lambda H(x)) \end{aligned}$$

задают на R^n новую структуру линейного пространства, нулевым элементом которого служит $\Theta = H^{-1}(0)$, а отображение $x \rightarrow H(x)$ является изоморфизмом полученного линейного пространства R^n с операциями \oplus_x, \odot_x и исходного евклидова пространства R^n с обычными операциями сложения векторов $x + x'$ и умножения их на числа λx .

Поставим задачу: дать такое определение биективного отображения $x \rightarrow H(k, x)$, чтобы определенные согласно (4.1) функции

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \varphi(k, x, x') &\stackrel{\text{def}}{=} H^{-1}(k, H(k, x) + H(k, x')) \\ p(k, \lambda, x) &\stackrel{\text{def}}{=} H^{-1}(k, \lambda H(k, x)) \end{aligned}$$

удовлетворяли соотношениям (3.10), (3.11), (3.16), (3.17). Здесь k — параметр, а $H^{-1}(k; \cdot)$ — отображение, обратное отображению $x \rightarrow H(k, x)$, т. е. $H^{-1}(k, H(k, x)) \equiv x$.

Обозначим]

$$(4.3) \quad Z(k, x) = \begin{vmatrix} Z_1(k, x) \\ \dots \\ Z_{n-m}(k, x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{m+1}^\circ(k, x) \\ \dots \\ X_n^\circ(k, x) \end{vmatrix}, \quad F(k, x) = \begin{vmatrix} X_1^\circ(k, x) \\ \dots \\ X_m^\circ(k, x) \end{vmatrix}$$

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда уравнения согласования разрешимы в виде явных формул для φ, p, ψ, q .

Определим отображение $H(k, x)$ формулами

$$(4.4) \quad H_i(k, x) \stackrel{\text{def}}{=} Z_i(k, x) = X_{m+i}^\circ(k, x), \quad 1 \leq i \leq n - m$$

$$H_i(k, x) \stackrel{\text{def}}{=} x_i, \quad n - m + 1 \leq i \leq n$$

Понадобится дополнительное упрощающее предположение, что функции, определенные согласно (4.2), удовлетворяют соотношениям

$$(4.5) \quad \varphi_i(k + 1, x, x') = x_i + x_i', \quad p'(k + 1, \lambda, x) = \lambda x_i, \quad m + 1 \leq i \leq n$$

В частности, условие (4.5) выполняется, если $n - m \leq m$, т. е. $n \leq 2m$, так как при этом из последней формулы (4.4) следует (4.5). Условие (4.5) выполняется и в том случае, когда компоненты $H_i(k, x)$, $m + 1 \leq i \leq n$ могут быть записаны в виде

$$H^{(z)}(k, x) = H_0^{(z)}(k) x^{(z)}, \quad H^{(z)} = \begin{vmatrix} H_{m+1} \\ \dots \\ H_n \end{vmatrix}, \quad x^{(z)} = \begin{vmatrix} x_{m+1} \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}$$

где $H_0^{(z)}(k)$ — какая-либо невырожденная матрица размером $(n - m) \times (n - m)$.

Когда выполнено условие (4.5), выполнены условия (3.10) и (3.16), а уравнения (3.11) и (3.17) запишутся в виде

$$(4.6) \quad X_i^\circ(k, x) + X_i^\circ(k, x') = X_i^\circ(k, \varphi(k, x, x'))$$

$$\lambda X_i^\circ(k, x) = X_i^\circ(k, p(k, \lambda, x)), \quad m + 1 \leq i \leq n$$

что при учете обозначений (4.3) можно представить как

$$(4.7) \quad Z(k, x) + Z(k, x') = Z(k, \varphi(k, x, x')), \quad \lambda Z(k, x) = Z(k, p(k, \lambda, x))$$

В силу (4.4) видим, что φ и p , определенные согласно (4.2), удовлетворяют условиям (4.7). Отсюда получаем с учетом теорем 3.1, 3.2, 4.1 такой результат.

