

10. Куликовский А. Г. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1988. Т. 50. Вып. 4. С. 597—604.
11. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. 1980. 352 с.
12. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука. 1978. 687 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1987

УДК 539.3 : 534.1

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ АНТИПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА

Боев Н. В., Сумбатян М. А.

Рассматривается нестационарная антиплоская задача для упругого прямоугольника при заданных напряжениях на боковых гранях. Решение задачи в изображениях по Лапласу получено в виде ряда по однородным решениям. Использование некоторых специальных операторных соотношений позволяет выписать оригинал решения в явном виде. При этом для любого момента времени каждое однородное решение выражается в виде конечной суммы. Проведен численный анализ задачи и выявлены характерные особенности поведения напряженного состояния во времени.

Рассмотрим неустановившиеся колебания бесконечного по длине (ось y) упругого бруса прямоугольного сечения со сторонами $2h$ и $2a$, $z \in [-h, h]$, $x \in [-a, a]$ в условиях антиплоской деформации, вызванной усилиями на противоположащих боковых гранях $\xi = \pm 1$, $z \in [-h, h]$

$$(1) \quad \tau_{\xi y}(\xi, \zeta, T) |_{\xi=\pm 1} = f(\zeta, T); \quad \xi = x/a, \quad \zeta = z/h; \quad \xi, \zeta \in [-1, 1]$$

Здесь $f(\zeta, T)$ — произвольная функция переменных ζ и времени T . Для простоты предположим, что грани $\zeta = \pm 1$ свободны от напряжений ($\tau_{\zeta y} |_{\zeta=\pm 1} = 0$) и начальные условия такие:

$$v |_{T=0} = \partial v / \partial T |_{T=0} = 0, \quad 1 < \xi, \quad \zeta < 1.$$

($v = v(\xi, \zeta, T)$ — перемещение вдоль оси y).

К исходной краевой задаче применим преобразование Лапласа по времени. Имеем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} = \varepsilon^2 p^2 V, \quad V = \int_0^{\infty} v(\xi, \zeta, t) e^{-st} dt$$

$$t = T/T_0, \quad \varepsilon = h/a, \quad p^2 = \rho a^2 s^2 / (\mu T_0^2)$$

Здесь ρ — плотность материала, μ — модуль сдвига, T_0 — характерное время.

Поскольку при условии (1) функция V нечетна по ξ , разыскиваем ее в виде $W(\zeta, p) \operatorname{sh} \gamma \xi$, где функция $W(\zeta, p)$ определяется из следующей самосопряженной краевой задачи

$$(2) \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} W(\zeta, p) = -\varepsilon^2 (\gamma^2 - p^2) W(\zeta, p), \quad \frac{d}{d\zeta} W(\pm 1, p) = 0$$

Собственные функции задачи (2) в случае симметричной задачи по ζ имеют вид

$$(3) \quad W(\zeta, p) = B_k^*(p) \cos \varepsilon \sqrt{\gamma^2 - p^2} \zeta$$

где $B(p)$ — неизвестная функция параметра p , а собственные значения определяются из уравнения

$$\sqrt{\gamma^2 - p^2} \sin \varepsilon \sqrt{\gamma^2 - p^2} = 0, \quad \gamma_k^2 = \pi^2 k^2 / \varepsilon^2 + p^2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

