Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 5, 1988

УДК 531.36

ОБ ОДНОМ НОВОМ КЛАССЕ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ ТЯЖЕЛЫХ ШАРНИРНО СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Горр Г. В., Рубановский В. Н.

Рассматривается гирлянда тяжелых шарнирно соединенных твердых тел с одним или двумя закрепленными концами. Показано, что если она составлена таким образом, что каждый шарнир выбран в точке пересечения прямых, перпендикулярных плоскостям круговых сечений центральных гирационных эллипсоидов соседних тел, то для каждого тела уравнения движения допускают инвариантное соотношение типа Гесса [1]. Дана геометрическая интерпретация движения системы в случае существования этих инвариантных соотношений. Отмечены простейшие классы движения и указаны условия существования полурегулярных прецессий.

1. Рассмотрим в однородном поле сил тяжести движение системы твердых шарнирно связанных гиростатов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ $(n \geqslant 1)$, первый S_1 из которых имеет неподвижную точку O_1, а сами гиростаты последовательно соединены между собой в виде «цепочки» («гирлянды») при помощи идеальных сферических шарниров $O_2, \ldots, O_n$ таким образом, что для каждого гиростата его центр масс и шарниры, которыми он соединен с соседними телами (или неподвижной точкой), лежат на одной прямой. Такая система гиростатов образует цепочку с одним закрепленным «концом». Можно также рассматривать аналогичную цепочку гиростатов с двумя закрепленными концами; в этом случае будем считать, что последний гиростат S_n имеет неподвижную точку O_{n+1}, а его центр масс и точки O_n и O_{n+1} лежат на одной прямой.

Введем следующие ортогональные системы осей координат: неподвижную O_1xyz, ось z которой с единичным вектором $\mathbf{v}$ направлена вертикально вверх, и подвижные $C_ix_1{}^ix_2{}^ix_3{}^i$ с началами в центрах масс C_i гиростатов и осями, направленными по их главным центральным осям инерции. Здесь и всюду далее $i = 1, \ldots, n$.

Пусть Θ^i — центральный тензор инерции i-го гиростата с диагональными элементами $J_1{}^i < J_2{}^i < J_3{}^i$ (в системе координат $C_ix_1{}^ix_2{}^ix_3{}^i$); $\boldsymbol{\omega}^i$ и $\mathbf{k}^i$ — векторы абсолютной мгновенной угловой скорости корпуса i-го гиростата и его гиростатического момента; $\mathbf{r}^i$ $\mathbf{r}^{i+1}$ $(\mathbf{r}^{i+1} = \lambda^i\mathbf{r}^i$, λ^i — постоянная) — радиусы-векторы точек O_i и O_{i+1} относительно точки C_i; $\omega_j{}^i$, $k_j{}^i$, $e_j{}^i$ $(j = 1, 2, 3)$ — проекции векторов $\boldsymbol{\omega}^i$, $\mathbf{k}^i$, $\mathbf{r}^i$ на оси $x_j{}^i$. Если последний гиростат S_n не имеет неподвижной точки, то будем считать $\lambda^n = 0$.

Пусть действие тела S_{i-1} на S_i характеризует сила $\mathbf{R}^i$, тогда действие S_{i+1} на S_i характеризует сила $-\mathbf{R}^{i+1}$.

На основе теоремы об изменении моментов количества движения в относительном движении вокруг центра масс получаем для i-го гиростата уравнение

$$\Theta^i \cdot \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot} i} + \boldsymbol{\omega}^i \times (\Theta^i \cdot \boldsymbol{\omega}^i + \mathbf{k}^i) = \mathbf{r}^i \times (\mathbf{R}^i - \lambda^i \mathbf{R}^{i+1})$$

Проектируя это уравнение на оси $x_1{}^i$, $x_2{}^i$, $x_3{}^i$, получаем уравнения

$$J_1{}^i\omega^{\boldsymbol{\cdot} i} + (J_3{}^i - J_2{}^i)\,\omega_2{}^i\omega_3{}^i + k_3{}^i\omega_2{}^i - k_2{}^i\omega_3{}^i = \tag{1.1}$$
$$= e_2{}^i(R_3{}^i - \lambda^i R_3^{i+1}) - e_3{}^i(R_2{}^i - \lambda^i R_2^{i+1}) \quad (1\,2\,3)$$

Пусть выполнены следующие условия:

