

Приведем выражения для напряжений

$$(5) \quad \tau_{\xi y}(\xi, \zeta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} \zeta \int_{-1}^1 \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} \zeta_1 d\zeta_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq n < R_i} (-1)^n \times \\ \times \left[f(\zeta_1, R_i - 2n) - \frac{m\pi}{\varepsilon} P_{in} \int_0^t \frac{f(\zeta_1, t - \tau)}{(t^2 - P_{in}^2)^{1/2}} J_1 \left(\frac{m\pi}{\varepsilon} (t^2 - P_{in}^2)^{1/2} \right) \times \right. \\ \left. \times \begin{cases} 0, & 0 < t < P_{in} \\ 1, & t > P_{in} \end{cases} d\tau \right] \\ R_1 = 1/2 (t - 1 + \xi), \quad R_2 = 1/2 (t - 1 - \xi), \quad P_{1n} = 1 - \xi + 2n, \quad P_{2n} = \\ = 1 + \xi + 2n$$

Для полученного ряда (5) характерно представление каждого однородного решения в виде конечной суммы для любого момента времени t .

Приведем результаты численных расчетов в случае

$$\varepsilon = 1, \quad f(\zeta, t) = \varphi(\zeta) g(t), \quad \varphi(\zeta) = \zeta^2, \quad g(t) = H(t) - H(t - 0,2)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда. За T_0 принято время a/c , где $c = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения сдвиговых волн.

Распределение напряжений $\tau_{\xi y}$ во времени в точке $\xi = \zeta = 0,8$ (фиг. 1) отражает неустановившийся характер изменения напряженного состояния. В период $t \in [0,2; 0,4]$ поведение напряжений $\tau_{\xi y}$ в этой точке мало отличается от поведения функции $g(t)$. Однако в периоды отражения возмущений от граней $\xi = \pm 1$ напряжения быстро изменяются как по величине, так и по знаку. В промежутки времени после прохождения заднего фронта волны с ростом времени осцилляция напряжений увеличивается и характеризуется сменой знака.

На фиг. 2 приведено распределение напряжений по ξ в момент времени $t = 2,5$ при $\zeta = 0; 0,5; 1$ (кривые 1, 2, 3). Если при $\zeta = 0$ «скачки» напряжений при $\xi = 0,5$ и $\xi = 0,7$ незначительны по величине, то с увеличением ζ они увеличиваются и сопровождаются изменением знака.

Кривые 1—3 на фиг. 3 отражают при $t = 2,5$ распределение напряжений по ζ при $\xi = 0,2$ — кривая 1 ($10\tau_{\xi y}$), $\xi = 0,5$ — кривая 2 ($10\tau_{\xi y}$), $\xi = 0,8$ — кривая 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука. 1969. 344 с.