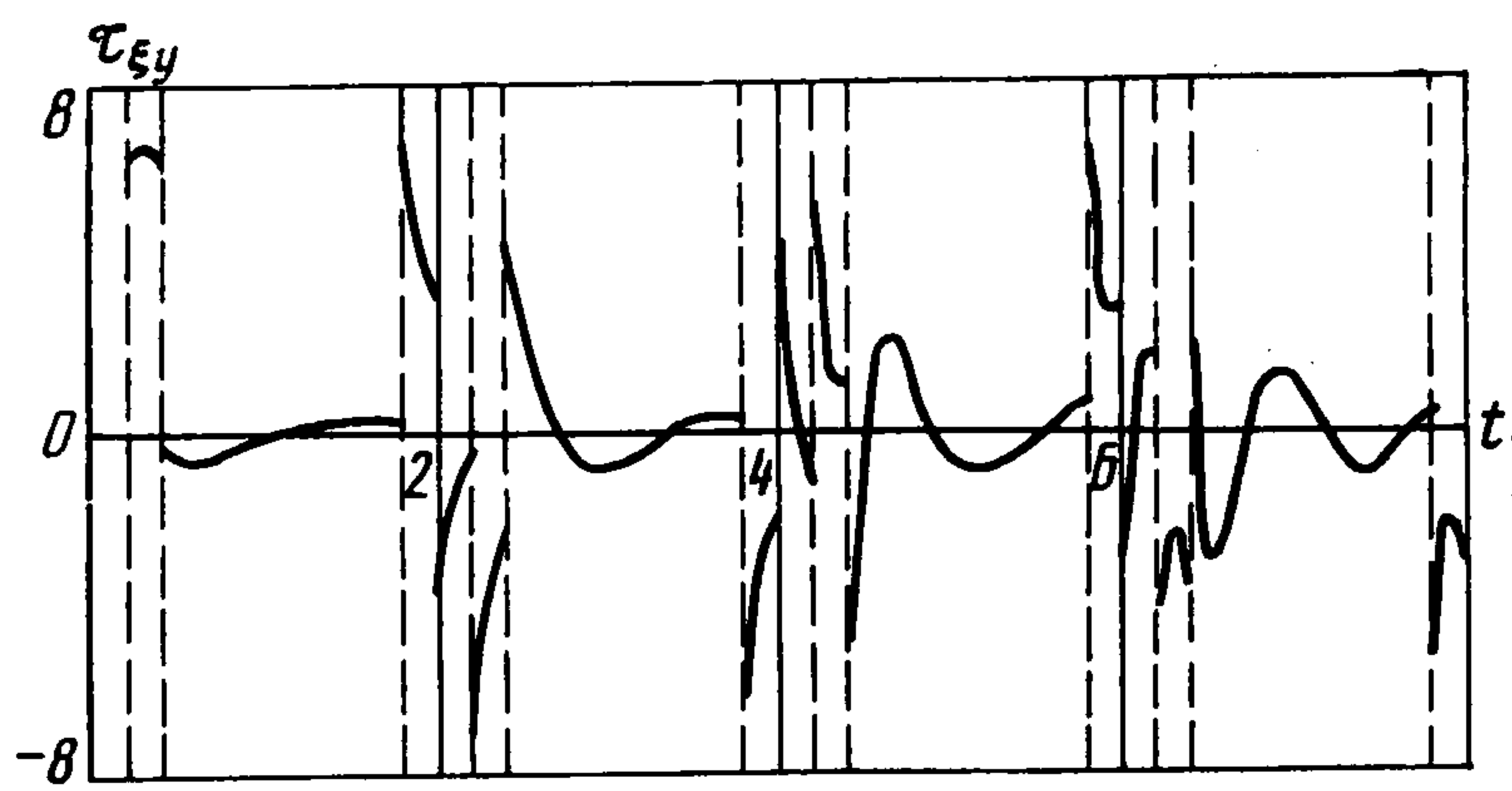


Fig. 1

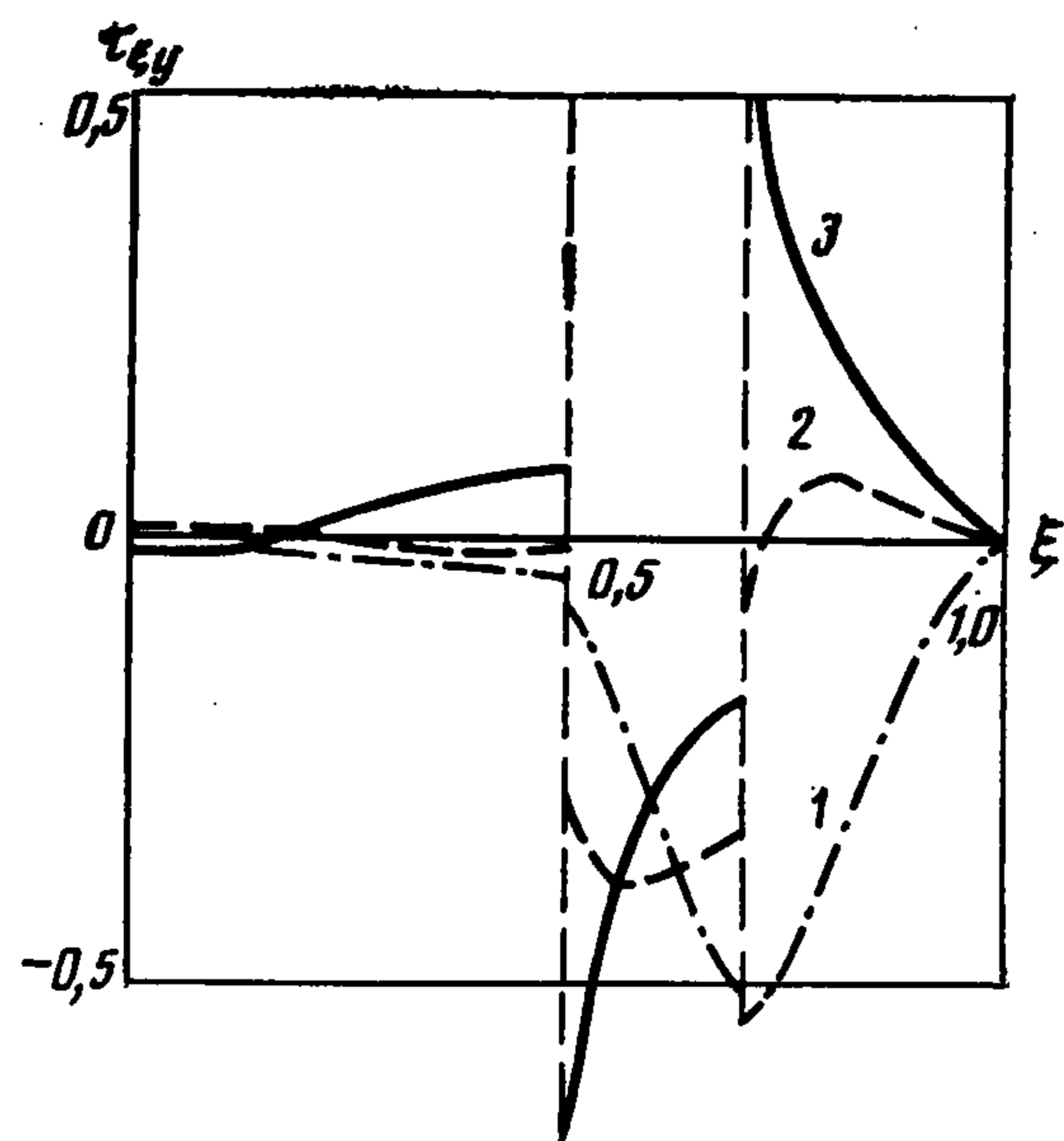


Fig. 2

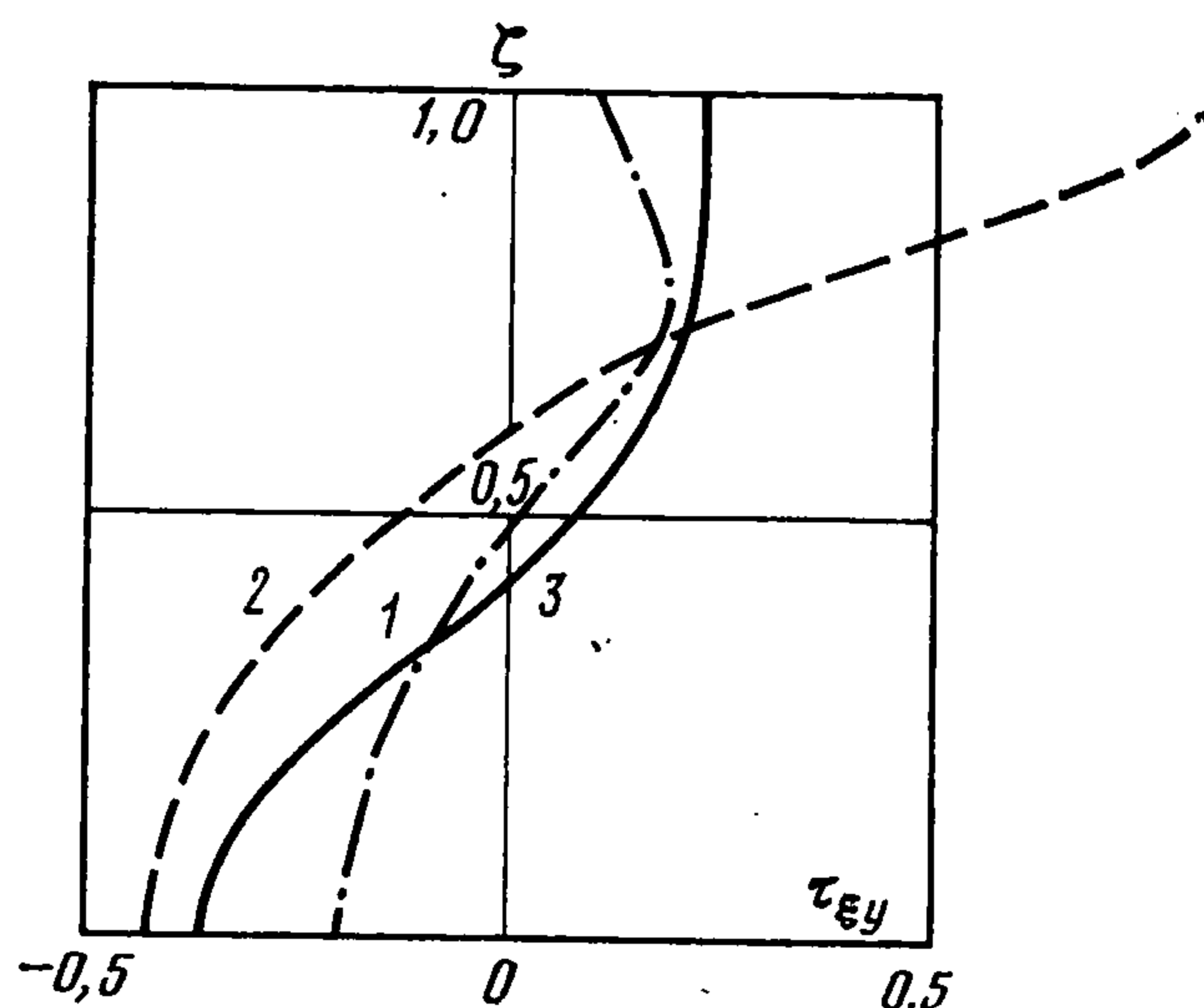


Fig. 3

Таким образом, решение исходной краевой задачи представляется рядом по однородным решениям

$$V(\xi, \zeta, p) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(p) W_k(\zeta; \gamma, p) \operatorname{sh} \gamma \xi$$

где функции $W_k(\zeta; \gamma, p)$ имеют вид (3) (при $\gamma = \gamma_k$) и удовлетворяют условию ортогональности.