(1.2) $\quad e_2^i = 0, \quad k_2^i = 0$

Умножая первое и третье уравнения (1.1) соответственно на e_1^i и e_3^i и почленно их складывая, получаем соотношения

$$dV^i/dt + \omega_2^i[(J_2^i - J_1^i)\omega_1^i e_3^i + (J_3^i - J_2^i)\omega_3^i e_1^i + k_3^i e_1^i - k_1^i e_3^i] = 0$$
$$V^i = J_1^i \omega_1^i e_1^i + J_3^i \omega_3^i e_3^i + k_3^i e_1^i - k_1^i e_3^i$$

из которых при выполнении условий

$$\frac{(J_2^i - J_1^i)\, e_3^i}{J_1^i e_1^i} = \frac{(J_3^i - J_2^i)\, e_1^i}{J_3^i e_3^i} \tag{1.3}$$

следуют инвариантные соотношения

(1.4) $\quad V^i = 0$

Таким образом, описанная выше система гиростатов при выполнении условий (1.2), (1.3) допускает систему инвариантных соотношений (1.4). Возможна и иная формулировка полученного результата. Цепочка тяжелых гиростатов допускает систему инвариантных соотношений (1.4), если для каждого гиростата S_i его центр масс C_i и шарниры O_i, O_{i+1}, которыми он соединяется с корпусами соседних гиростатов (или неподвижной точкой), лежат на одной прямой, перпендикулярной одному из круговых сечений его центрального гироционного эллипсоида, а гиростатический момент $\mathbf{k}^i$ лежит в плоскости, перпендикулярной этому круговому сечению.

Отсюда при $n = 1$ получаем инвариантное соотношение Л. Н. Сретенского [2] интегрируемости уравнений движения тяжелого гиростата, а из последнего при дополнительных условиях $k_1^1 = k_3^1 = 0$ — инвариантное соотношение Гесса [1]. Для двух тел, одно из которых невесомо, соотношение вида (1.4) указано в [3].

2. Проведем анализ движения рассматриваемой цепочки гиростатов в случае, когда имеют место соотношения (1.4). Для простоты вычислений будем предполагать, что все $\mathbf{k}^i = 0$.

Введем для каждого тела S_i вспомогательную ортогональную систему осей координат $C_i y_1^i y_2^i y_3^i$, ось y_2^i которой совпадает с осью x_2^i, а ось y_1^i проходит через точки $O_i C_i O_{i+1}$.

Обозначим $\mathfrak{э}_1^i$, $\mathfrak{э}_2^i$, $\mathfrak{э}_3^i$ единичные векторы этой системы координат, полагая

$$\mathfrak{э}_1^i = C_i O_{i+1}/|C_i O_{i+1}|, \quad r^i = |O_i C_i|, \quad \rho^i = |C_i O_{i+1}|$$

Пусть, кроме того, Ω_j^i — проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^i$ на оси y_j^i, A_{11}^i, $A_{22}^i = J_2^i$, A_{33}^i, A_{13}^i — отличные от нуля составляющие тензора инерции Θ^i в системе координат $C_i y_1^i y_2^i y_3^i$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\Theta^i \cdot \boldsymbol{\omega}^{\cdot i} + \boldsymbol{\omega}^i \times \Theta^i \cdot \boldsymbol{\omega}^i = -\mathfrak{э}_1 \times (r^i \mathbf{R}^i + \rho^i \mathbf{R}^{i+1}) \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}^i = \Omega_1^i \mathfrak{э}_1^i + \Omega_2^i \mathfrak{э}_2^i + \Omega_3^i \mathfrak{э}_3^i, \quad \Theta^i = \begin{Vmatrix} A_{11}^i & 0 & -A_{13}^i \\ 0 & A_{22}^i & 0 \\ -A_{13}^i & 0 & A_{33}^i \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Соотношения (1.4) в системах координат $C_i y_1^i y_2^i y_3^i$ записываются в виде

(2.3) $\quad A_{11}^i \Omega_1^i - A_{13}^i \Omega_3 = 0$

Пусть φ_i — углы поворотов тел вокруг осей y_1^i, а ψ_i, ϑ_i — углы Эйлера, определяющие положение ломаной $O_1O_2\ldots O_{n+1}$ относительно системы осей координат O_1xyz. Тогда для Ω_j^i будем иметь выражения

$$(2.4)\qquad \Omega_1^i = \psi_i^{\cdot}\cos\vartheta_i + \varphi_i^{\cdot},\quad \Omega_2^i = \psi_i^{\cdot}\sin\vartheta_i\sin\varphi_i + \vartheta_i^{\cdot}\cos\varphi_i$$
$$\Omega_3^i = \psi_i^{\cdot}\sin\vartheta_i\cos\varphi_i - \vartheta_i^{\cdot}\sin\varphi_i$$