Теорема 4.2. Пусть выполнено условие (3.8), отображения $x \rightarrow H(k, x)$, $x \rightarrow H(k + 1, x)$ — биекции R^n на R^n и функции φ , p , определенные согласно (4.2), удовлетворяют условиям (4.5). Тогда $\varphi(k, x, x')$, $p(k, \lambda, x)$ определяют на R^n структуру нового линейного пространства с операциями \oplus_x , \odot_x , определенными согласно (1.1) и (2.1), с нулевым элементом $\Theta(k) = H^{-1}(k, 0)$; отображение $x \rightarrow H(k, x)$ задает изоморфизм этого линейного пространства с операциями \oplus_x , \odot_x и евклидова пространства R^n с обычными операциями сложения $x + x'$ и умножения на числа λx ; уравнения согласования (3.9) и (3.15) разрешимы в момент k , и функции φ , p , определенные согласно (4.2), служат их решениями с некоторыми функциями $\psi(k, x, x', u, u')$, $q(k, \lambda, x, u)$.

Перейдем теперь к определению функций ψ и q , задающих закон композиции для управлений согласно (1.2), (2.1). Итак, видно, что функции φ , p , определенные согласно (4.2), удовлетворяют уравнениям (4.7), которые совпадают с последними $n - m$ уравнениями систем (3.9) и (3.15). В свою очередь, функции ψ и q находятся из первых m уравнений систем (3.9) и (3.15), которые могут быть представлены в следующем виде. Обозначим

$$(4.8) \quad \varphi^{(m)}(k, x, x') \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \varphi_1(k, x, x') \\ \dots \\ \varphi_m(k, x, x') \end{vmatrix}, \quad p^{(m)}(k, \lambda, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} p_1(k, \lambda, x) \\ \dots \\ p_m(k, \lambda, x) \end{vmatrix}$$

Тогда с учетом (3.8), (4.3) из (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)}(k+1, X^\circ(k, x) + Y^\circ u, X^\circ(k, x') + Y^\circ u') = \\ = F(k, \varphi(k, x, x')) + Y\psi(k, x, x', u, u') \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3.8) можем записать

$$(4.9) \quad \psi(k, x, x', u, u') = Y^{-1} [\varphi^{(m)}(k+1, X^\circ(k, x) + Y^\circ u, X^\circ(k, x') + Y^\circ u') - F(k, \varphi(k, x, x'))]$$

Аналогично из (3.15) получим

$$(4.10) \quad q(k, x, \lambda, u) = Y^{-1} [p^{(m)}(k+1, \lambda, X^\circ(k, x) + Y^\circ u) - F(k, p(k, \lambda, x))]$$

Оставшаяся часть п. 4 посвящена доказательству того, что определения (1.3), (2.2) задают на множестве $R^m \times R^n$ структуру линейного пространства в операциях \oplus и \odot , согласованную с динамикой системы (3.7), (3.8). Рассмотрим множество $\Lambda = R^{2n}$ и обозначим его элементы в виде $\begin{vmatrix} x_* \\ x \end{vmatrix}$, $x_* \in R^n$, $x \in R^n$. Зададим на Λ законы \oplus и \odot формулами

$$(4.11) \quad \begin{vmatrix} x_* \\ x \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x_*' \\ x' \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \varphi(k+1, x_*, x_*') \\ \varphi(k, x, x') \end{vmatrix} \\ \lambda \odot \begin{vmatrix} x_* \\ x \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} p(k+1, \lambda, x_*) \\ p(k, \lambda, x) \end{vmatrix}$$

Перепишем эти соотношения в эквивалентной форме

$$(4.12) \quad \begin{vmatrix} x_* \\ x \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x_*' \\ x' \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x_* \oplus_x^{k+1} x_*' \\ x \oplus_x^k x' \end{vmatrix} \\ \lambda \odot \begin{vmatrix} x_* \\ x \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \lambda \odot_x^{k+1} x_* \\ \lambda \odot_x^k x \end{vmatrix}$$

Множество Λ , снабженное операциями (4.12), обозначим $\Lambda(k)$. Из теоремы 4.1 получаем следующий результат.

Теорема 4.3. Пусть выполнено (3.8), отображения $x \rightarrow H(k, x)$, $x \rightarrow H(k+1, x)$ являются биекциями R^n на R^n и функции φ , p , определенные согласно (4.2), удовлетворяют условиям (4.5). Тогда операции (4.2) задают на Λ структуру векторного пространства $\Lambda(k)$ с нулем $\begin{vmatrix} \Theta(k+1) \\ \Theta(k) \end{vmatrix}$.