Ростов н/Д

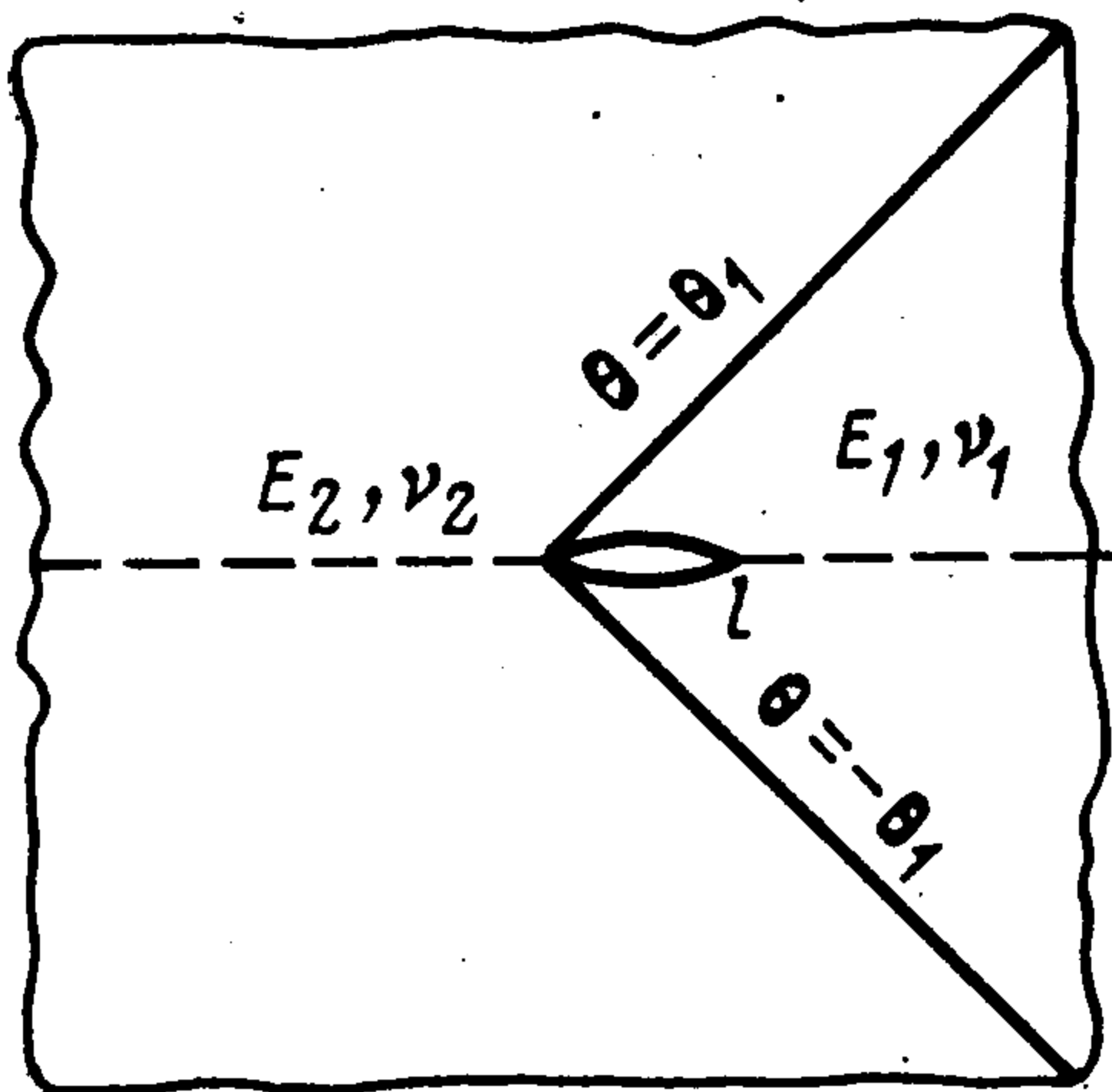
Поступила в редакцию
22.V.1987

УДК 539.375

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ В КЛИНОВИДНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Ситник В. А.

В развитие полученных ранее результатов решения задачи о трещине, ортогонально выходящей на границу полуплоскости [1], рассматривается задача о трещине конечной длины на оси симметрии одной из клиновидных составляющих плоскости. Определяются показатели особенностей решения у обеих вершин трещины, приводятся выражения коэффициентов при этих особенностях. Для прямого угла раствора составляющих и постоянной нагрузки на берега трещины получены числовые значения коэффициентов интенсивности напряжений. Эти результаты согласуются с приведенными в литературе данными для кусочно-однородной плоскости с разрезом, ортогонально выходящим на линию соединения полуплоскостей [2].



Фиг. 1

Ранее [3] для аналогичной задачи было приведено решение функционального уравнения Винера — Хопфа в замкнутом виде и дано выражение для коэффициента при корневой особенности решения, т. е. у правого конца разреза. Поэтому основное внимание будет уделено выделению особенностей у обеих вершин трещины и определению коэффициентов при этих особенностях.

