Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 5, 1988

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ С ПСЕВДОЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Атанасов В. А., Лилов Л. К.

Формулируются достаточные условия асимптотической стабилизируемости установившихся движений механических систем с псевдоциклическими координатами при помощи сил, действующих на псевдоциклические координаты, при наличии диссипации по позиционным координатам. Рассматриваются как гироскопически несвязанные, так и гироскопически связанные системы. Результаты применяются для исследования возможности стабилизации установившегося движения несбалансированного ротора на гибком валу.

1. Рассмотрим голономную склерономную механическую систему с n степенями свободы. Пусть q_j — обобщенные координаты системы, $q_j^{\boldsymbol{\cdot}}$, $p_j^{\boldsymbol{\cdot}}$,— обобщенные скорости и импульсы $(j = 1, \ldots, n)$, T и π — кинетическая и потенциальная энергия соответственно, $L = T - \pi$ — функция Лагранжа. Предположим, что на систему, кроме потенциальных сил, действуют еще и непотенциальные силы Q_j $(j = 1, \ldots, n)$. В дальнейшем будем предполагать, что имеются координаты q_α (здесь и всюду далее $\alpha = m + 1, \ldots, n$; $m < n$), которые не входят явным образом в выражение для функции Лагранжа L $(\partial L/\partial q_\alpha = 0)$. Предположим еще, что действующие на систему силы также не зависят от этих координат, которые будем называть псевдоциклическими. Остальные координаты q_i $(i = 1, \ldots, m)$ — позиционные. Обобщенные непотенциальные силы Q_i $(i = 1, \ldots, m)$ будем рассматривать как диссипативные по обобщенным скоростям, причем диссипация может быть неполной и, в частности, отсутствовать.

При отсутствии сил Q_α, действующих на псевдоциклические координаты, система может совершать установившееся движение, в котором позиционные координаты q_i и псевдоциклические скорости $q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$ остаются постоянными, а псевдоциклические координаты q_α меняются линейно со временем. Основная задача работы — нахождение условий, при которых данное установившееся движение можно стабилизировать до асимптотической устойчивости по отношению к позиционным координатам и всем скоростям при помощи сил Q_α, действующих только на псевдоциклические координаты.

Впервые эта задача рассматривалась [1, 2] при изучении механических систем в отсутствие диссипации. Было предложено [3] выбрать силы Q_α таким образом, чтобы предварительно заданное линейное многообразие оказалось инвариантным асимптотически устойчивым интегральным многообразием для системы линеаризованных дифференциальных уравнений возмущенного движения. Если при этом линеаризованная система оказывается асимптотически устойчивой на многообразии по отношению к позиционным координатам, то выбранные указанным образом силы Q_α решают задачу об асимптотической стабилизации установившегося движения. Эта методика построения стабилизирующих воздействий применялась для исследования стабилизируемости произвольных установившихся движений гироскопически несвязанных систем [3] и тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем [4]. Для построения стабилизирующих воздействий можно воспользоваться и другими способами, в частности методикой, изложенной в [5].

Однако, прежде чем пытаться строить стабилизирующие воздействия, нужно ответить на принципиальный вопрос: является ли данное установившееся движение вообще стабилизируемыми силами, действующими на псевдоциклические координаты. Ниже формулируются достаточные условия разрешимости этой проблемы для произвольных систем с псевдоциклическими координатами при действии диссипативных сил на позиционные координаты.

2. В качестве переменных выбираем переменные Рауса

$$q = (q_1, \ldots, q_m)^T, \quad q_* = (q_{m+1}, \ldots, q_n)^T$$
$$q^{\cdot} = (q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot})^T, \quad p = (p_{m+1}, \ldots, p_n)^T$$

Подставив в выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \| q^{\cdot T}, \quad q_*^{\cdot T} \| \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q^{\cdot} \\ q_*^{\cdot} \end{Vmatrix}$$

зависимость

$$q_*^{\cdot} = A_{22}^{-1} (p - A_{21} q^{\cdot}) \tag{2.1}$$

получим

$$T = {}^1/_2 q^{\cdot T} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) q^{\cdot} + {}^1/_2 p^T A_{22}^{-1} p \tag{2.2}$$

