Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 5, 1988

УДК 531.36

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Воронин А. А., Сазонов В. В.

Рассматривается обобщенно-консервативная гироскопическая система. Доказывается существование двухпараметрического семейства периодических решений полных уравнений движения этой системы, близкого аналогичному семейству решений прецессионных уравнений.

1. Рассмотрим консервативную механическую систему, содержащую l гироскопов. Полагаем, что положение системы определяется $2m+l$ обобщенными координатами $x_1, \ldots, x_{2m}, \varphi_1, \ldots, \varphi_l$, из которых $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ — углы собственного вращения гироскопов, а $x=(x_1, \ldots, x_{2m})^T$ — параметры, характеризующие направления осей гироскопов и положения подвесов. Предположим также, что система описывается функцией Лагранжа вида [1]

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}C_k\Big(\dot{\varphi}_k+\sum_{i=1}^{2m}a_i^{(k)}(x)\dot{x}_i\Big)^2-\Pi(x)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t, C_k — постоянные величины, симметричная матрица $A(x)=(a_{ij}(x))_{i,j=1}^{2m}$ положительно определена. Углы φ_k являются циклическими координатами, и им отвечают первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_k}=C_k\Big(\dot{\varphi}_k+\sum_{i=1}^{2m}a_i^{(k)}(x)\dot{x}_i\Big)=h_k\quad(k=1,\ldots,l)$$

Воспользовавшись методом Рауса и введя обозначения

$$hg_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{l}h_k\left(\frac{\partial a_i^{(k)}}{\partial x_j}-\frac{\partial a_j^{(k)}}{\partial x_i}\right)\quad(i,j=1,\ldots,2m)$$

уравнения движения системы можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{2m}a_{ij}\ddot{x}_j+\sum_{j,k=1}^{2m}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}\right)\dot{x}_j\dot{x}_k=$$
$$=-h\sum_{j=1}^{2m}g_{ij}\dot{x}_j-\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}\quad(i=1,\ldots,2m)\tag{1.1}$$

Эти уравнения допускают обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2m}a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j+\Pi(x)=\mathrm{const}\tag{1.2}$$

Будем считать, что в уравнениях (1.1) h — положительный большой параметр и функции $\Pi(x)$, $a_{ij}(x)$, $g_{ij}(x)$ $(i,j=1,\ldots,2m)$ от h не зависят. Кроме того, предположим, что матрица $G(x)=(g_{ij}(x))_{i,j=1}^{2m}$ не вырождена. Уравнения

$$h\sum_{j=1}^{2m}g_{ij}\dot{x}_j+\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}=0\quad(i=1,\ldots,2m)\tag{1.3}$$

допускающие первый интеграл $\Pi(x) = \text{const}$, называются прецессионными [1]. Пусть эти уравнения имеют двухпараметрическое семейство периодических решений. Исследуем вопрос о существовании аналогичного семейства у полных уравнений (1.1).

Чтобы дать точную постановку задачи, перейдем в (1.1) и (1.3) к новой независимой переменной $\tau = h^{-1}t$. Для сокращения записи будем использовать векторные обозначения. В результате получим уравнения

$$(1.4)\qquad Gx' + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^T = -h^{-2}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial R}{\partial x'} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)^T, \quad R = \frac{1}{2}(x')^T A(x)x'$$

$$(1.5)\qquad Gx' + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^T = 0$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по τ, производные скалярных функций по векторным аргументам рассматриваются как векторы-строки, например $\partial\Pi/\partial x = (\partial\Pi/\partial x_1, \ldots, \partial\Pi/\partial x_{2m})$. Полагаем, что $A(x)$, $G(x)$ и $\Pi(x)$ — достаточно гладкие функции, т. е. имеют все необходимые для последующего анализа производные.

Система (1.5) получается из (1.4) при $h = \infty$, поэтому будем называть эту систему вырожденной. Относительно (1.5) предположим следующее.

1°. Эта система допускает двухпараметрическое семейство периодических решений

$$(1.6)\qquad x = \varphi(\tau + \tau_0, c)$$

с периодом $T = T(c)$, где $c \in (c_1^\circ, c_2^\circ)$ и $\tau_0 \in (-\infty, +\infty)$ — параметры.

2°. При $c \in [c_1, c_2] \subset (c_1^\circ, c_2^\circ)$ система уравнений в вариациях для решения (1.6) имеет единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное T-периодическое решение $\varphi'(\tau + \tau_0, c)$.

3°. При $c \in [c_1, c_2]$ выполнено соотношение $\partial\Pi(\varphi(\tau + \tau_0, c))/\partial x \not\equiv 0$.

Не ограничивая общности, положим в (1.6) $\tau_0 = 0$. Будем искать T-периодические решения системы (1.4) $x(\tau, c, h)$, определенные для значений (c, h) из некоторого неограниченного множества $I_h \subset [c_1, c_2] \times [0, +\infty)$ и удовлетворяющие при допустимых $h \to \infty$ условиям $x(\tau, c, h) \to \varphi(\tau, c)$, $x'(\tau, c, h) \to \varphi'(\tau, c)$.

2. Сначала проделаем ряд вспомогательных преобразований. Так как матрица $A(x)$ симметрична и положительно определена, а матрица $G(x)$ кососимметрична, то соответствующие им билинейные формы можно одновременно привести к каноническому виду [2]. Более точно существует невырожденная матрица $F(x)$ такая, что

$$(2.1)\qquad F^T(x)A(x)F(x) = E_{2m}$$

$$F^T(x)G(x)F(x) = -\operatorname{diag}(\gamma_1(x)J, \ldots, \gamma_m(x)J) \equiv -\Gamma(x)$$

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь и далее E_k — единичная матрица порядка k.