1. Постановка задачи. Сведение к задаче Римана. Рассматривается трещина конечной длины, выходящая по оси симметрии одной из клиновидных составляющих кусочно-однородной плоскости на линию сцепления материалов (фиг. 1). К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка $\sigma_\theta(r, 0) = -f(r)$. Производная перемещений в окружном направлении при переходе через трещину терпит разрыв

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial r} [v(r, -0) - v(r, +0)] = -\frac{\kappa + 1}{2\mu} \varphi(r)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $\varphi(r)$ — неизвестная функция, имеющая особенности при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow 1$ (без ограничения общности рассматривается приведенная длина трещины $l = 1$).

В соответствии с граничным условием (1.1) и симметрией задачи относительно прямой $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $r > 0$ запишем условие недеформированности линии $\{\theta = \pi, r > 0; \theta = 0, r > 1\}$: $\partial v(r, 0)/\partial r = 0$, а при $\theta = 0$, $0 < r < 1$ имеем $\partial v(r, +0)/\partial r = -(4\mu)^{-1}(\kappa + 1)\varphi(r)$.

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в [3]:

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = \langle u \rangle = \langle v \rangle = 0 \quad (\theta = \theta_1);$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = 0 \quad (\theta = 0, \pi); \quad \sigma_\theta = -f(r)$$

при $\theta = 0$, $0 < r < 1$. Угловые скобки означают скачок значений соответствующих компонент смещений и напряжений при переходе через линию сшивки материалов.

Учитывая известные¹ представления упругих перемещений и напряжений интегралами Меллина для задач с клиновидными областями (интегрирование ведется вдоль прямой, параллельной мнимой оси)

$$2\mu v = \frac{1}{2\pi i} \int [p_2(A_0 s_2 - B_0 c_2) + (\kappa + p)(-A_1 s_1 + B_1 c_1)] r^{-p} dp$$

$$2\mu u = \frac{1}{2\pi i} \int [p_2(A_0 c_2 + B_0 s_2) + (\kappa + p)(A_1 c_1 + B_1 s_1)] r^{-p} dp$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\pi i} \int p p_2(A_0 c_2 + B_0 s_2 + A_1 c_1 + B_1 s_1) r^{-p_1} dp$$

$$s_i = \sin p_i \theta, \quad c_i = \cos p_i \theta, \quad p_1 = p + 1, \quad p_2 = p - 1$$

посредством решения двух алгебраических систем уравнений относительно четырех неизвестных функций приходим к задаче Римана ($\Psi_+(r)$ — неизвестная интегрируемая функция):

$$(1.2) \quad \Phi_-(p_0) G(p_0) = 4\pi F_-(p_0) + \Psi_+(p_0)$$

$$-1 < \operatorname{Re} p_0 < 0, \quad \Phi_-(p) = \int_0^1 \varphi(r) r^p dr$$

$$F_-(p) = \int_0^1 f(r) r^p dr, \quad \Psi_+(p) = \int_1^\infty \Psi_+(r) r^p dr$$

$$\sigma_\theta(r, 0) = \begin{cases} -f(r), & 0 < r < 1 \\ -\Psi_+(r), & r > 1 \end{cases}$$

¹ Тихоненко Л. Я. Краевые задачи для уравнений с частными производными в клиновидных областях, приводящиеся к задаче Карлемана: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Одесса: Одес. гос. ун-т. 1975. 21 с.

