

5. Интегральные представления для произведений функций Эйри. Положим

$$I_k = -\pi^{-1/2} e^{\pi i/4} \int_{\Gamma_k} \exp iF(\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}$$

$$F(\alpha) = \alpha^3/12 + \alpha(p+q)/2 - (p-q)^2/(4\alpha)$$

где контуры Γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) показаны на фиг. 2. Справедливы следующие соотношения:

$$(5.1) \quad w_1(p) w_1(q) = I_1$$

$$(5.2) \quad w_2(p) w_2(q) = I_2$$

$$(5.3) \quad w_1(p) w_2(q) + w_2(p) w_1(q) = -I_3$$

$$(5.4) \quad 4v(p) v(q) = -I_4$$

Чтобы доказать (5.1)–(5.4), заметим, что каждый из интегралов I_k удовлетворяет уравнению Эйри как по переменной p , так и по переменной q . Действительно, применяя к I_k операторы $d^2/dp^2 - p$ или $d^2/dq^2 - q$, получаем под знаком интеграла полный дифференциал от функции $i\alpha^{-1/2} \exp iF(\alpha)$. Учитывая, что I_k симметричны по p , q , получаем

$$(5.5) \quad I_k = \gamma_k w_1(p) w_1(q) + \omega_k [w_1(p) w_2(q) + w_2(p) w_1(q)] + \delta_k w_2(p) w_2(q)$$

Чтобы найти постоянные γ_k , ω_k , δ_k , положим $p = -m^2$, $q = -n^2$, $m > n \gg 1$ и приравняем асимптотику правой части в (5.5) к найденной методом перевала асимптотике интегралов I_k . В результате получим формулы (5.1)–(5.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Анютин А. П., Боровиков В. А. Эволюция локализованных возмущений стратифицированной жидкости с переменной частотой Брента — Вайсяля // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 863–867.
2. Фок В. А. Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио. 1970. 517 с.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах диффракции коротких волн. М.: Наука. 1972. 456 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.
5. Секерж-Зенькович С. Я. Фундаментальное решение оператора внутренних волн // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. № 2. С. 286–289.

Москва

Поступила в редакцию
29.V.1987

УДК 539.3 : 534.1

О ФОРМИРОВАНИИ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Чугайнова А. П.

Изучаются движения в виде плоских нелинейных квазипоперечных волн в слабореизотропной упругой среде. Ранее [1–3] была рассмотрена автомоделная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства. Решение указанной автомоделной задачи в некоторой области задаваемых параметров оказалось неединственным (2 решения). В связи с этим возникает вопрос, в каких случаях реализуется одно или другое решение в области неединственности. Вопрос выбора единственного решения обсуждался в ряде работ [4–8]. В частности, для отбора решения требовалось условие существования структуры [6–8]. Исследование структуры разрывов в автомоделной задаче о действии внезапно приложенной нагрузки на границу упругого полупространства [9] показало, что все разрывы, содержащиеся в решениях (ког-

да этих решений два), обладают структурой, и не дало оснований для предпочтения какого-либо из этих решений. Для выбора единственного решения в данной работе численно найдены автомодельные асимптотики для ряда неавтомодельных задач аналогично тому, как это делалось в [4] для задач магнитной гидродинамики.

Для упрощения расчетов используются приближенные уравнения [10], описывающие слабонелинейные квазипоперечные волны в вязкоупругой среде с малой анизотропией, распространяющиеся только в одном направлении.

$$(1) \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{\mu\rho_0}} \tau_{\alpha 3} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

$$R(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(f - g)u_1^2 + \frac{1}{2}(f + g)u_2^2 - \frac{1}{8}(u_1^2 + u_2^2)^2 \kappa_1$$

$$u_i = \partial w_i / \partial x, \quad \tau_{\alpha 3} = \rho_0 v \partial u_\alpha / \partial t \approx v \sqrt{\mu\rho_0} \partial u_\alpha / \partial x$$