Условия 1° — 3°, сформулированные в п. 1, дополним условиями 4°. При всех допустимых x матрица $F(x)$ и скаляры $\gamma_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — достаточно гладкие функции.

5°. При $c \in [c_1, c_2]$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ справедливы неравенства

$$0 < \gamma_1^2[\varphi(\tau, c)] < \gamma_2^2[\varphi, (\tau, c)] < \ldots < \gamma_m^2[\varphi(\tau, c)]$$

Чтобы привести систему (1.4) к нормальному виду, введем новую переменную $p \in R^{2m}$, положив

$$(2.2)\qquad x' = F(x)p + \Phi(x), \quad \Phi(x) = -G^{-1}(x)(\partial\Pi(x)/\partial x)^T$$

Подставим выписанное выражение для x' в (1.4) и умножим результат слева на $F^T(x)$. С учетом (2.1) получим уравнение

$$p' = h^2\Gamma(x)p + f(x, p) \tag{2.3}$$

где $f(x, p)$ — полином второй степени относительно p с коэффициентами, зависящими от $A(x)$, $F(x)$, $\Phi(x)$ и их первых производных. Уравнения (2.2) и (2.3) образуют замкнутую систему, эквивалентную системе (1.4).

В системе (2.2), (2.3) сделаем замену переменной $x = \varphi(\tau, c) + \xi$ и в получившихся уравнениях выделим в явном виде некоторые члены. В результате придем к T-периодической системе

$$\begin{aligned}
&\xi' = A(\tau, c)\xi + B(\tau, c)p + \Phi_1(\tau, \xi, p, c) \qquad (2.4)\\
&p' = \{h^2[\Gamma_0(\tau, c) + \Gamma_1(\tau, \xi, c)] + C(\tau, c)\}p + f_0(\tau, c) +\\
&+ f_1(\tau, \xi, p, c) + h^2 g_1(\tau, \xi, p, c)\\
&A(\tau, c) = \frac{\partial\Phi(\varphi)}{\partial x}, \quad B(\tau, c) = F(\varphi), \quad C(\tau, c) = \frac{\partial f(\varphi, 0)}{\partial p}\\
&f_0(\tau, c) = f(\varphi, 0), \quad \Gamma_0(\tau, c) = \Gamma(\varphi)\\
&\Gamma_1(\tau, \xi, c) = \operatorname{diag}\left[\frac{\partial\gamma_1(\varphi)}{\partial x}\xi J, \ldots, \frac{\partial\gamma_m(\varphi)}{\partial x}\xi J\right], \quad \varphi = \varphi(\tau, c)
\end{aligned}$$

в которой для функций Φ_1, f_1 и g_1 при $\xi, p \to 0$ равномерно по $c \in [c_1, c_2]$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(\tau, \xi, p, c) = O(\|\xi\|^2 + \|\xi\|\|p\|)\\
&f_1(\tau, \xi, p, c) = O(\|\xi\| + \|p\|^2), \quad g_1(\tau, \xi, p, c) = O(\|\xi\|^2\|p\|)
\end{aligned}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Первый интеграл (1.2) в новых переменных запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\Pi(\varphi + \xi) + h^{-2}\Pi_1(\tau, \xi, p, c) = \mathrm{const} \qquad (2.5)\\
&(\Pi_1(\tau + T, \xi, p, c) = \Pi_1(\tau, \xi, p, c))
\end{aligned}$$

Поскольку выражение (2.5) — первый интеграл системы (2.4), его полная производная по τ в силу этой системы тождественно равна нулю. Положив в указанном тождестве и его частной производной по p $\xi = p = 0$ и выделив в получившихся соотношениях главные члены при $h \to \infty$, найдем необходимые для дальнейшего равенства

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Pi_1(\tau, 0, 0, c)}{\partial\tau} + \frac{\partial\Pi_1(\tau, 0, 0, c)}{\partial p} f_0(\tau, c) = 0 \qquad (2.6)\\
&\frac{\partial\Pi(\varphi)}{\partial x} B(\tau, c) + \frac{\partial\Pi_1(\tau, 0, 0, c)}{\partial p}\Gamma_0(\tau, c) = 0
\end{aligned}$$

Последующие преобразования служат для упрощения линейных членов в системе (2.4). Подстановка $\xi = u + h^{-2}B(\tau, c)\Gamma_0^{-1}(\tau, c)p$ приводит эту систему к виду

$$\begin{aligned}
&u' = A(\tau, c)u + h^{-2}\Phi_0(\tau, c) + \Phi_2(X) \qquad (2.7)\\
&p' = \{h^2[\Gamma_0(\tau, c) + \Gamma_1(\tau, u, c)] + C(\tau, c)\}p + f_0(\tau, c) +\\
&+ f_2(X) + h^2 g_2(X)\\
&\Phi_0(\tau, c) = -B(\tau, c)\Gamma_0^{-1}(\tau, c)f_0(\tau, c), \quad X = (\tau, u, p, c, h)
\end{aligned}$$

причем для функций Φ_2, f_2 и g_2 при $u, p, h^{-1} \to 0$ равномерно по $c \in [c_1, c_2]$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(X) = O[h^{-2}(\|u\| + \|p\|) + \|u\|\|p\| + \|u\|^2]\\
&f_2(X) = O(\|u\| + h^{-2}\|p\| + \|p\|^2), \quad g_2(X) = O(\|u\|^2\|p\|)
\end{aligned}$$