$$\begin{aligned}
G(p) &= 1/2 \pi R_2^{-1} [(p_1 \omega_0^4 + \omega_0^2) (p_2 \omega_1^3 - \omega_1^1) - (p_2 \omega_0^3 + \omega_0^1) (p_1 \omega_1^4 - \omega_1^3)] \\
\omega_0^1 &= p_2 \nabla_1 - \Delta_4 p_2 \rho(2p_2), \quad \omega_1^1 = \lambda [\Delta_2 \rho(2) + \Delta_1 \rho(2\rho)], \quad \omega_0^2 = \\
&= p_2 [\operatorname{tg} \pi p \nabla_1 + \Delta_4 \rho'(2p_2)], \quad \omega_1^2 = \lambda [-\Delta_1 \rho'(2p) + \Delta_2 \rho'(2)] \\
\omega_0^3 &= \Delta_3 \rho(2p), \quad \omega_1^3 = \nabla_2 + \Delta_4 \rho(2p_1) \\
\omega_0^4 &= -\Delta_3 \rho'(2p), \quad \omega_1^4 = \nabla_2 \operatorname{tg} \pi p - \Delta_4 \rho'(2p_1) \\
\rho(x) &= \cos x \theta_1 + \sin x \theta_1 \operatorname{tg} \pi p, \quad \rho'(x) = \theta_1^{-1} d\rho/dx \\
\Delta_1 &= p^2 k_1 - k_2, \quad \Delta_2 = p(k_2 - k_1), \quad \Delta_3 = \lambda p_2 k_1 \\
\Delta_4 &= \lambda p k_1, \quad \nabla_i = 1 + \lambda k_i, \quad i = 1, 2 \\
k_1 &= K - 1, \quad k_2 = \kappa_1 K - \kappa_2, \quad K = \mu_1 / \mu_2 \\
\lambda &= (\kappa_2 + 1)^{-1}, \quad R_2 = \omega_0^2 \omega_1^4 + \omega_0^4 \omega_1^2
\end{aligned}$$

Коэффициент задачи для $\theta_1 = \pi/2$ совпадает с приведенным в [2]. Следует отметить, что функциональное уравнение (3) было записано в [3] в области $-1 < \operatorname{Re} p < 1$, причем полоса была определена неравенствами $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, где $0 < \varepsilon_i < 1$, $i = 1, 2$, и не указано, из каких соображений выбирались ε_i . Однако учитывая особенность поля напряжений $\sigma \in (-1, 0)$ у левого конца разреза и поведение на бесконечности, полосу регулярности функции $\Phi_-(p)$ следует указать в несколько уточненном виде: $-1 < \operatorname{Re} p < 0$.

2. Выделение особенностей у обеих вершин разреза и выражения для коэффициентов при этих особенностях. Подстановкой $p_0 = p + 1$ сдвинем полосу регулярности функции $\Phi_-(p_0)$: $0 < \operatorname{Re} p_0 < 1$. Записывая $G(p_0)$ в виде

$$(2.1) \quad G(p_0) = \pi V(p_0) / \operatorname{tg} \pi p_0$$

можно показать, что $V(p_0) \rightarrow 1$ ($|p_0| \rightarrow \infty$), $[\arg V(p_0)]_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} = 0$, $\max(\alpha, \sigma_0, 1/2) < \sigma < 1$, где $G(\sigma_0) = 0$, $\sigma_0 \in R$, $0 < \sigma_0 < 1$ и $f(r) = o(r^{-\alpha})$, причем, возможно, $0 < \alpha < 1$. В этом случае факторизация

$$(2.2) \quad V(p_0) = X^+(p_0) / X^-(p_0)$$

$$X(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\ln V(s)}{s-p} ds \right\}$$

при учете представления

$$(2.3) \quad \operatorname{tg} \pi p = A^+(p) A^-(p) D(p)$$

$$A^+(p) = \frac{\Gamma(3/2 - p)}{\Gamma(2 - p)}, \quad A^-(p) = \frac{\Gamma(1/2 + p)}{\Gamma(p)}$$

$$D(p) = \frac{1-p}{1/2 - p}$$

(здесь $\Gamma(p)$ — гамма-функция) позволяет переписать условие (1.2) в виде

$$\frac{\Phi_-(p_0)}{D(p_0) A^-(p_0) X^-(p_0)} = \frac{4F_-(p_0) A^+(p_0)}{X^+(p_0)} + \frac{\Psi_+(p_0) A^+(p_0)}{\pi X^+(p_0)}$$

В дальнейшем выкладки аналогичны приведенным в [1], поэтому сразу выпишем решение задачи Римана:

$$(2.4) \quad \Phi_-(p) = \left[\frac{c}{p-1} - 4Q_-(p) \right] X^-(p) A^-(p) D(p)$$