Здесь $A_{11} = A_{11}^T$, $A_{21} = A_{12}^T$, $A_{22} = A_{22}^T$ — подматрицы положительно определенной $(n \times n)$-матрицы кинетической энергии и имеют размеры соответственно $m \times m$, $r \times m$, $r \times r$ $(r = n - m)$. Учитывая выражения (2.1) и (2.2), функцию Рауса можно записать в форме

$$R = R(q, q^{\cdot}, p) = T - \pi + p^T q_*^{\cdot} = R_2 + R_1 - W$$
$$R_2 = {}^1/_2 q^{\cdot T} A q^{\cdot}, \quad A = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$
$$R_1 = p^T A_{22}^{-1} q^{\cdot} = g^T q^{\cdot}, \quad g = A_{12} A_{22}^{-1} p = \| g_1, \ldots, g_m \|^T$$
$$W = {}^1/_2 p^T A_{22}^{-1} p + \pi(q)$$

Изучение движения механической системы сводится к исследованию системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial R_2}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} g_{is} q_s^{\cdot} - \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial p_\alpha} Q_\alpha + Q_i \tag{2.3}$$
$$dp_\alpha / dt = Q_\alpha$$
$$(g_{is} = \partial g_s / \partial q_i - \partial g_i / \partial q_s = -g_{si}; \; i, s = 1, \ldots, m)$$

после интегрирования которой q_α определяются при помощи квадратур

$$q_\alpha = \int (\partial R / \partial p_\alpha)\, dt + c_\alpha'$$

При $Q_\alpha = 0$ первые m уравнений (2.3) можно рассматривать как уравнения фиктивной механической системы, кинетической и потенциальной энергией которой являются соответственно функции R_2 и W и на которую действуют дополнительно гироскопические и диссипативные силы. Эта система называется приведенной и может иметь положения равновесия, которым соответствуют установившиеся движения исходной системы, когда позиционные координаты и псевдоциклические импульсы остаются постоянными, а псевдоциклические координаты меняются линейно со временем. Возможные установившиеся движения системы определяются условиями

$$\partial W / \partial q_i \,|_{q=q^\circ,\, p=c} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.4}$$

а управление должно удовлетворять уравнениям

$$Q_\alpha \,|_{q=q^\circ,\, p=c} = 0$$

Линеаризуем уравнения (2.3) в окрестности установившегося движения. Полагая $q = q^\circ + \xi$, $p = c + \eta$, $(Q_{m+1}, \ldots, Q_n)^T = (u_{m+1}, \ldots, u_n)^T$, получим

$$
\begin{aligned}
(2.5)\qquad & A\xi^{\cdot\cdot} + (D - G)\xi^{\cdot} + C\xi + N\eta + \Gamma u = 0, \quad \eta^{\cdot} = u \\
& A = A(q^\circ),\ C = \| \partial^2 W(q_0, c)/\partial q_i \partial q_s \|, \quad G = \| g_{is}(q^\circ, c) \| = -G^T \\
& N = \| \partial^2 W(q^\circ, c)/\partial q_i \partial p_\alpha \|, \quad \Gamma = A_{12}(q^\circ) A_{22}^{-1}(q^\circ) \\
& (i, s = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

где D — $(m \times m)$-матрица диссипативных сил Q_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Обозначим λ_i корни уравнения

$$
(2.6)\qquad \det \| C - \lambda A \| = 0
$$

Всегда можно сделать такую замену переменных $z = \Phi\xi$, чтобы система (2.5) приняла вид [6]

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & z^{\cdot\cdot} + (D_1 - G_1) z^{\cdot} + \Lambda z + N_1 \eta + \Gamma_1 u = 0, \quad \eta^{\cdot} = u \\
& D_1 = \Phi^T D \Phi, \quad G_1 = \Phi^T G \Phi, \quad N_1 = \Phi^T N, \quad \Gamma_1 = \Phi^T \Gamma \\
& \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)
\end{aligned}
$$

Систему (2.7) запишем в нормальной форме

$$
v^{\cdot} = Lv + Ku, \quad v = (z^T, z^{\cdot T}, \eta^T)^T
$$

$$
L = \left\| \begin{array}{cc|c} 0 & E_m & 0 \\ -\Lambda & G_1 - D_1 & -N_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad K = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -\Gamma_1 \\ \hline E_r \end{array} \right\|
$$