Обозначим

$$\Lambda_0(k) = \left\{ \begin{vmatrix} X^\circ(k, x) + Y^\circ u \\ x \end{vmatrix} : x \in R^n, u \in R^m \right\}$$

Из теоремы 4.2 с учетом (3.9), (3.15) получим следующий результат.

Лемма 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Тогда $\Lambda_0(k)$ служит линейным подпространством $\Lambda(k)$.

Обозначим $\Omega(k)$ множество $R^m \times R^n$, состоящее из пар (u, x) , $u \in R^m$, $x \in R^n$, снабженное операциями (1.3) и (2.2) с функциями ψ , q , определенными (4.9), (4.10). Определим отображение $h: \Omega(k) \rightarrow \Lambda_0(k)$ формулой

$$(4.13) \quad (u, x) \rightarrow h(u, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} X^\circ(k, x) + Y^\circ u \\ x \end{vmatrix}$$

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Тогда $\Omega(k)$ является линейным пространством, а h служит изоморфизмом $\Lambda_0(k)$ и $\Omega(k)$.

Доказательство. В силу (3.8) отображение h биективно. Поэтому достаточно доказать, что h коммутирует с операциями \oplus и \odot

$$(4.14) \quad h((u, x) \oplus (u', x')) = h(u, x) \oplus h(u', x')$$

$$(4.15) \quad h(\lambda \odot, u(x)) = \lambda \odot h(u, x)$$

Согласно (1.3), (4.13) и тому, что обозначено $\oplus_x = \oplus_x^k$, получим

$$(4.16) \quad \begin{aligned} h((u, x) \oplus (u', x')) &= h((u \oplus_u u'), (x \oplus_x x')) = \\ &= \left| \begin{array}{c} X^c(k, x \oplus_x x') + Y^c(u \oplus_u u') \\ x \oplus_x x' \end{array} \right| \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно (4.13), (4.11)

$$(4.17) \quad \begin{aligned} h(u, x) \oplus h(u', x') &= \left| \begin{array}{c} X^c(k, x) + Y^c u \\ x \end{array} \right| \oplus \left| \begin{array}{c} X^c(k, x') + Y^c u' \\ x' \end{array} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{c} \varphi(k+1, X^c(k, x) + Y^c u, X^c(k, x') + Y^c u') \\ x \oplus_x x' \end{array} \right| \end{aligned}$$

В силу (4.9) и теоремы 4.2 выполнено (3.9). Из (1.2), (3.9) следует, что (4.16) и (4.17) совпадают, что означает выполнение (4.14). Аналогично доказывается (4.15).

Теорема 4.4. Пусть выполнено (3.8), отображения $x \rightarrow H(k, x)$, $x \rightarrow H(k+1, x)$ являются биекциями R^n на R^n и функции φ, ρ , определенные согласно (4.2), удовлетворяют условиям (4.5). Тогда операции (1.3), (2.2) с функциями ψ, q , определенными согласно (4.9), (4.10), задают на множестве всех пар $(u, x) \in R^m \times R^n$ линейное пространство $\Omega(k)$, причем законы композиции \oplus, \odot , определенные согласно (1.4), (2.3), согласованы с динамикой системы (3.7) в момент k .

Доказательство. Законы \oplus и \odot были найдены так, чтобы удовлетворялись уравнения (3.9), (3.15). Поэтому они согласованы с динамикой системы (3.7). Из леммы 4.2 следует, что $\Omega(k)$ — линейное пространство.

5. Линеаризующий изоморфизм. Здесь рассматривается изоморфизм, который используется в п. 6 для построения изоморфизма линейного пространства W исходной нелинейной системы и линейного пространства W^o линеаризованной системы. Определим этот изоморфизм как отображение $x \rightarrow y = \kappa(k, x) \in R^n$, заданное решением уравнения

$$(5.1) \quad H_x(k, \Theta(k)) y = H(k, x) \quad \text{при} \quad \Theta(k) = H^{-1}(k, 0)$$