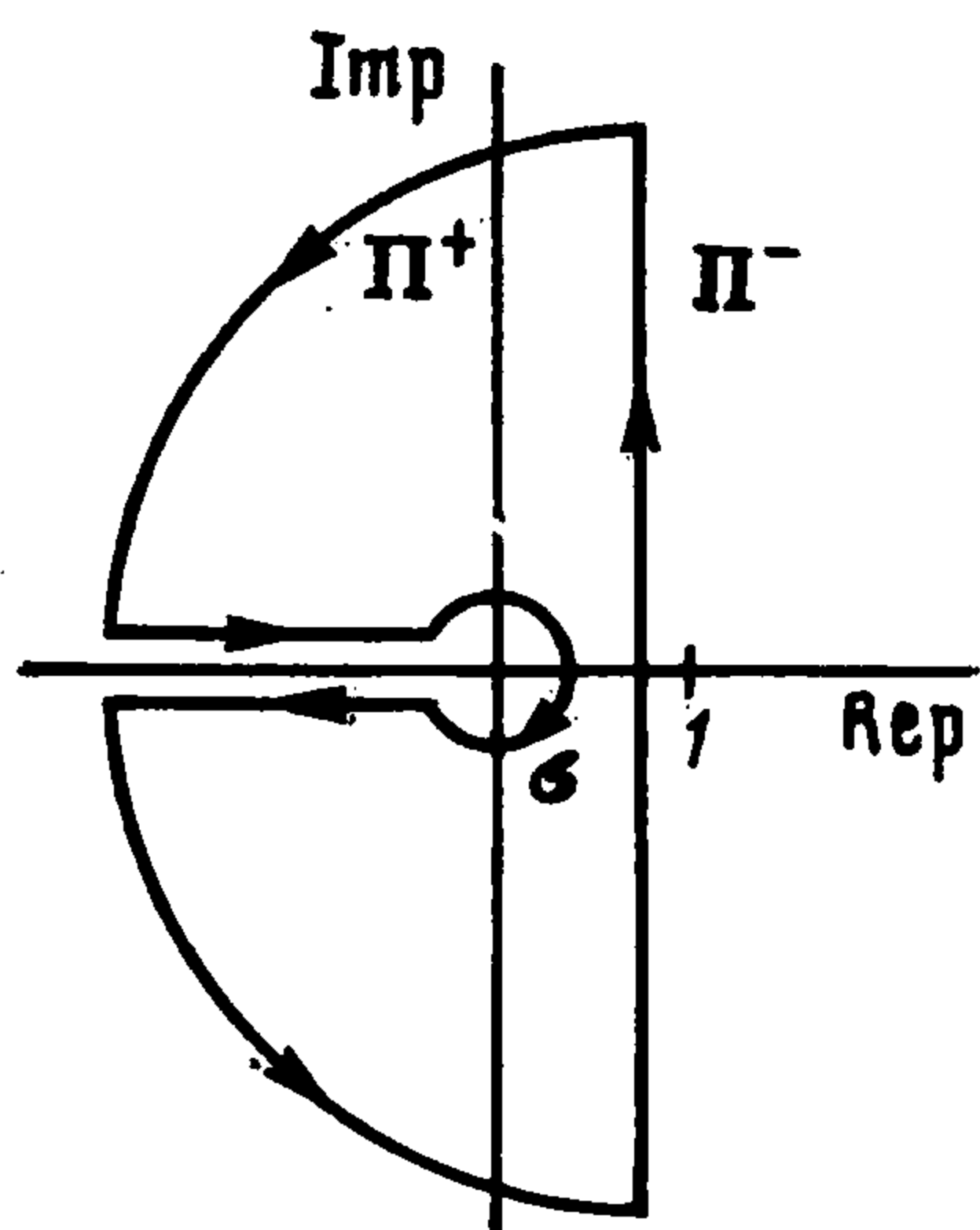
$$Q(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F_-(s) A^+(s)}{X^+(s)} \frac{ds}{s-p}$$