Функции $B_k(p)$ определяем при удовлетворении граничным условиям на гранях $\xi = \pm 1$ с использованием условия ортогональности.

Например, для четной по ζ функции $f(\zeta, t)$ изображение по Лапласу $\sigma_{\xi y}(\xi, \zeta, p)$ имеет вид

$$(4) \quad \sigma_{\xi y}(\xi, \zeta, p) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \frac{\operatorname{ch} \gamma_m \xi}{\operatorname{ch} \gamma_m} \cos m\pi \zeta \int_{-1}^1 F(\zeta_1, p) \cos m\pi \zeta_1 d\zeta_1$$

$$\delta_0 = 1/2, \delta_m = 1 \quad (m \neq 0)$$

Здесь $F(\zeta, p)$ — изображение по Лапласу функции $f(\zeta, t)$ по переменной t .
Формула (4) обращается с использованием представления

$$\frac{F(\zeta, p) e^{-br}}{1 + e^{-2r}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(\zeta, p) e^{-(b+2n)r}, \quad r = \sqrt{p^2 + a^2}$$

формулы обращения по Лапласу [1]

$$e^{-bp} \underset{(b>0)}{\overset{e^{-br}}{\leftrightarrow}} \begin{cases} 0, & 0 < t < b \\ abJ_1(ay)/y, & t > b, \quad y = \sqrt{t^2 - b^2} \end{cases}$$

а также теоремы о свертке.