Рассмотрим линейную неоднородную систему

(2.8) $\quad u' = A(\tau, c)u + \Phi_0(\tau, c)$

Как известно [3], эта система имеет T-периодическое решение в том и только в том случае, когда для любого T-периодического решения $\psi(\tau)$ сопряженной системы

(2.9) $\quad \psi' + \psi A(\tau, c) = 0, \quad \psi^T \in R^{2m}$

выполнено равенство

$$\int_0^T \psi(\tau)\Phi_0(\tau, c)\,d\tau = 0$$

Так как по условию 2° п. 1 система

(2.10) $\quad u' = A(\tau, c)u$

имеет единственное нетривиальное T-периодическое решение $u = \varphi'(\tau, c)$, то система (2.9) также имеет единственное нетривиальное T-периодическое решение [3]. Согласно [4] и условию 3° это решение можно взять в виде

(2.11) $\quad \psi = \partial\Pi(\varphi)/\partial x \equiv \psi_0(\tau, c)$

Используя соотношения (2.6) и определение $\Phi_0(\tau, c)$, находим

$$\int_0^T \psi_0(\tau, c)\Phi_0(\tau, c)\,d\tau = -\int_0^T \frac{\partial\Pi(\varphi)}{\partial x} B\Gamma_0^{-1} f_0\,d\tau =$$

$$= \int_0^T \frac{\partial\Pi_1(\tau, 0, 0, c)}{\partial p} f_0\,d\tau = -\int_0^T \frac{\partial\Pi_1(\tau, 0, 0, c)}{\partial\tau}\,d\tau = 0$$

Следовательно, T-периодическое решение системы (2.8) существует. Обозначим это решение $u_0(\tau, c)$. Оно определено с точностью до слагаемого, пропорционального $\varphi'(\tau, c)$. Для фиксации $u_0(\tau, c)$ потребуем выполнение условия

$$\int_0^T [\varphi'(\tau, c)]^T u_0(\tau, c)\,d\tau = 0$$

Способ построения решения $u_0(\tau, c)$ будет указан ниже. Заметим только, что оно является гладкой функцией c.

В системе (2.7) сделаем замену

(2.12) $\quad u = y + h^{-2}u_0(\tau, c)$

Получим

(2.13)
$$y' = A(\tau, c)y + \Phi_3(Y)$$
$$p' = [h^2\Gamma_0(\tau, c) + C_1(\tau, c)]p + f_3(Y) + h^2 g_3(Y)$$
$$C_1(\tau, c) = C(\tau, c) + \Gamma_1(\tau, u_0(\tau, c), c), \quad Y = (\tau, y, p, c, h)$$

Функции Φ_3, f_3 и g_3 при $y, p, h^{-1} \to 0$ равномерно по $c \in [c_1, c_2]$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ удовлетворяют оценкам

(2.14)
$$\Phi_3^\circ(\tau, c, h) = O(h^{-4}), \quad f_3^\circ(\tau, c, h) = O(1), \quad f_3^{\circ\prime}(\tau, c, h) = O(1)$$
$$\Phi_3(Y) - \Phi_3^\circ(\tau, c, h) = O[h^{-2}(\|y\| + \|p\|) + \|y\|^2 + \|y\|\|p\|]$$
$$f_3(Y) - f_3^\circ(\tau, c, h) = O(\|y\| + h^{-2}\|p\| + \|p\|^2)$$
$$g_3(Y) = O(\|p\|\|y\|)$$

В выписанных соотношениях и ниже для произвольной функции $g(\tau, \cdot, \cdot, c, h)$ используется обозначение $g^\circ(\tau, c, h) = g(\tau, 0, 0, c, h)$.

Преобразование (2.12) уменьшает правую часть первого уравнения исследуемой системы. Следующее преобразование служит для упрощения члена $C_1(\tau, c)p$ во втором уравнении (2.13). Введем вместо p переменную

$$z = [E_{2m} + h^{-2}Q(\tau, c)]p$$

где $Q(\tau, c)$ — T-периодическая матрица. Явный вид $Q(\tau, c)$ будет указан ниже. В результате система (2.13) перейдет в систему

$$\begin{aligned} &y' = A(\tau, c)y + \Phi_4(U) \\ &z' = [h^2\Gamma_0(\tau, c) + D(\tau, c)]z + f_4(U) + h^2 g_4(U) \\ &D(\tau, c) = C_1 + Q\Gamma_0 - \Gamma_0 Q, \quad U = (\tau, y, z, c, h) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Опишем построение матриц Q и D. Матрицы C_1, Q и D представим в блочной форме с размерами блоков 2×2: $C_1 = (C_{ij})_{i,j=1}{}^m$, $D = (D_{ij})_{i,j=1}{}^m$, $Q = (Q_{ij})_{i,j=1}{}^m$. Тогда формулу для Q можно представить в виде совокупности соотношений

$$D_{ij} = C_{ij} + \gamma_j{}^\circ Q_{ij}J - \gamma_i{}^\circ JQ_{ij}, \quad \gamma_i{}^\circ = \gamma_i(\varphi) \quad (i, j = 1, \ldots, m)$$