Учитывая представление решения (2.4) на бесконечности, неизвестную производную скачка перемещений у правого конца разреза запишем в виде

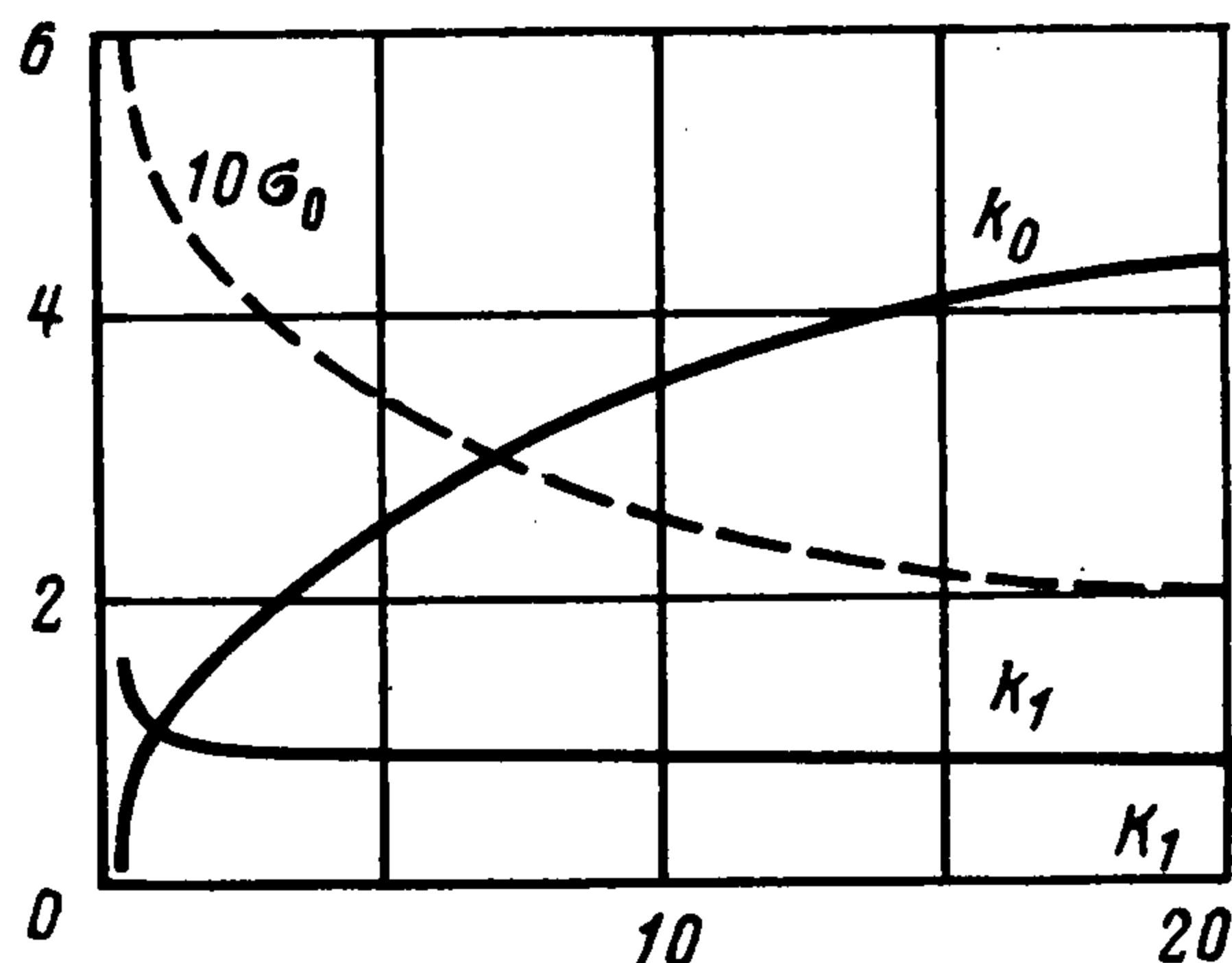
$$\varphi(r) = \frac{A^0}{\sqrt{-\pi \ln r}} + A^1 \frac{(-\ln r)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad r \rightarrow 1$$