Условия того, что прямые, проходящие через точки O_i, C_i, O_{i+1}, перпендикулярны плоскостям круговых сечений центральных гирационных эллипсоидов, приводят к соотношениям

$$(2.5)\qquad A_{11}^iA_{22}^i = A_{11}^iA_{33}^i - A_{13}^iA_{13}^i,\quad A_{22}^i = J_2^i$$

Выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_iv_i^2 + A_{11}^i\Omega_1^{i2} + A_{22}^i\Omega_2^{i2} + A_{33}^i\Omega_3^{i2} - 2A_{13}^i\Omega_1^i\Omega_3^i)$$

при учете соотношений (2.3), (2.5) приводим к виду

$$(2.6)\qquad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[m_iv^2{}_i + J_2^i(\Omega_2^{i2} + \Omega_3^{i2})]$$

(m_i и v_i — масса и скорость центра масс i-го тела).

Отсюда заключаем, что кинетическая энергия цепочки твердых тел при учете соотношений (2.3) совпадает с кинетической энергией цепочки стержней с массами, равными массам соответствующих твердых тел, и центральными моментами инерции J_2^i.

Из (2.6) с учетом (1.4) получаем зависимость вида

$$(2.7)\qquad T = T(\psi_1, \vartheta_1, \ldots, \psi_n, \vartheta_n, \psi_1^{\cdot}, \vartheta_1^{\cdot}, \ldots, \psi_n^{\cdot}, \vartheta_n^{\cdot})$$

Рассмотрим теперь потенциальную энергию П цепочки тяжелых твердых тел. Она совпадает с потенциальной энергией указанной цепочки тяжелых стержней и выражается зависимостью

$$(2.8)\qquad \Pi = \Pi(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$$

Для рассматриваемой цепочки тел функция Лагранжа $L = T - \Pi$ будет определяться при учете (2.7), (2.8) зависимостью

$$(2.9)\qquad L = L(\psi_1, \vartheta_1, \ldots, \psi_n, \vartheta_n, \psi_1^{\cdot}, \vartheta_1^{\cdot}, \ldots, \psi_n^{\cdot}, \vartheta_n^{\cdot})$$

Соотношения (2.3) при учете (2.4) запишем так:

$$(2.10)\qquad A_{11}^i(\varphi_i^{\cdot} + \psi_i^{\cdot}\cos\vartheta_i) + A_{13}^i(\vartheta_i^{\cdot}\sin\varphi_i - \psi_i^{\cdot}\sin\vartheta_i\cos\varphi_i) = 0$$

В результате приходим к следующему заключению. При выполнении соотношений (2.3) движение цепочки тяжелых твердых тел слагается из двух движений: 1) движения ломаной $O_1O_2\ldots O_{n+1}$ как цепочки тяжелых стержней с массами, равными массам соответствующих тел, и центральными моментами инерции J_2^i и 2) вращений тела относительно звеньев указанной ломаной. Первое движение определяется уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа (2.9), а второе — уравнениями (2.10).

3. Укажем простейшие классы движений цепочки тяжелых тел с одним закрепленным концом. Пусть вначале

$$(3.1)\qquad \vartheta_i = \vartheta_{i0},\quad \vartheta_i^{\cdot} = 0,\quad \psi_i = \omega t,\quad \psi_i^{\cdot} = \omega = \text{const}$$

Здесь величина ω произвольна, а значения ϑ_{i0} определяются уравнениями, в которые переходят уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа (2.9) при подстановке в них значений (3.1).

Соотношениями (3.1) описываются равномерные вращения вокруг вертикали с угловой скоростью ω ломаной $O_1O_2 \ldots O_n$ как твердого тела, все звенья которой лежат в одной вертикальной плоскости и образуют с вертикалью углы $\vartheta_i = \vartheta_{i0}$.