Непосредственная проверка с учетом условия 5° из п. 2 показывает, что можно взять

$$\begin{aligned} &Q_{ij} = (\gamma_j{}^{\circ 2} - \gamma_i{}^{\circ 2})^{-1}(\gamma_i{}^\circ JC_{ij} + \gamma_j{}^\circ C_{ij}J), \quad D_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \\ &Q_{ii} = (4\gamma_i{}^\circ)^{-1}(C_{ii}J - JC_{ii}), \; D_{ii} = {}^1/_2 (C_{ii} - JC_{ii}J) = \\ &\qquad = \mu_i E_2 + \nu_i J \\ &\mu_i = \mu_i(\tau, c) = {}^1/_2 \operatorname{tr} C_{ii}, \; \nu_i = \nu_i(\tau, c) = -{}^1/_2 \operatorname{tr} JC_{ii} \end{aligned}$$

Построенные описанным способом матрицы $Q(\tau, c)$ и $D(\tau, c)$ являются T-периодическими по τ. Функции Φ_4, f_4 и g_4 в (2.15) при $y, z, h^{-1} \to 0$ равномерно по $c \in [c_1, c_2]$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ удовлетворяют оценкам, аналогичным оценкам (2.14).

Введем неограниченное множество

$$I(\varepsilon) = \{(c, h)\colon c_1 \leqslant c \leqslant c_2, \; h \geqslant 0, \; \Delta_i(c, h) \geqslant \varepsilon \; (i = 1, \ldots, m)\}$$

$$\varepsilon \in (0, 1), \quad \Delta_i(c, h) = \operatorname{sh}^2 a_i(c) + \sin^2[h^2 b_i(c) + d_i(c)]$$

$$a_i(c) = \frac{1}{2}\int_0^T \mu_i(\tau, c)\,d\tau, \quad b_i(c) = \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_i{}^\circ(\tau, c)\,d\tau,$$

$$d_i(c) = \frac{1}{2}\int_0^T \nu_i(\tau, c)\,d\tau$$

Теорема. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие положительные числа H, A_1 и A_2, что при $(c, h) \in I(\varepsilon)$, $h \geqslant H$ система (2.15) имеет единственное $T(c)$-периодическое решение $y_*(\tau, c, h)$, $z_*(\tau, c, h)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &\| y_*(\tau, c, h)\| \leqslant A_1 h^{-4}, \quad \| z_*(\tau, c, h)\| \leqslant A_2 h^{-2} \\ &(-\infty < \tau < +\infty), \quad \int_0^T [\varphi'(\tau, c)]^T y_*(\tau, c, h)\,d\tau = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Замечания. 1°. Последнее условие (2.16) служит для фиксации произвольного сдвига времени, допускаемого в решениях автономных систем.

2°. Условие $(c, h) \in I(\varepsilon)$ исключает из анализа периодических решений системы (2.15) резонансы между медленными (с частотой $2\pi/T$) и быстрыми (с частотами $\sim h^2$)

колебаниями. Такие резонансы могут возникнуть при значениях c и h, определяемых уравнениями $a_i(c) = 0$, $\sin [h^2 b_i(c) + d_i(c)] = 0$, где i — любое из чисел $1, \ldots, m$. Каждому корню c_* первого уравнения отвечает совокупность резонансных значений h: $h_n = \sqrt{(\pi n - d_i(c_*))/b_i(c_*)}$. Здесь n — любое целое число, для которого подкоренное выражение положительно. Интерес представляют большие h и $|n|$. В таком случае

$$h_n = \sqrt{\frac{\pi n}{b_i(c_*)}} - \frac{d_i(c_*)}{2\sqrt{\pi n b_i(c_*)}} + O(|n|^{-3/2})$$

Как видно из полученной формулы, знание функций $d_i(c)$ необходимо только для вычисления второго члена в асимптотическом представлении резонансных значений h, причем величина этого члена стремится к нулю при $h \to \infty$. С другой стороны, определение функций $d_i(c)$ — наиболее громоздкая часть построений, проделанных для формулировки теоремы. В самом деле, для определения $b_i(c)$ надо знать $\gamma_i^\circ(\tau, c)$, определение $a_i(c)$ требует знания диагональных элементов матрицы $C(\tau, c)$ (совпадающих с диагональными элементами матрицы $C_1(\tau, c)$), а для определения $d_i(c)$ необходимо найти две побочные диагонали матрицы $C_1(\tau, c)$, вычисление которых требует отыскания периодического решения уравнения (2.8). В силу сказанного, применяя теорему к каким-либо конкретным механическим системам, вычисление функций $d_i(c)$ можно не проводить.

3°. Упоминаемому в теореме периодическому решению системы (2.15) отвечает T-периодическое решение системы (2.2), (2.3) $x^\circ(\tau, c, h)$, $p^\circ(\tau, c, h)$, удовлетворяющее условиям

$$\| x^\circ(\tau, c, h) - \varphi(\tau, c) \| < A_1^\circ h^{-2}, \quad \| p^\circ(\tau, c, h) \| \leqslant A_2^\circ h^{-2}$$

$$(-\infty < \tau < +\infty), \quad \int_0^T [\varphi'(\tau, c)]^T x^\circ(\tau, c, h)\, d\tau = 0$$

Здесь A_1° и A_2° — положительные числа. Формулировка теоремы о периодических решениях в терминах системы (2.2), (2.3) или системы (1.4) включала бы много, на первый взгляд, не мотивированных условий и была бы еще более громоздкой, поэтому выше приведена формулировка в терминах преобразованной системы (2.15).