$$A^0 = c + 4\eta A^+(-\gamma) / X^+(-\gamma), \quad f(r) = \eta r^\gamma$$

$$\beta = 1/2 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где c — постоянная, определяемая из условия замкнутости трещины

$$\int_0^1 \varphi(r) dr = 0$$

Определение функции-оригинала

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_-(p_0) r^{-p_0} dp_0$$

осуществляется путем замыкания контура интегрирования в полуплоскость Π^+ (фиг. 2), разрезанной вдоль луча $\text{Re } p \leq 0, \text{Im } p = 0$.

Заметим, что в [3] получить такое представление, применяя обратное преобразование Меллина к $\Phi_-(p)$, не удастся.

У вершины разреза, выходящей на линию сцепления частей плоскости, при учете выражений (2.1)–(2.3) получаем

$$\varphi(r) = Br^{\zeta} + o(r^{\zeta}), \quad \zeta = -\max(\alpha, \sigma_0), \quad r \rightarrow 0$$

$$B = 4\pi/G(-\gamma) \quad (\zeta = -\alpha)$$

$$B = \text{res} \left[\frac{\pi}{G(p)}, p = \sigma_0 \right] \frac{X^+(\sigma_0)}{A^+(\sigma_0)} \left[\frac{c}{1-\sigma_0} - \frac{4\eta A^+(-\gamma)}{(\gamma + \sigma_0) X^+(-\gamma)} \right] \quad (\zeta = -\sigma_0)$$

Учет особенности $\varphi(r)$ при $r \rightarrow 0$ позволяет устанавливать зависимость поля смещений и напряжений от различных соединений материалов. В работе [3] особенность производной скачка перемещений у левого конца разреза не выделяется и выражение для коэффициента при этой особенности не приводится.

3. Численный анализ решения. Для $\theta_1 = \pi/2$ приходим к задаче о трещине, ортогонально выходящей на линию соединения полуплоскостей. Коэффициенты интенсивности напряжений в соответствии с [2] принимают вид

$$k_0 = K_1 \frac{(2\sigma_0 - 1)d_1 + (3 - 2\sigma)d_2}{d_1 d_2 \sin \pi \sigma_0} B, \quad K_1 = \frac{E_2}{E_1}$$

$$k_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[c + \frac{4\eta A^+(-\gamma)}{X^+(-\gamma)} \right]$$

$$d_1 = K_1(1 + \nu_2) + 3 - \nu_1, \quad d_2 = K_1(3 - \nu_2) + 1 - \nu_1$$

(k_0 — для левой вершины, k_1 — для правой).

Для различных соединений материалов (эпоксид — алюминий, алюминий — сталь и др.), с учетом влияния последних на показатель особенности решения у левого конца разреза (фиг. 3, штриховая линия), получены значения k_0 и k_1 (сплошные линии). Приведенные результаты соответствуют данным, полученным [2] приближенными методами.

Таким образом, методика [1] решения задачи о трещине, ортогонально выходящей на границу полуплоскости, позволяет получать точные решения ряда задач о трещинах. Как показывает анализ работы [4], идентичный подход к задаче о полубесконечном стрингере на оси симметрии клиновидной составляющей плоскости также приводит к точному решению функционального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихоненко Л. Я., Ситник В. А.* Задача об упругой полуплоскости с трещиной, ортогонально выходящей на границу // *Динамические системы*. Киев: Вища шк. 1985. Вып. 4. С. 45—52.
2. *Cook T. S., Erdogan F.* Stresses in bounded materials with a crack perpendicular to the interface // *Intern. J. Eng. Sci.* 1972. V. 10. No. 8. P. 677—697.
3. *Кипнис Л. А.* Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла с симметричным разрезом, исходящим из вершины // *ПММ*. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 334—336.
4. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // *ПММ*. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 622—631.

Одесса

Поступила в редакцию
22.I.1987