Здесь и в дальнейшем E_k — единичная $(k \times k)$-матрица. Условие

$$
(2.8)\qquad \operatorname{rank}(K, LK, \ldots, L^{2m+r-1}K) = 2m + r
$$

полной управляемости пары (L, K) является, очевидно, достаточным для асимптотической стабилизируемости установившегося движения $q = q^\circ$, $p = c$ по отношению к позиционным координатам и всем скоростям. Для линейной системы (2.5) при отсутствии диссипации $(D = 0)$ условие (2.8) будет необходимым, так как характеристическое уравнение $\det \| L - \mu E_{2m+r} \| = 0$ системы из-за соотношения $G^T = -G$ содержит только четные степени μ, и, таким образом, при нарушении условия (2.8) неуправляемая часть не может быть асимптотически устойчивой.

Если обозначить

$$
P = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E_m \\ -\Lambda & G_1 - D_1 \end{array} \right\|, \quad Q = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -N_1 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -\Gamma_1 \end{array} \right\|
$$

то можно проверить, что

$$
L^i K = \left\| \begin{array}{c} P^{i-1}(PB + Q) \\ 0 \end{array} \right\| \quad (i = 1, \ldots, 2m + r - 1)
$$

и, таким образом, условие (2.8), если учесть соотношения $r = n - m \geqslant 1$, оказывается эквивалентным условию

$$
\operatorname{rank} S = 2m, \quad S = \| PB + Q,\ P(PB + Q), \ldots, P^{2m-1}(PB + Q) \|
$$

Учитывая теперь представление

$$
PB + Q = -R \| \Gamma_1^T, N_1^T \|^T, \quad R = \left\| \begin{array}{cc} E_m & 0 \\ G_1 - D_1 & E_m \end{array} \right\|
$$

и очевидное соотношение $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(R^{-1}S)$, сведем условие (2.8) к эквивалентному условию

$$\operatorname{rank} \| B_1, P_1B_1, \ldots, P_1^{2m-1}B_1 \| = 2m \tag{2.9}$$

$$P_1 = R^{-1}PR = \left\| \begin{matrix} G_1 - D_1 & E_m \\ -\Lambda & 0 \end{matrix} \right\|, \quad B_1 = \left\| \begin{matrix} -\Gamma_1 \\ -N_1 \end{matrix} \right\|$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема. Полная управляемость пары (P_1, B_1) является достаточным условием асимптотической стабилизируемости установившегося движения механической системы с псевдоциклическими координатами по отношению к позиционным координатам и всем скоростям при помощи сил, действующих только на псевдоциклические координаты, при наличии диссипативных сил по позиционным координатам.

3. Рассмотрим случай гироскопически несвязанной системы, т. е. $A_{12} = 0$ и, следовательно, $G_1 = 0$, $\Gamma_1 = 0$. Система (2.7) имеет теперь вид

$$z^{\cdot\cdot} + D_1z^{\cdot} + \Lambda z + N_1\eta = 0, \quad \eta^{\cdot} = u \tag{3.1}$$

Согласно доказанной теореме, нулевое решение $z = z^{\cdot} = 0$, $\eta = 0$ может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости по отношению к z и $z^{\cdot}$, если пара (P_1, B_1), где

$$P_1 = \left\| \begin{matrix} -D_1 & E_m \\ -\Lambda & 0 \end{matrix} \right\|, \quad B_1 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -N_1 \end{matrix} \right\|$$

вполне управляема.

Рассмотрим соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$y^{\cdot} = P_1y + B_1w \tag{3.2}$$

в которой сделаем замену переменных

$$y = R^{-1}z, \quad R = \left\| \begin{matrix} E_m & 0 \\ -D_1 & E_m \end{matrix} \right\|$$

Видно, что система (3.2) преобразуется в систему, которая является в точности первым матричным уравнением системы (3.1), записанным в нормальной форме, если положить в нем $\eta = w$. Таким образом, приходим к следующему следствию.