4°. Предполагалось, что система (1.5) имеет семейство колебательных периодических решений, т. е. в (1.6) $\varphi(\tau + T(c), c) = \varphi(\tau, c)$. Теорема остается справедливой и в случае семейства вращательных периодических решений. А именно, когда существуют отличные от нуля число T_0 и постоянный вектор $e \in R^{2m}$ с целочисленными компонентами такие, что в (1.4)—(1.6) $A(x + T_0 e) = A(x)$, $G(x + T_0 e) = G(x)$, $\Pi(x + T_0 e) = \Pi(x)$, $\varphi(\tau + T(c), c) = \varphi(\tau, c) + T_0 e$ при всех x, c и τ.

3. Доказательство теоремы основано на методах, предложенных в [4, 5], и во многом аналогично доказательствам [6, 7]. Сначала приведем ряд вспомогательных соотношений. Положим

$$\Psi_4(U) = f_4(U) + h^2 g_4(U) \tag{3.1}$$

Выше отмечалось, что для функций Φ_4, f_4 и g_4 в системе (2.15) при y, z, $h^{-1} \to 0$ равномерно по $c \in [c_1, c_2]$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ справедливы оценки, получающиеся из оценок (2.14) заменой $3 \to 4$, $p \to z$. В силу этого факта, существуют такие положительные числа K, δ, H_1, что при всех τ, c, h, y, z, y_1, z_1 ($y_1, z_1 \in R^{2m}$), удовлетворяющих условиям $\tau \in (-\infty, +\infty)$, $c \in [c_1, c_2]$, $h \geqslant H_1$ и $\max(\|y\|, \|z\|, \|y_1\|, \|z_1\|) \leqslant \delta$, имеем

$$\| \Phi_4^\circ(\tau, c, h) \| \leqslant K h^{-4}, \quad \| \Psi_4^\circ(\tau, c, h) \| \leqslant K, \quad \| \Psi_4^{\circ\prime}(\tau, c, h) \| \leqslant K \tag{3.2}$$

$$\| \Phi_4(U) - \Phi_4^\circ(\tau, c, h) \| \leqslant K [h^{-2}(\|y\| + \|z\|) + \|y\|^2 + \|y\| \|z\|] \tag{3.3}$$

$$\| \Psi_4(U) - \Psi_4^\circ(\tau, c, h) \| \leqslant K (\|y\| + h^{-2}\|z\| + \|z\|^2 + h^2 \|y\| \|z\|)$$

(3.4) $$\| \Phi_4(U) - \Phi_4(U_1) \| \leqslant K (r_y + r_z + h^{-2}) (d_y + d_z)$$
$$\| \Psi_4(U) - \Psi_4(U_1) \| \leqslant K [d_y (1 + h^2 r_z) + d_z (h^{-2} + h^2 r_y + r_z)]$$
$$U_1 = (\tau, y_1, z_1, c, h), \quad d_y = \| y - y_1 \|$$
$$d_z = \| z - z_1 \|, \quad r_y = \| y \| + \| y_1 \|, \quad r_z = \| z \| + \| z_1 \|$$

В результате преобразований, описанных в п. 2, первый интеграл (2.5) перейдет в первый интеграл системы (2.15), который можно записать в виде

(3.5) $$V(U) \equiv \psi_0(\tau, c)\, y + V_1(U) = \text{const}$$

Функция $\psi_0(\tau, c)$ определена формулой (2.11); при $y, z, h^{-1} \to 0$ равномерно по $c \in [c_1, c_2]$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ имеет место оценка $\partial V_1(U)/\partial y = O(\| y \| + h^{-2})$. Не ограничивая общности, будем считать, что при $c \in [c_1, c_2]$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$, $h \geqslant H_1$ и $\max(\| y \|, \| z \|) \leqslant \delta$ справедливо неравенство

(3.6) $$\| \partial V_1(U)/\partial y \| \leqslant K (\| y \| + h^{-2})$$

Рассмотрим краевую задачу

(3.7) $$y(0) = y(T)$$

для отвечающей первому уравнению (2.15) линейной неоднородной системы (ср. (2.8))]

(3.8) $$y' = A(\tau, c)\, y + \Phi(\tau)$$

Поскольку соответствующая однородная система (2.10) имеет нетривиальное T-периодическое решение $u = \varphi'(\tau, c)$, задачу (3.7), (3.8) удобно исследовать при помощи обобщенной функции Грина [4]. Обозначим эту функцию $G_0(\tau, s, c)$ $(0 \leqslant \tau, s \leqslant T, \ c_1 \leqslant c \leqslant c_2)$. Она единственным образом определяется теми же краевыми условиями и условием скачка при $\tau = s$, что и обычная функция Грина, и уравнениями

$$\partial G_0(\tau, s, c)/\partial \tau = A(\tau, c)\, G_0(\tau, s, c) - n \psi_0^T(\tau, c)\, \psi_0(s, c)$$
$$\int_0^T [\varphi'(\tau, c)]^T G_0(\tau, s, c)\, d\tau = 0, \quad n = \left(\int_0^T \psi_0(\tau, c)\, \psi_0^T(\tau, c)\, d\tau \right)^{-1}$$

Выражение

(3.9) $$y(\tau) = \int_0^T G_0(\tau, s, c)\, \Phi(s)\, ds$$

удовлетворяет краевым условиям (3.7) и соотношениям

$$y' = A(\tau, c)\, y + \Phi(\tau) - w \psi_0^T(\tau, c)$$
$$w = n \int_0^T \psi_0(\tau, c)\, \Phi(\tau)\, d\tau, \quad \int_0^T [\varphi'(\tau, c)]^T y(\tau)\, d\tau = 0$$

Оно является решением краевой задачи (3.7), (3.8) в том и только в том случае, когда $w = 0$. При помощи формулы (3.9) можно в явном виде построить функцию $u_0(\tau, c)$, использованную в замене переменных (2.12).