Теорема 5.1. Пусть отображение $x \rightarrow H(k, x)$ является биекцией R^n на R^n , матрица частных производных $H_x(k, x)$ непрерывна по $x \in R^n$

$$(5.2) \quad \text{rank } H_x(k, x) = n \quad \text{при} \quad x \in R^n$$

Тогда отображение $x \rightarrow y = \kappa(k, x)$, определенное согласно (5.1), является биекцией R^n на R^n и вместе с обратным к нему отображением

$$(5.3) \quad y \rightarrow x = s(k, y)$$

они однозначно определены уравнениями

$$(5.4) \quad H_x(k, \Theta(k)) \kappa(k, x) = H(k, x)$$

$$(5.5) \quad H_x(k, \Theta(k)) y = H(k, s(k, y))$$

задают изоморфизмы линейного пространства $x \in R^n$ с нулевым элементом $\Theta(k)$ и операциями \oplus_x, \odot_x , определенными согласно (1.1), (2.1), (4.2), и линейного пространства $y \in R^n$ с естественными операциями $+, \cdot$ и нулем $y = 0$, причем для функции $\rho(k, \lambda, x)$, определенной согласно (4.2), записанные ниже пределы существуют и удовлетворяют соотноше-

НИЯМ

$$(5.6) \quad \kappa(k, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} [p(k, \lambda, x) - \Theta(k)] = \left. \frac{\partial p(k, \lambda, x)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

$$(5.7) \quad s(k, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} p(k, \lambda^{-1}, \lambda y + \Theta(k))$$

Если дополнительно выполнено (4.5), то справедливы равенства

$$(5.8) \quad \Theta_i(k) = 0, \quad m+1 \leq i \leq n$$

$$(5.9) \quad s_i(k, y) = y_i, \quad \kappa_i(k, x) = x_i, \quad m+1 \leq i \leq n$$

Доказательство. В силу (5.2) и теоремы 4.1 $\kappa(k, x)$ является композицией изоморфизмов $x \rightarrow H(k, x)$, $x' \rightarrow H_x^{-1}(k, \Theta(k)) x'$. Поэтому $\kappa(k, x)$ — изоморфизм. Из (5.1) следует (5.4), (5.5). Согласно определению (4.2)

$$(5.10) \quad H(k, p(k, \lambda, x)) \equiv \lambda H(k, x)$$

По теореме о неявной функции $p(k, \lambda, x)$ непрерывно дифференцируема. Из (5.10) получаем $p(k, 0, x) = \Theta(k)$. Дифференцируем (5.10) по λ при $\lambda = 0$: $H_x(k, \Theta(k)) \partial p(k, 0, x) / \partial \lambda = H(k, x)$. Кроме того

$$p(k, \lambda, x) = \Theta(k) + \lambda \frac{\partial p(k, 0, x)}{\partial \lambda} + o(\lambda), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} o(\lambda) = 0$$

Из двух последних выражений и (5.4) следует (5.6). Поскольку $H(k, \Theta(k)) = 0$, то $H(k, \lambda y + \Theta(k)) = H_x(k, \Theta(k)) \lambda y + o(\lambda)$. Согласно определению (4.2)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} p(k, \lambda^{-1}, \lambda y + \Theta(k)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} H^{-1}(k, \lambda^{-1} H(k, \lambda y + \Theta(k))) = H^{-1}(k, H_x(k, \Theta(k)) y)$$

Отсюда в силу (5.5) получим (5.7). Поскольку $\Theta(k) = p(k, 0, x)$, то из (4.5) следует (5.8). Тогда из (5.6), (5.7) следует (5.9).

6. Синтез систем управления на основе изоморфизма. Рассмотрим систему линейного приближения для (3.7)

$$(6.1) \quad y[k+1] = X_x^\circ(k, \Theta(k)) y[k] + Y^\circ v[k], \quad v \in R^m, \quad y \in R^n$$

где X_x° — матрица частных производных. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Имеем $\kappa(k+1, x[k+1]) = y[k+1]$. С учетом (3.7), (6.1) получаем отсюда основное уравнение для пересчета управлений

$$(6.2) \quad \kappa(k+1, X^\circ(k, x) + Y^\circ u) = X_x^\circ(k, \Theta(k)) \kappa(k, x) + Y^\circ v$$

Действуя на него преобразованием $y \rightarrow s(k+1, y)$, получим из (6.2) уравнение, эквивалентное (6.2)

$$(6.3) \quad X^\circ(k, s(k, y)) + Y^\circ u = s(k+1, X_x^\circ(k, \Theta(k)) y + Y^\circ v)$$