Здесь w_i — перемещения частиц, рассматриваемые как функции лагранжевых координат $x_1, x_2, x_3 = x$, $\tau_{\alpha 3}$ — компоненты тензора вязких напряжений, ρ_0 — плотность в ненапряженном состоянии, μ — упругий коэффициент Ламе, v — кинематический коэффициент вязкости, κ_1 — постоянная с размерностью скорости, которая характеризует нелинейные эффекты, f, g — постоянные, причем g — параметр анизотропии (малый), f — характеристическая скорость при отсутствии анизотропии и нелинейности. Функция R выступает в роли упругого потенциала. Система (1) содержит два уравнения для сдвиговых компонент деформаций; продольные компоненты деформаций u_3 выражаются через сдвиговые (как в [10]).

Численный счет проводился для различных значений коэффициентов f, g, κ_1, v . Однако если перейти к подвижной системе координат x^*, t^* , где $x^* = x + ft, t^* = t$, и ввести соответственно изменение масштабов для величин u_1, u_2, x^*, t^* , то систему (1) можно привести к такому виду, что $f = 0, g = \kappa_1 = v = 1$. Поэтому полученные и описанные ниже решения могут быть пересчитаны в решения полученных таким образом универсальных уравнений и наоборот.

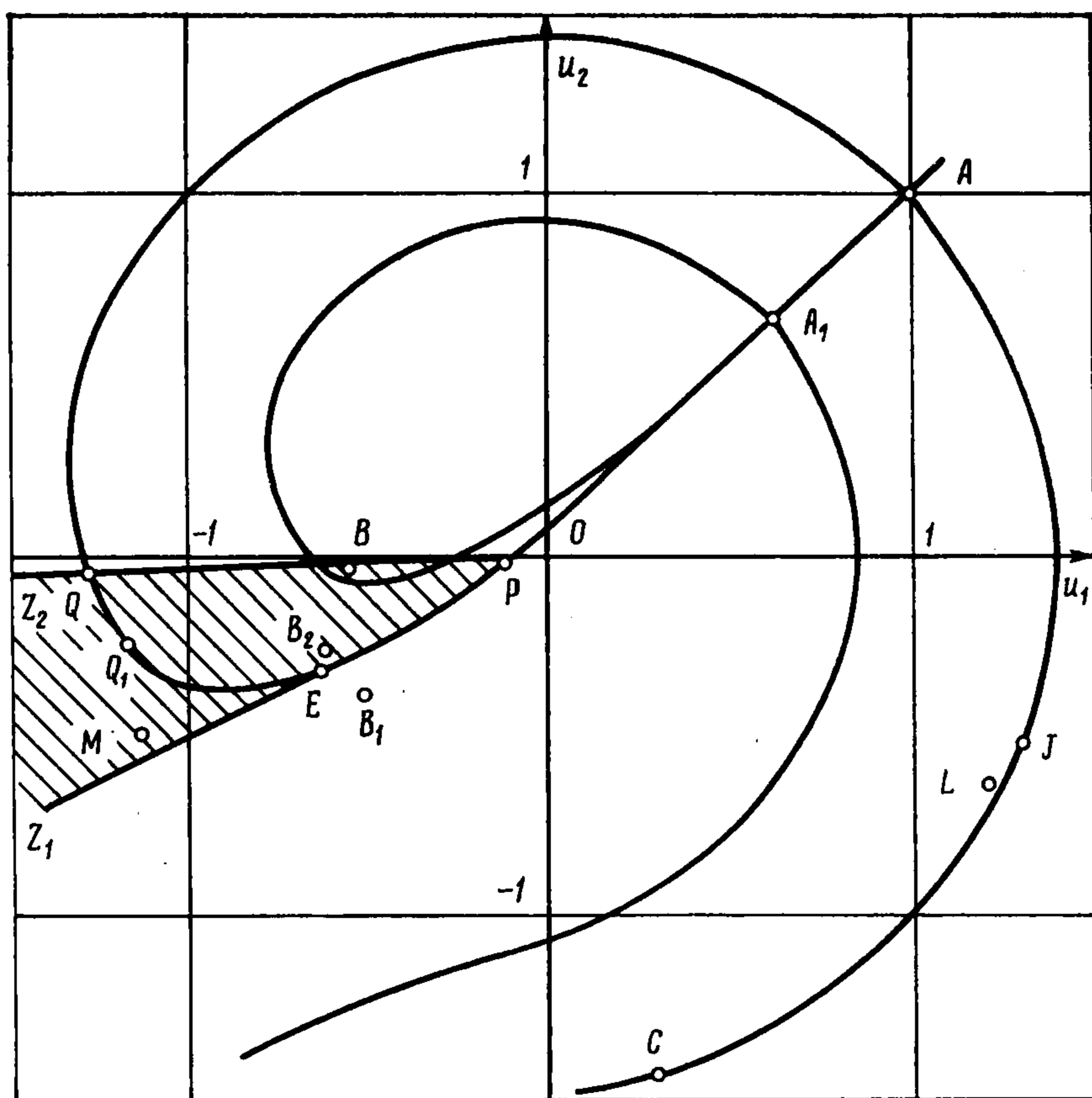
Простые волны и ударные волны (УВ), соответствующие упрощенным уравнениям без диссипативных членов, и структура УВ с принятой степенью точности совпадают с полученными в [1—3, 9], где в качестве исходных взяты точные уравнения, описывающие распространение нелинейных квазипоперечных волн, но использовались приближенные методы решения.