Следствие. Условие полной управляемости системы

$$z^{\cdot\cdot} + D_1z^{\cdot} + \Lambda z = -N_1\eta$$

в которой возмущения η циклических импульсов рассматриваются как управление, является достаточным условием асимптотической стабилизируемости установившегося движения гироскопически несвязанной системы по позиционным координатам и всем скоростям при помощи сил, действующих на псевдоциклические координаты при наличии диссипативных сил по позиционным координатам.

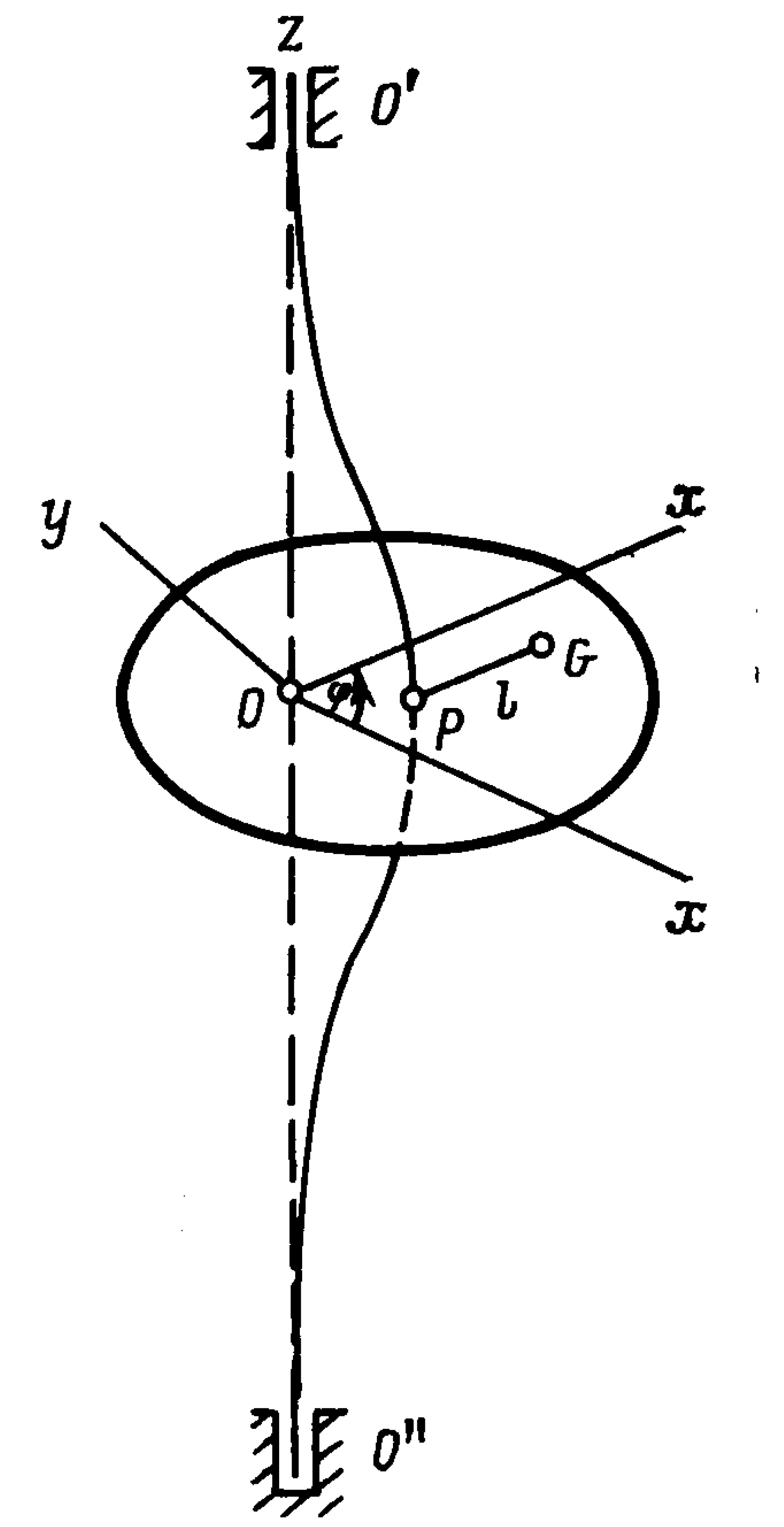
Управляющих членов в (3.1) не будет в случае тривиального установившегося движения, когда на гиперплоскости $q = q^\circ$ равенства (2.5) имеют вид [3]

$$\partial\pi/\partial q_i = 0, \quad \partial \| A_{22}^{-1} \| / \partial q_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