Покажем, что (6.2) и (6.3) в компонентах с номерами $m+1 \leq i \leq n$ выполнены тождественно. Согласно (3.8), (5.9), имеем

$$(6.4) \quad \kappa_i(k+1, X^\circ(k, x) + Y^\circ u) = X_i^\circ(k, x), \quad m+1 \leq i \leq n$$

Из (5.4), (4.4) получаем

$$(6.5) \quad (X_x^\circ(k, \Theta(k)) \kappa(k, x))_i = X_i^\circ(k, x), \quad m+1 \leq i \leq n$$

где через $(\cdot)_i$ обозначена i -я координата. Из (6.4), (6.5), (3.8) видим, что компоненты векторов с номерами $m+1 \leq i \leq n$ в левой и правой частях (6.2) равны тождественно. В силу (5.9) получаем отсюда то же утверждение относительно (6.3). Поэтому в силу (3.8) уравнение (6.2) однозначно разрешимо относительно v , а (6.3) — относительно u .

Обозначим $v(k, x, u)$, $u(k, y, v)$ решения (6.2) и (6.3) соответственно. Рассмотрим отображения

$$(6.6) \quad (x, u) \rightarrow (y = \kappa(k, x), v = v(k, x, u))$$

$$(6.7) \quad (y, v) \rightarrow (x = s(k, y), u = u(k, y, v))$$

Поскольку κ и s — взаимно обратные отображения, а (6.3) эквивалентно (6.2), то отображения (6.6) и (6.7) взаимнообратны.

Обозначим W° множество пар функций $(y[k], v[k])$, определенных и удовлетворяющих (6.1) при $a < k < b$.

Теорема 6.1. Пусть имеет место (3.8) и при $a < k < b$ выполнены следующие условия: 1) $X(k, x)$ непрерывно дифференцируемо по $x \in R^n$; 2) отображения $x \rightarrow H(k, x)$ являются биекциями R^n на R^n и $\text{rang } H_x(k, x) = n$ при $x \in R^n$; 3) функции φ, p , определенные согласно (4.2), удовлетворяют условию (4.5). Тогда отображения (6.6), (6.7) задают взаимнообратные отображения

$$(6.8) \quad W \rightarrow W^\circ: (x[k], u[k]) \rightarrow (y[k] = \kappa(k, x[k]), v[k] = v(k, x[k], u[k]))$$

$$(6.9) \quad W^\circ \rightarrow W: (y[k], v[k]) \rightarrow (x[k] = s(k, y[k]), u[k] = u(k, y[k], v[k]))$$

являющиеся изоморфизмами линейных пространств W для системы (3.7) и W° для (6.1) с операциями (1.4), (2.3) и $+$, \cdot соответственно.

Доказательство. Пусть $x[k], u[k]$ удовлетворяют (3.7) при $a < k < b$. Требуется доказать, что пара $y[k], v[k]$, определенная согласно (6.8), удовлетворяет (6.1). Имеем согласно (6.8), (3.7) и (6.2)

$$\begin{aligned} y[k+1] &= \kappa(k+1, x[k+1]) = \kappa(k+1, X^\circ(k, x[k]) + \\ &+ Y^\circ u[k]) = X_x^\circ(k, \Theta(k))\kappa(k, x[k]) + Y^\circ v[k] = \\ &= X_x^\circ(k, \Theta(k))y[k] + Y^\circ v[k] \end{aligned}$$

т. е. (6.8) действительно является отображением $W \rightarrow W^\circ$. Аналогично из (6.3) следует, что (6.9) является отображением $W^\circ \rightarrow W$.

В силу того что (6.8) и (6.9) — взаимнообратные отображения, достаточно доказать, что (6.8) является гомоморфизмом линейных пространств $W \rightarrow W^\circ$. Из того, что согласно теореме 5.1 κ является изоморфизмом, получаем утверждение.