Нормой векторной функции $f(\tau)$, непрерывной на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T$, будем называть число

$$\nu(f) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \| f(\tau) \|$$

Для нормы выражения (3.9) при любом $c \in [c_1, c_2]$ имеет место оценка

$$(3.10) \qquad \nu(y) \leqslant N_0 \nu(\Phi)$$

где N_0 — некоторая положительная постоянная.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$(3.11) \qquad z(0) = z(T)$$

для отвечающей второму уравнению (2.15) линейной системы

$$(3.12) \qquad z' = [h^2\Gamma_0(\tau, c) + D(\tau, c)]\, z + \Psi(\tau)$$

Если $\Delta_i(c, h) > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, то эта задача имеет единственное решение, которое при помощи соответствующей функции Грина $G(\tau, s, c, h)$ можно представить в виде

$$(3.13) \qquad z(\tau) = \int_0^T G(\tau, s, c, h)\, \Psi(s)\, ds$$

В силу специального вида матриц Γ_0 и D уравнение (3.12) интегрируется в квадратурах, и для $G(\tau, s, c, h)$ можно указать явную формулу. Имеют место соотношения

$$G(\tau, s, c, h) = \operatorname{diag}(G_1(\tau, s, c, h), \ldots, G_m(\tau, s, c, h))$$

$$G_i(\tau, s, c, h) = G_i^\circ(\tau, s, c, h)/\Delta_i(c, h) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

причем элементы (2×2)-матриц $G_i^\circ(\tau, s, c, h)$ — ограниченные кусочно-гладкие функции.

Если в (3.12) функция $\Psi(\tau)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет краевым условиям (3.11), то, сделав в задаче (3.11), (3.12) замену переменной $z = v - h^{-2}\Gamma_0^{-1}(\tau, c)\,\Psi(\tau)$ и применив к преобразованной задаче формулу (3.13), найдем

$$z(\tau) = -h^{-2}\Gamma_0^{-1}(\tau, c)\,\Psi(\tau) + h^{-2}\int_0^T G(\tau, s, c, h)\,[\Gamma_0^{-1}(s, c)\,\Psi'(s) +$$

$$+ (\Gamma_0^{-1}(s, c))'\,\Psi(s) - D(s, c)\,\Gamma_0^{-1}(s, c)\,\Psi(s)]\, ds$$

Из последней формулы и формулы (3.13) следует существование таких положительных чисел N и H_2, что при $(c, h) \in I(\varepsilon)$, $h \geqslant H_2$ для нормы решения задачи (3.11), (3.12) справедливы оценки

$$(3.14) \qquad \nu(z) \leqslant \varepsilon^{-1} N \nu(\Psi)$$

$$(3.15) \qquad \nu(z) \leqslant h^{-2} N\, [\nu(\Psi) + \varepsilon^{-1}(\nu(\Psi) + \nu(\Psi'))]$$

Ниже предполагается, что $(c, h) \in I(\varepsilon)$, $h \geqslant \max(H_1, H_2)$, и неравенства (3.14), (3.15) используются без дополнительных оговорок относительно выбора h.

Отыскание T-периодических решений системы (2.15) эквивалентно решению для этой системы краевой задачи (3.7), (3.11). Чтобы решить такую задачу, рассмотрим систему интегральных уравнений

$$(3.16) \qquad y(\tau) = \int_0^T G_0(\tau, s)\, \Phi_4(s, y(s), z(s))\, ds \equiv L_1(y, z)$$

$$z(\tau) = \int_0^T G(\tau, s)\, \Psi_4(s, y(s), z(s))\, ds \equiv L_2(y, z)$$

Здесь и далее для сокращения записи в списке аргументов рассматриваемых функций, как правило, не будем указывать c и h. Уравнения (3.16) будем решать методом последовательных приближений. На отрезке $0 \leqslant$

$\leqslant \tau \leqslant T$ построим последовательности функций $y_k(\tau)$, $z_k(\tau)$ $(k = 0,$ $1, \ldots)$, положив

(3.17) $$y_0(\tau) \equiv z_0(\tau) \equiv 0, \quad y_{k+1} = L_1(y_k, z_k)$$
$$z_{k+1} = L_2(y_k, z_k) \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

Докажем, что при достаточно большом h эти последовательности сходятся к решению системы (3.16).

Можно доказать, что при достаточно большом h

(3.18) $$\nu(y_k) \leqslant A_1 h^{-4} \leqslant \delta, \quad \nu(z_k) \leqslant A_2 h^{-2} \leqslant \delta \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

где A_1 и A_2 — некоторые положительные числа.