В этом случае $N_1 = 0$, откуда следует, что любое неустойчивое в первом приближении установившееся движение нестабилизируемо никакими линейными силами, действующими на псевдоциклические координаты. Если все корни $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, то, согласно одной из теорем

Кельвина — Четаева, всегда можно добиться асимптотической устойчивости нулевого решения силами полной диссипации ($D_1 > 0$). Полнота диссипации не является, однако, необходимым условием, и асимптотической устойчивости можно добиться подходяще выбранными силами частичной диссипации с вырожденной матрицей $D_1 \geqslant 0$, ранг которой равняется наибольшей кратности характеристических чисел λ_i [7, 8]. В частности, в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$ матрица D_1 максимально вырождена и ее ранг равняется единице.

4. В качестве примера рассмотрим вопрос о возможности асимптотической стабилизации вращения ротора, эксцентрично закрепленного на гибком валу, при помощи крутящего момента (фигура). Как и в работе [9], предположим, что ротор совершает плоскопараллельное движение, и введем в плоскости движения координатную систему Oxy с началом в точке O пересечения плоскости с прямой, соединяющей подшипники вала $O'O''$ и осью x, постоянно параллельной отрезку PG, где G — центр масс ротора, а P — точка его закрепления на валу. В предположении, что угловая скорость вращения ротора не превышает определенного значения, сконструирован [9] крутящий момент, стабилизирующий асимптотически установившееся движение ротора, в котором ротор вращается с постоянной угловой скоростью, а его центр масс остается неподвижным во вращающейся равномерно координатной системе Oxy.



Покажем, что асимптотическая стабилизация этого установившегося движения возможна при всех (за исключением одного единственного) значениях угловой скорости.

Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = {}^1/_2 m\,[x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + 2\varphi^{\cdot}\,(xy^{\cdot} - yx^{\cdot}) + {}+ \varphi^{\cdot 2}\,(x^2 + y^2)] + {}^1/_2 J\varphi^{\cdot 2}$$

$$\pi = {}^1/_2 c\,[(x + l)^2 + y^2]$$

где m — масса, J — центральный момент инерции ротора, x и y — координаты его центра масс G в системе Oxy, φ — угол между осью x и неподвижной осью X в плоскости движения точки G, l — длина отрезка PG, c — коэффициент упругости вала Предполагаем, что на систему действуют сила внутреннего сопротивления ($-ax^{\cdot}$, $-ay^{\cdot}$), приложенная в некоторой точке вала (a — коэффициент внутреннего сопротивления), и управляющий момент $M\,(x, x^{\cdot}, y, y^{\cdot}, \varphi^{\cdot})$, подлежащий определению.

Матрицы в формуле (2.2) имеют вид

$$A_{11} = \begin{Vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{Vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{Vmatrix} -my \\ mx \end{Vmatrix}, \quad A_{22}^{-1} = \frac{1}{J + m\,(x^2 + y^2)}$$

$$q = (x, y)^T, \quad p = \partial T/\partial\varphi^{\cdot} = \varphi^{\cdot}\,[J + m\,(x^2 + y^2)] + m\,(xy^{\cdot} - yx^{\cdot})$$

Установившиеся движения системы

$$q = q^{\circ} = (x_0, y_0)^T, \quad p = k_0 = \omega_0\,[J + m\,(x_0{}^2 + y_0{}^2)]$$

где ω_0 — угловая скорость вращения ротора, определяются из системы (2.4), которая для данной задачи имеет вид

(4.1) $$\varkappa x_0 + cl = 0, \quad \varkappa y_0 = 0; \quad \varkappa = c - m\omega_0{}^2$$

а управление должно удовлетворять условию

(4.2) $$M\,(x_0, 0, y_0, 0, \omega_0) = 0$$

После этого задача выбора управления сводится к определению коэффициентов обратной связи в линейной части зависимости управляющего момента M от возмущений позиционных координат и всех скоростей.