Лемма 6.1. Пусть

$$\kappa(k+1, x_*) = y_*, \quad \kappa(k+1, x'_*) = y'_*$$

Тогда

$$\kappa(k+1, x_* \oplus_x^{k+1} x'_*) = y_* + y'_*, \quad \kappa(k+1, \lambda \odot_x^{k+1} x_*) = \lambda y_*$$

Пусть теперь

$$(6.10) \quad y = \kappa(k, x), v = v(k, x, u), y' = \kappa(k, x'), v' = v(k, x', u')$$

Для доказательства гомоморфности отображения (6.8) достаточно доказать, что

$$(6.11) \quad y + y' = \kappa(k, x \oplus_x^k x'), \quad v + v' = v(k, x \oplus_x^k x', u \oplus_u^k u')$$

$$(6.12) \quad \lambda y = \kappa(k, \lambda \odot_x^k x), \quad \lambda v = v(k, \lambda \odot_x^k x, \lambda \odot_u^k u)$$

Первое из соотношений (6.11) следует из теоремы 5.1. Докажем второе равенство (6.11). Условия (6.10) означают, что выполнено (6.2) и $\kappa(k+1, X^\circ(k, x') + Y^\circ u') = X_x^\circ(k, \Theta(k))\kappa(k, x') + Y^\circ v'$. Положим $x_* = X^\circ(k, x) + Y^\circ u$, $x'_* = X^\circ(k, x') + Y^\circ u'$. Тогда согласно (6.2) для

$y_* = \kappa(k+1, x_*)$, $y_*' = \kappa(k+1, x_*')$ получим

$$y_* = X_x^\circ(k, \Theta(k))\kappa(k, x) + Y^\circ v, \quad y_*' = X_x^\circ(k, \Theta(k))\kappa(k, x') + Y^\circ v'.$$

Согласно (3.9), имеем $x_* \oplus_x^{k+1} x_*' = X^\circ(k, x \oplus_x^k x') + Y^\circ(u \oplus_u^k u')$. Отсюда в силу леммы 6.1 получаем, что

$$(6.13) \quad \begin{aligned} & \kappa(k+1, X^\circ(k, x \oplus_x^k x') + Y^\circ(u \oplus_u^k u')) = \\ & = X_x^\circ(k, \Theta(k))[\kappa(k, x) + \kappa(k, x')] + Y^\circ(v + v') = \\ & = X_x^\circ(k, \Theta(k))\kappa(k, x \oplus_x^k x') + Y^\circ(v + v') \end{aligned}$$

В то же время имеем согласно определению (6.2) для $v(k, x \oplus_x^k x')$, $u \oplus_u^k u')$

$$(6.14) \quad \begin{aligned} & \kappa(k+1, X^\circ(k, x \oplus_x^k x') + Y^\circ(u \oplus_u^k u')) = \\ & = X_x^\circ(k, \Theta(k))\kappa(k, x \oplus_x^k x') + Y^\circ v(k, x \oplus_x^k x', u \oplus_u^k u') \end{aligned}$$

Вычитая (6.14) из (6.13), в силу (3.8) получим (6.11). Аналогично доказывается (6.12). Итак, отображения (6.6) и (6.7) задают взаимобратные изоморфизмы W и W° .

Пусть теперь

$$(6.15) \quad X^\circ(k, 0) \equiv 0, \quad a < k < b$$

Отсюда согласно (4.4) следует, что

$$(6.16) \quad \Theta[k] = 0, \quad a < k < b$$

Рассмотрим некоторое отображение $k, y \rightarrow v(k, y) = D(k, y) \in R^m$, определенное при $k \geq k_0$, $y \in R^n$. Согласно (6.6), (6.7), оно определяет отображение $k, x \rightarrow u(k, x) = u(k, \kappa(k, x), D(k, \kappa(k, x)))$. В результате можем рассмотреть системы (3.7) и (6.1) с обратными связями $u(k, y)$, $v(k, y)$

$$(6.17) \quad x[k+1] = X^\circ(k, x[k]) + Y^\circ u(k, \kappa(k, x[k]), D(k, \kappa(k, x[k])))$$

$$(6.18) \quad y[k+1] = X_x^\circ(k, 0)y[k] + Y^\circ D(k, y[k])$$

Из теоремы 6.1 и определений получаем такой результат.