Поскольку

(3.19) $$y_1(\tau) = \int_0^T G_0(\tau, s)\, \Phi_4^\circ(s)\, ds, \quad z_1(\tau) = \int_0^T G(\tau, s)\, \Psi_4^\circ(s)\, ds$$

соотношения (3.17) при $k \geqslant 1$ можно представить в виде

$$y_{k+1}(\tau) = y_1(\tau) + \int_0^T G_0(\tau, s)\, [\Phi_4(s, y_k(s), z_k(s)) - \Phi_4^\circ(s)]\, ds$$

$$z_{k+1}(\tau) = z_1(\tau) + \int_0^T G(\tau, s)\, [\Psi_4(s, y_k(s), z_k(s)) - \Psi_4^\circ(s)]\, ds$$

Предположим, что $\nu(y_k) \leqslant \delta$, $\nu(z_k) \leqslant \delta$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Тогда в силу неравенств (3.3), (3.10), (3.14) будем иметь

(3.20) $$\nu(y_{k+1}) \leqslant \nu(y_1) + KN_0\, [h^{-2}(\nu(y_k) + \nu(z_k)) + \nu^2(y_k) + \nu(y_k)\, \nu(z_k)]$$
$$\nu(z_{k+1}) \leqslant \nu(z_1) + \varepsilon^{-1} KN\, [\nu(y_k) + h^{-2}\nu(z_k) + \nu^2(z_k) + h^2 \nu(y_k)\, \nu(z_k)]$$

Применив к выражениям (3.19) неравенства (3.10), (3.15) с учетом оценок (3.2), получим

$$\nu(y_1) \leqslant B_1 h^{-4}, \quad \nu(z_1) \leqslant B_2 h^{-2}, \quad B_1 = KN_0, \quad B_2 = KN(1 + 2\varepsilon^{-1})$$

Выберем числа A_1 и A_2 из условий $A_2 > B_2$, $A_1 > B_1 + KN_0 A_2$ и возьмем

$$h \geqslant H_3 = \max\left\{1, H_1, H_2, \sqrt[4]{\frac{A_1}{\delta}}, \sqrt{\frac{A_2}{\delta}},\right.$$
$$\left.\sqrt{\frac{KN(1 + A_2)(A_1 + A_2)}{\varepsilon(A_2 - B_2)}}, \quad \sqrt{\frac{KN_0 A_1 (1 + A_1 + A_2)}{A_1 - B_1 - KN_0 A_2}}\right\}$$

Тогда, если для некоторого k неравенства (3.18) выполнены, то в силу (3.20) будем иметь

$$\nu(y_{k+1}) \leqslant \frac{B_1 + KN_0 A_2}{h^4} + \frac{KN_0 A_1 (1 + A_1 + A_2)}{h^6} \leqslant \frac{A_1}{h^4} \leqslant \delta$$

$$\nu(z_{k+1}) \leqslant \frac{B_2}{h^2} + \frac{KN(1 + A_2)(A_1 + A_2)}{\varepsilon h^4} \leqslant \frac{A_2}{h^2} \leqslant \delta$$

Поскольку при $k = 1$ неравенства (3.18) выполнены, отсюда следует их справедливость при всех k.

Докажем сходимость итераций (3.17). Рассмотрим последовательности $\alpha_k = \nu(y_k - y_{k-1})$, $\beta_k = \nu(z_k - z_{k-1})$, $q_k = \nu(y_k) + \nu(y_{k-1})$, $r_k = \nu(z_k) + \nu(z_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$. В силу неравенств (3.4), (3.10) и (3.14) имеем

$$\alpha_{k+1} \leqslant KN_0\, (q_k + r_k + h^{-2})(\alpha_k + \beta_k)$$
$$\beta_{k+1} \leqslant \varepsilon^{-1} KN\, [\alpha_k (1 + h^2 r_k) + \beta_k (h^{-2} + h^2 q_k + r_k)]$$

Считая $h \geqslant H_3$ и оценивая в последних соотношениях q_k и r_k при помощи неравенств (3.18), получим

(3.21) $$\alpha_{k+1} \leqslant h^{-2} M (\alpha_k + \beta_k), \quad \beta_{k+1} \leqslant M(\alpha_k + h^{-2}\beta_k)$$
$$M = K(1 + 2A_1 + 2A_2) \max(N_0, \varepsilon^{-1} N)$$

Рассмотрим последовательность $\rho_k = \alpha_k + h^{-1}\beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. В силу неравенств (3.21) $\rho_{k+1} \leqslant M(h^{-1} + h^{-2})\rho_k$. Введем множество

$$I_* = \{(c, h)\colon (c, h) \in I(\varepsilon), h \geqslant H_4\}, \quad H_4 = \max(H_3, 2M + 1)$$

При $(c, h) \in I_*$ будем иметь $\rho_{k+1} \leqslant {}^1/_2\rho_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Используя эту оценку можно доказать, что последовательности $y_k(\tau)$ и $z_k(\tau)$ сходятся равномерно на множестве $[0, T] \times I_*$ к некоторым непрерывным функциям $y_*(\tau, c, h)$ и $z_*(\tau, c, h)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\text{(3.22)} \qquad \nu(y_*) \leqslant A_1 h^{-4} \leqslant \delta, \quad \nu(z_*) \leqslant A_2 h^{-2} \leqslant \delta$$

Переходя в соотношениях (3.17) к пределу при $k \to \infty$, находим, что y_*, z_* — решение системы (3.16), причем эти функции непрерывно дифференцируемы по τ. Стандартным способом доказывается единственность найденного решения.