При выполнении соотношений (3.1) уравнения (2.10) принимают вид

$$\varphi^{\cdot} = \omega\,(a_i + b_i \cos \varphi_i) \tag{3.2}$$

$$a_i = -\cos\vartheta_{i0}, \quad b_i = (A_{13}^i / A_{11}^i) \sin \vartheta_{i0}$$

Отсюда для определения зависимостей $\varphi_i = \varphi_i(t)$ получаем уравнения

$$\omega t + D_i = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{a_i^2 - b_i^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\Phi_i}{\sqrt{a_i^2 - b_i^2}}, & a_i^2 > b_i^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{b_i^2 - a_i^2}} \ln \left| \dfrac{\Phi_i - \sqrt{b_i^2 - a_i^2}}{\Phi_i + \sqrt{b_i^2 - a_i^2}} \right|, & a_i^2 < b_i^2 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\Phi_i = (a_i - b_i) \operatorname{tg} {}^1/_2\, \varphi_i$$

где D_i — постоянные интегрирования.

Из (3.3) заключаем, что уравнением $\varphi_i = \varphi_i(t)$ определяется зигзагообразная линия [4], если $a_i^2 > b_i^2$, и локсодрома [4], если $a_i^2 < b_i^2$.

Укажем второй класс возможных движений цепочки тяжелых тел с одним закрепленным концом.

Уравнения Лагранжа, определяющие движение цепочки тяжелых стержней, допускают решения вида

$$\psi_i = 0,\ \psi_i^{\cdot} = 0,\ \vartheta_i = \vartheta_i(t),\ \vartheta_i^{\cdot} = \vartheta_i^{\cdot}(t),\ \vartheta_i(0) = \vartheta_{i0}, \tag{3.4}$$

$$\vartheta_i^{\cdot}(0) = \vartheta_{i0}^{\cdot}$$

где функции $\vartheta_i = \vartheta_i(t)$ определяются уравнениями, в которые переходят уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа (2.9) при подстановке в них значений (3.4).

Соотношениями (3.4) описываются колебательные движения n-звенного стержневого маятника в вертикальной плоскости. Вращательные движения тел вокруг звеньев этого маятника описываются квадратурами (φ_{i0} — начальные значения углов φ_i)

$$\int\limits_{\varphi_{i0}}^{\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{\sin \varphi_i} = -\frac{A_{13}^i}{A_{11}^i} (\vartheta_i(t) - \vartheta_{i0})$$

Указанные два класса движений гирлянды гироскопов Гесса, дополняя класс регулярных прецессий системы гироскопов Лагранжа [5], расширяют тем самым представление о возможных типах движений связки твердых тел.

Полученные результаты допускают обобщение на систему тяжелых тел, состоящую из произвольного числа гирлянд тел указанного типа, при условии, чтобы каждое тело имело не более двух сферических шарниров, скрепляющих его с другими телами или неподвижной точкой.

4. Остановимся на условиях существования первого типа движений. Соотношения (2.4) на основе (3.1), (3.2) могут быть записаны в векторном виде

$$\boldsymbol{\omega}^i = \varphi_i^{\cdot} \mathbf{э}_1^i + \omega \mathbf{v} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{v} = \cos \vartheta_{i0} \mathbf{э}_1^i + \sin \vartheta_{i0} \sin \varphi_i \mathbf{э}_2^i + \sin \vartheta_{i0} \cos \varphi_i \mathbf{э}_3^i$$

Здесь ϑ_{i0} — углы между векторами $\mathbf{э}_1^i$ и $\boldsymbol{\vartheta}$, а зависимость φ_i от времени определяется из (3.3). Движения, для которых вектор угловой скорости представляется в виде (4.1), называются полурегулярными прецессиями [6]. Найдем условия существования такого типа движений для системы гироскопов Гесса. Для этой цели добавим к уравнениям (2.1) уравнения движения центра масс

$$m_i \mathbf{v}_i^{\cdot} = -m_i g \mathbf{v} + \mathbf{R}^i - \mathbf{R}^{i+1} \tag{4.2}$$

где g — ускорение свободного падения. На основании равенств

$$d\mathfrak{э}^i/dt = \omega(\mathbf{v} \times \mathfrak{э}_1{}^i), \quad d^2\mathfrak{э}_1{}^i/dt^2 = \omega^2(\cos\vartheta_{i0}\mathbf{v} - \mathfrak{э}_1{}^i)$$

из (4.2) получаем

$$m_i\{g\mathbf{v} + \omega^2[\sum_{k=1}^{i-1}(r^k + \rho^k)(\cos\vartheta_k\mathbf{v} - \mathfrak{э}_1{}^k) + r^i(\cos\vartheta_{i0}\mathbf{v} - \mathfrak{э}_1{}^i)]\} = \mathbf{R}^i - \mathbf{R}^{i+1} \tag{4.3}$$