Для автомодельной задачи о внезапном изменении нагрузки на границе упругого полупространства было показано [3], что при малых значениях выражения $2g/[(U^2 + V^2)\kappa_1]$ в некоторой области значений u_1^*, u_2^* существуют два решения.

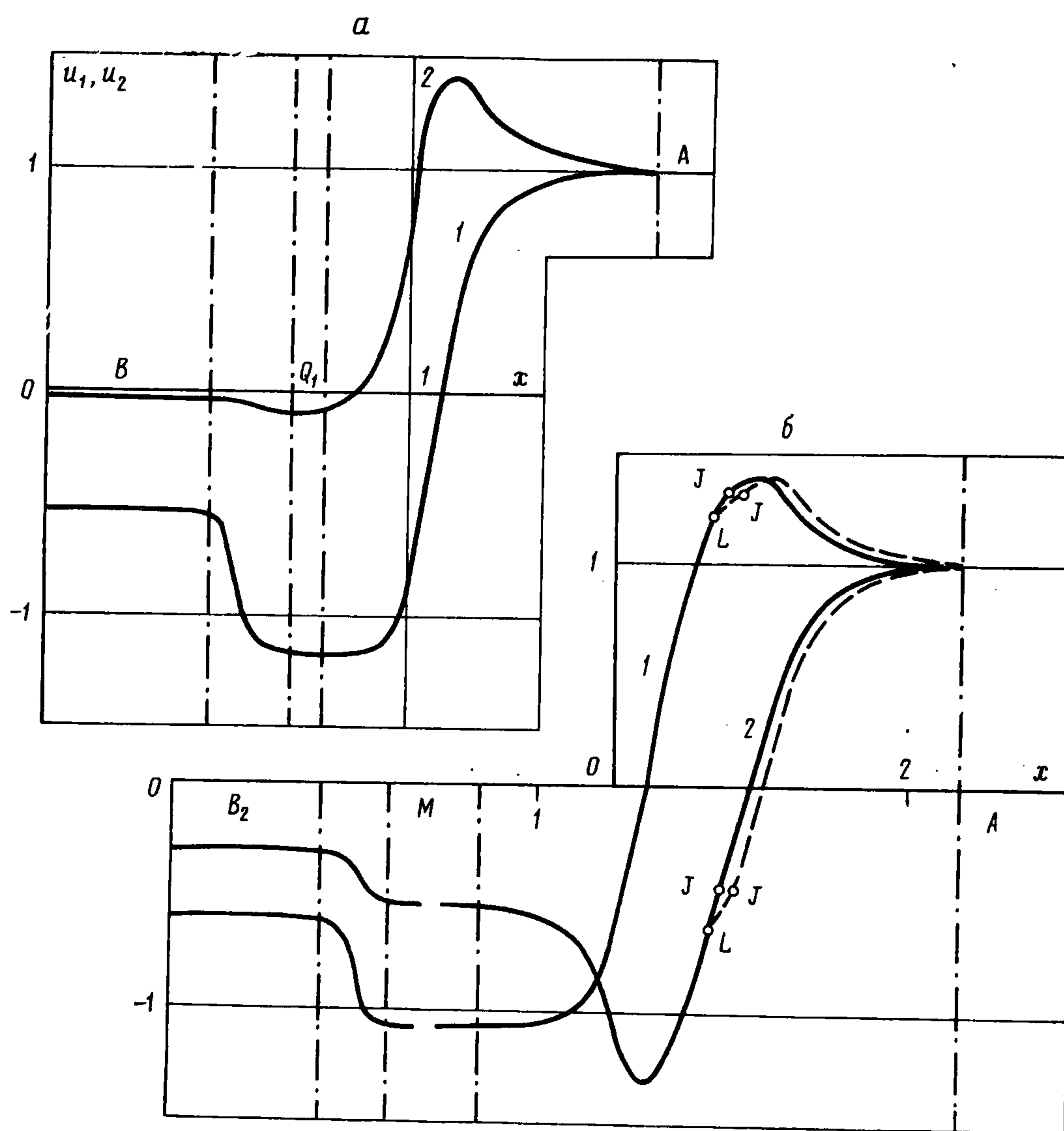
Ниже приводятся результаты численного решения ряда начально-краевых задач для уравнений (1) с вязкими членами, для которых упомянутые выше автомодельные решения могут представлять асимптотики при $t \rightarrow \infty$. Уравнения (1) были записаны в виде неявных нелинейных разностных уравнений, к которым сначала применен метод Ньютона, затем метод матричной прогонки [11]. Расчет проводился в области x, t , ограниченной отрезком оси x и неподвижными правой и левой границами.

Волны, содержащиеся в решении, обладают различными скоростями распространения, поэтому с увеличением расчетного промежутка времени t между отдельными возмущениями будут появляться отрезки, длина которых увеличивается с возрастанием t , соответствующие постоянным значениям u_1, u_2 , а структура УВ при $t \rightarrow \infty$ будут стремиться к стационарной. Поэтому для идентификации волн, получающихся при численном счете, с волнами, входящими в состав автомодельных решений первого или второго