Приведем выражения для напряжений

$$(5) \quad \tau_{\xi y}(\xi, \zeta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} \zeta \int_{-1}^1 \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} \zeta_1 d\zeta_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq n < R_i} (-1)^n \times \\ \times \left[f(\zeta_1, R_i - 2n) - \frac{m\pi}{\varepsilon} P_{in} \int_0^t \frac{f(\zeta_1, t - \tau)}{(t^2 - P_{in}^2)^{1/2}} J_1 \left(\frac{m\pi}{\varepsilon} (t^2 - P_{in}^2)^{1/2} \right) \times \right. \\ \left. \times \begin{cases} 0, & 0 < t < P_{in} \\ 1, & t > P_{in} \end{cases} d\tau \right] \\ R_1 = 1/2 (t - 1 + \xi), \quad R_2 = 1/2 (t - 1 - \xi), \quad P_{1n} = 1 - \xi + 2n, \quad P_{2n} = \\ = 1 + \xi + 2n$$

Для полученного ряда (5) характерно представление каждого однородного решения в виде конечной суммы для любого момента времени t .

Приведем результаты численных расчетов в случае

$$\varepsilon = 1, \quad f(\zeta, t) = \varphi(\zeta) g(t), \quad \varphi(\zeta) = \zeta^2, \quad g(t) = H(t) - H(t - 0,2)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда. За T_0 принято время a/c , где $c = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения сдвиговых волн.

Распределение напряжений $\tau_{\xi y}$ во времени в точке $\xi = \zeta = 0,8$ (фиг. 1) отражает неустановившийся характер изменения напряженного состояния. В период $t \in [0,2; 0,4]$ поведение напряжений $\tau_{\xi y}$ в этой точке мало отличается от поведения функции $g(t)$. Однако в периоды отражения возмущений от граней $\xi = \pm 1$ напряжения быстро изменяются как по величине, так и по знаку. В промежутки времени после прохождения заднего фронта волны с ростом времени осцилляция напряжений увеличивается и характеризуется сменой знака.

На фиг. 2 приведено распределение напряжений по ξ в момент времени $t = 2,5$ при $\zeta = 0; 0,5; 1$ (кривые 1, 2, 3). Если при $\zeta = 0$ «скачки» напряжений при $\xi = 0,5$ и $\xi = 0,7$ незначительны по величине, то с увеличением ζ они увеличиваются и сопровождаются изменением знака.

Кривые 1—3 на фиг. 3 отражают при $t = 2,5$ распределение напряжений по ζ при $\xi = 0,2$ — кривая 1 ($10\tau_{\xi y}$), $\xi = 0,5$ — кривая 2 ($10\tau_{\xi y}$), $\xi = 0,8$ — кривая 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука. 1969. 344 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
22.V.1987

УДК 539.375

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ В КЛИНОВИДНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Ситник В. А.

В развитие полученных ранее результатов решения задачи о трещине, ортогонально выходящей на границу полуплоскости [1], рассматривается задача о трещине конечной длины на оси симметрии одной из клиновидных составляющих плоскости. Определяются показатели особенностей решения у обеих вершин трещины, приводятся выражения коэффициентов при этих особенностях. Для прямого угла раствора составляющих и постоянной нагрузки на берега трещины получены числовые значения коэффициентов интенсивности напряжений. Эти результаты согласуются с приведенными в литературе данными для кусочно-однородной плоскости с разрезом, ортогонально выходящим на линию соединения полуплоскостей [2].