Следствие 6.1. Пусть выполнены условия теоремы 6.1, справедливо условие (6.15), $(y[k], v[k])$ и $(x[k], u[k])$ ($a < k_0 \leq k \leq k_f < b$) — пары из W° и W , переводимые одна в другую изоморфизмами (6.8) и (6.9). Тогда $y[k_f] = 0$ в том и только в том случае, когда $x[k_f] = 0$. Если дополнительно $b = \infty$, $D(k, 0) \equiv 0$ при $k \geq k_0$ и отображения $\kappa(k, x)$, $s(k, y)$ равномерно по $k \geq k_0$ непрерывны в точках $x = 0$ и $y = 0$, то тривиальное решение системы (6.17) устойчиво или асимптотически устойчиво в целом по Ляпунову в том и только в том случае, когда тривиальное решение системы (6.18) устойчиво или асимптотически устойчиво в целом соответственно.

Замечание 6.1. В [3] дано обобщение результатов [1] на неавтономные системы, а в [4] рассмотрены вопросы синтеза дискретных систем.

7. Пример. Рассмотрим нелинейную систему управления

$$(7.1) \quad \begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k]x_2[k] + u[k] \\ x_2[k+1] &= (x_2^2[k] + 1)x_1[k] \end{aligned}$$

Система представлена в виде (3.7), где $m = 1$, $n = 2$. Согласно (4.3), (4.4)

$$(7.2) \quad H_1(x) = (x_2^2[k] + 1)x_1[k], \quad H_2(x) = x_2$$

В силу (4.2) $H(\varphi) = H(x) + H(x')$, откуда с учетом (7.2) получаем

$$(\varphi_2^2 + 1)\varphi_1 = (x_2^2 + 1)x_1 + ((x_2')^2 + 1)x_1', \quad \varphi_2 = x_2 + x_2'$$

Отсюда, учитывая (1.1), выписываем закон \oplus_x в координатной форме

$$\begin{aligned}(x \oplus_x x')_1 &\equiv \varphi_1(k, x, x') = [(x_2 + x_2')^2 + 1]^{-1} [(x_2^2 + 1)x_1 + ((x_2')^2 + 1)x_1'] \\ (x \oplus_x x')_2 &= x_2 + x_2'\end{aligned}$$

Аналогично согласно (4.2) $H(p) = \lambda H(x)$, откуда в силу (2.1), (7.2)

$$\begin{aligned}(\lambda \odot_x x)_1 &\equiv p_1 = (\lambda^2 x_2^2 + 1)^{-1} \lambda (x_2^2 + 1)x_1 \\ (\lambda \odot_x x)_2 &\equiv p_2 = \lambda x_2\end{aligned}$$

Изоморфизм κ определится из (5.4)

$$\begin{aligned}H_x(0) \kappa(x) &= H(x), \quad H_x(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ y_1 = \kappa_1(x) &= (x_2^2 + 1)x_1, \quad y_2 = \kappa_2(x) = x_2\end{aligned}$$

Уравнения линейного приближения (6.1) примут вид

$$(7.3) \quad y_1 [k + 1] = v [k], \quad y_2 [k + 1] = y_1 [k]$$

Первое уравнение системы (6.2) запишется следующим образом:

$$(7.4) \quad \beta(x)(x_1 x_2 + u) = v, \quad \beta(x) = (x_2^2 + 1)^2 x_1^2 + 1$$

а второе выполняется тождественно. Регулятор $v = D(y) = ay_1 + by_2$, $a = 1$, $b = -0,25$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом системы (7.3). Согласно (7.4), он переводится изоморфизмом в регулятор

$$u = (ay_1 + by_2)\beta^{-1}(x) - x_1 x_2 = [a(x_2^2 + 1)x_1 + bx_2]\beta^{-1}(x) - x_1 x_2$$

системы (7.1), обеспечивающий в силу следствия 6.1 асимптотическую устойчивость в целом тривиального решения. Тот же регулятор получится и с помощью представленной в [4] формулы

$$u = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \odot_u D(\lambda \odot_x x)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк А. И. Введение алгебраических операций на множестве траекторий управляемой нелинейной системы // ПММ. 1984. Т. 42. Вып. 4. С. 601—614.
2. Кострикин А. И., Манин Ю. Л. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука. 1986. 303 с.
3. Панасюк А. И. Алгебраические операции, согласованные с динамикой непрерывных нелинейных систем управления // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. Вып. 3. С. 425—437.
4. Панасюк А. И. Метод синтеза дискретных систем управления с помощью введения алгебраических операций на множестве траекторий // Изв. вузов. Приборостроение. 1986. Вып. 9. С. 24—28.

Минск

Поступила в редакцию
29.IX.1987