Функции y_* и z_* удовлетворяют краевым условиям (3.7), (3.11), второму уравнению (2.15) и уравнениям

$$\text{(3.23)} \qquad y_*' = A(\tau)y_* + \Phi_4(\tau, y_*, z_*) - w_*\psi_0^T(\tau)$$

$$w_* = n\int_0^T \psi_0(\tau)\Phi_4(\tau, y_*(\tau), z_*(\tau))\,d\tau, \quad \int_0^T [\varphi'(\tau)]^T y_*(\tau)\,d\tau = 0$$

Докажем равенство $w_* = 0$, означающее, что y_*, z_* — решение краевой задачи (2.15), (3.7), (3.11). Воспользуемся приемом [4]. Рассмотрим функцию (ср. (3.5)) $V_*(\tau) = V(\tau, y_*(\tau), z_*(\tau))$. Она удовлетворяет соотношениям

$$\text{(3.24)} \qquad 0 = V_*(T) - V(0) = \int_0^T V_*'(\tau)\,d\tau = \int_0^T \left\{\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial y}(Ay + \Phi_4) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V}{\partial z}[(h^2\Gamma_0 + D)z + \Psi_4]\right\}\bigg|_{y=y_*,\, z=z_*} d\tau -$$

$$- w_*\int_0^T \frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{y=y_*,\, z=z_*} \psi_0^T(\tau)\,d\tau$$

Поскольку $V(\tau, y, z)$ — первый интеграл системы (2.15), выражение в фигурных скобках в (3.24) тождественно равно нулю. Согласно (3.5)

$$\partial V(\tau, y_*(\tau), z_*(\tau))/\partial y = \psi_0(\tau) + \partial V_1(\tau, y_*(\tau), z_*(\tau))/\partial y$$

причем в силу неравенств (3.6) и (3.22) при $(c, h) \in I_*$

$$\nu[\partial V_1(\tau, y_*(\tau), z_*(\tau))/\partial y] \leqslant K(1 + A_1)h^{-2}$$

Следовательно, существует такое число $H \geqslant H_4$, что при $(c, h) \in I(\varepsilon)$ и $h \geqslant H$ последний интеграл в (3.24) отличен от нуля. Для указанных значений c и h имеем $w_* = 0$. Продолжив функции y_*, z_* T-периодически на интервал $-\infty < \tau < +\infty$, получим искомое периодическое решение системы (2.15). Теорема доказана.

4. Предельный переход $h \to \infty$ в уравнениях (1.1) означает неограниченное увеличение кинетических моментов гироскопов при конечных инерционных характеристиках системы. Рассмотрим теперь ситуацию, когда кинетические моменты гироскопов и действующие в системе обобщенные силы остаются конечными, а инерционные характеристики стремятся к нулю. Для этого сделаем в (1.1) замену $\Pi(x) \to h\Pi(x)$, где h — большой параметр. В результате придем к уравнениям, получающимся из (1.4) при $\tau \to t$, $h^2 \to h$. Для новых уравнений справедливы все построения, описанные выше. Отличие — только в изменении масштаба времени. Однако такое изменение масштаба позволяет рассмотреть новую задачу.

Заменим в (1.1) потенциальные обобщенные силы $-\partial\Pi/\partial x_i$ на обобщенные силы $hQ_i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, 2m)$, периодические по времени с периодом $T > 0$. Здесь T — число. Введя вектор $Q(t, x) = (Q_1(t, x), \ldots$ $\ldots, Q_{2m}(t, x))^T$, новые уравнения можно записать в виде

$$G(x)x^{\cdot} - Q(t, x) = -h^{-1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)^T, \quad R = \frac{1}{2}(x^{\cdot})^T A(x)x^{\cdot} \tag{4.1}$$

Относительно матриц $A(x)$ и $G(x)$ сделаем те же допущения, что и в пп. 1 и 2. Предположим еще, что вырожденная система

$$G(x)x^{\cdot} = Q(t, x)$$

имеет T-периодическое решение $x = \varphi(t)$ с мультипликаторами, отличными от 1, и что функции $\gamma_i(x)$ в формуле (2.1) при всех t удовлетворяют неравенствам $0 < \gamma_1^2(\varphi(t)) < \gamma_2^2(\varphi(t)) < \ldots < \gamma_m^2(\varphi(t))$. Тогда можно доказать существование T-периодического решения системы (4.1) $x(t, h)$, определенного для значений h из некоторого неограниченного множества $I_h \subset [0, +\infty)$ и удовлетворяющего при $h \to \infty$, $h \in I_h$ условиям $x(t, h) \to \varphi(t)$, $x^{\cdot}(t, h) \to \varphi^{\cdot}(t)$.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство, изложенное в пп. 1—3. Отличия (и упрощения) состоят в следующем. Во-первых, в новой задаче отсутствует параметр c и вследствие этого множество I_h строится на прямой h, а не на плоскости (c, h). Во-вторых, краевая задача (3.7), (3.8) в новом рассмотрении всегда разрешима. Поэтому в системе (3.16) G_0 — обычная функция Грина и тот факт, что решение этой системы является решением краевой задачи (2.15), (3.7), (3.11), тривиален.

Авторы благодарят В. А. Сарычева за обсуждения при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969. 432 с.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
4. *Lewis D. C.* On the role of first integrals in the perturbation of periodic solutions // Ann. Math. 1956. V. 63. No. 3. P. 535—548.
5. *Flatto L., Levinson N.* Periodic solutions of singularly perturbed systems // J. Rat. Mech. and Analysis. 1955. V. 4. No. 6. P. 943—950.
6. *Сазонов В. В.* Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 707—719.
7. *Сазонов В. В.* Периодические решения дифференциальных уравнений с большим параметром, описывающих движение обобщенно-консервативных механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 56—65.

Москва

Поступила в редакцию
25.I.1988