Воспользуемся разложением вектора $\mathfrak{э}_1{}^k$ при $k < i$ в базисе $\mathfrak{э}_1{}^i$ и $\mathbf{v}$

$$\mathfrak{э}_1{}^k = [\sin(\vartheta_{i0} - \vartheta_{k0})\mathbf{v} + \sin\vartheta_{k0}\mathfrak{э}_1{}^i]\sin^{-1}\vartheta_{i0}$$

Тогда из (4.3) имеем

$$m_i\{[g + \omega^2\cos\vartheta_{i0}(r^i + \Sigma_i)]\mathbf{v} - \omega^2(r^i + \Sigma_i)\mathfrak{э}_1{}^i\} = \mathbf{R}^i - \mathbf{R}^{i+1} \tag{4.4}$$

$$\Sigma_i = \frac{1}{\sin\vartheta_{i0}}\sum_{k=1}^{i-1}(r^k + \rho^k)\sin\vartheta_{k0}$$

Рассмотрим уравнения (2.1). Пусть, как и в работе [6] $\mathfrak{э}_1{}^i \times \mathbf{R}^{i+1} = 0$. Введем для $R_j{}^i$ обозначения

$$\mathbf{R}^i = R_1{}^i\mathfrak{э}_1{}^i + R_2{}^i\mathfrak{э}_2{}^i + R_3{}^i\mathfrak{э}_3{}^i \tag{4.5}$$

После подстановки (4.1), (4.5) в (2.1) с учетом (3.2) получаем

$$R_2{}^i/\sin\varphi_i = R_3{}^i/\cos\varphi_i = -(\omega^2/r^i)A_{22}{}^i\sin\vartheta_{i0}\cos\vartheta_{i0} \tag{4.6}$$

Обратимся к уравнениям (4.4). Спроектируем левую и правую части (4.4) на векторы $\mathfrak{э}_j{}^i$ ($j = 1, 2, 3$) и подставим в полученные выражения значения (4.6)

$$m_i[g\cos\vartheta_{i0} - \omega^2\sin^2\vartheta_{i0}(r^i + \Sigma_i)] = R_1{}^i - R_1^{i+1} \tag{4.7}$$

$$m_i\omega^2 r^{i^2}\cos\vartheta_{i0} + m_i r^i(g + \omega^2\cos\vartheta_{i0}\Sigma_i) + \omega^2 A_{22}{}^i\cos\vartheta_{i0} = 0$$

Рассмотрим вторую совокупность n равенств из (4.7). Будем считать, что они служат для определения величин r^i. В таком случае должны выполняться два неравенства: первое

$$m_i(g + \omega^2\cos\vartheta_{i0}\Sigma_i)^2 \geqslant 4\omega^4 A_{22}{}^i\cos^2\vartheta_{i0} \tag{4.8}$$

которое служит ограничением на значение параметра $A_{22}{}^i$, второе $\cos\vartheta_{i0} < 0$, которое служит ограничением на выбор углов ϑ_{i0}.

Совокупность n равенств из (4.7) служит для определения $R_1{}^i$, $R_1{}^{i+1}$, причем эти уравнения удобно рассматривать в такой последовательности: вначале их записать для n-го тела ($R_1{}^{n+1} = 0$) и найти $R_1{}^n$, а затем рекуррентно определять реакции $R_1{}^{n-1}, R_1{}^{n-2}, \ldots, R_1{}^1$.

Итак, условиями существования полурегулярных прецессий гирлянды гироскопов Гесса в предположении $\mathfrak{э}_1{}^i \times \mathbf{R}^{i+1} = 0$ являются неравенства $\cos\vartheta_{i0} < 0$, (4.8) и вторая совокупность n равенств из (4.7), которые позволяют определить параметры $r^1, r^2, \ldots, r^n$. Этот подход можно использовать и при исследовании условий существования второго класса движений из п. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. Bd. 37. H. 2. S. 153—181.
2. *Сретенский Л. Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292—294.
3. *Буров А. А.* О частном интеграле в задаче о движении тяжелого твердого тела, подвешенного на стержне // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1986. С. 93—95.
4. *Жуковский Н. Е.* Локсодромический маятник Гесса // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 297—310.
5. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка. 1972. Вып. 4. С. 52—73.
6. *Горр Г. В., Кононыхин Г. А.* Полурегулярная прецессия гироскопа Гесса, подвешенного на стержне, и ее обобщение в задаче о движении системы двух твердых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 2. С. 48—51.

Поступила в редакцию
8.I.1988

Москва