В рассматриваемом случае несбалансированного ротора ($l \neq 0$) система (4.1) имеет смысл только при выполнении условия $\omega_0{}^2 \neq c/m$, когда $x_0 = -cl/\varkappa$, $y_0 = 0$, а ω_0 определяется из условия (4.2). Матрицы в уравнениях (2.5) имеют вид

$$A=\begin{Vmatrix} m & 0\\ 0 & J\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} \varkappa+4\nu m\omega_0^2x_0^2 & 0\\ 0 & \varkappa\end{Vmatrix}$$

$$G=\begin{Vmatrix} 0 & 2\nu\omega_0 J\\ -2\nu\omega_0 J & 0\end{Vmatrix},\quad D=\begin{Vmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{Vmatrix}$$

$$N=\begin{Vmatrix} -2\nu\omega_0 x_0\\ 0\end{Vmatrix},\quad \Gamma=\begin{Vmatrix} 0\\ -\nu x_0^2\end{Vmatrix};\quad \nu=\frac{m}{J+mx_0^2}$$

Корни векового уравнения (2.6) таковы

$$\lambda_1=\varkappa/m+4\nu m\omega_0^2x_0^2,\quad \lambda_2=\varkappa/(\nu J)$$

При $\varkappa>0$, т. е. при выполнении условия

$$\omega_0<\sqrt{c/m} \tag{4.3}$$

оба корня λ_1, λ_2 положительны. При этом условии управление $u=k\eta$ ($k<0$) делает многообразие $\eta=0$ асимптотически устойчивым инвариантным многообразием системы (2.5) и тем самым стабилизирует асимптотически установившееся движение [9].

Условие (4.3) не является необходимым для асимптотической стабилизации. Действительно, сделаем преобразование

$$z=\Phi\xi,\quad \Phi=\begin{Vmatrix} m^{-1/2} & 0\\ 0 & (\nu J)^{-1/2}\end{Vmatrix}$$

Условие (2.9) теперь сводится к условию

$$(c-m\omega_0^2)+4\omega_0^2a=0 \tag{4.4}$$

которое, за исключением случая $\omega_0=\sqrt{c/(m-4a)}$, всегда выполняется.

Таким образом, для любой установившейся угловой скорости ω_0, за исключением указанного значения, можно подобрать управляющий момент, который стабилизирует асимптотически рассматриваемое установившееся движение. Нужно отметить, что силы внутреннего трения в рассматриваемом случае несбалансированного ротора не оказывают существенного влияния на асимптотическую стабилизируемость, так как условие (4.4) выполняется и в случае $a=0$.

Предположим теперь, что ротор сбалансирован, т. е. центр масс совпадает с геометрическим центром ($l=0$). Система (4.1) имеет решение $\omega_0=\sqrt{c/m}$, $y_0=0$, а x_0 определяется таким образом, чтобы выполнялось условие (4.2). Если внутреннее трение отсутствует ($a=0$), условие (4.4) не может выполняться и, следовательно, рассматриваемое установившееся движение нестабилизируемо асимптотически линейными силами, так как в этом случае условие (2.8) становится необходимым. Однако наличие сил внутренней диссипации ($a\neq 0$) делает его асимптотически стабилизируемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966—976.
2. *Лилов Л. К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 977—985.
3. *Самсонов В. А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 512—520.
4. *Клоков А. С., Самсонов В. А.* О стабилизируемости, тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 199—202.
5. *Габриелян М. С.* О стабилизации неустойчивых движений механических систем // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 493—501.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
7. *Лилов Л. К.* О некоторых свойствах размерности воздействия стабилизирующего механическую систему // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 290—299.
8. *Лилов Л. К.* О стабилизации механической системы // Тр. 3-го Нац. конгр. по теорет. и прикл. механике. Варна. 1977. София: Изд. БАН, 1977. Т. 1. С. 25—28.
9. *Самсонов В. А., Жестков И. Г.* О возможности стабилизации внешним трением вращения ротора на гибком валу // Некоторые задачи динамики управляемого твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 52—67.

София

Поступила в редакцию
10.XI.1987