типа, нужно получить разностное решение при больших временах t , чтобы упомянутые выше процессы успели завершиться. С другой стороны, с увеличением t разностное решение распространяется на большое число расчетных точек. В связи с этим требуется брать достаточно большой отрезок оси x , чтобы влияние правой границы не исказило решение. Влияние на решение левой границы устраняется соответствующим выбором коэффициента f , который подбирался так, чтобы возмущения распространялись направо.

На фиг. 1 изображена ударная адиабата $APQALC$ (начальная точка $A(1, 1)$), построенная численно. Точки J, E — точки Жуге, точки Q и P изображают такие состояния, что УВ $A \rightarrow Q, A \rightarrow P$ распространяются с той же скоростью, что и УВ $A \rightarrow J$. Заштрихована область неединственности автомодельного решения (для параметра анизотропии $2g/\kappa_1$ принято значение 0,1). Эта область ограничена отрезком PE ударной



Фиг. 1



Фиг. 2

адиабаты из начальной точки A , эволюционным участком QP ударной адиабаты, построенной из точки Q как начальной точки, участками EZ_1 и QZ_2 интегральных кривых простых неопрокидывающихся волн.

Для одного из вариантов расчета начальные условия ($t = 0$) и правое граничное условие ($t > 0, x = l$) взяты в виде $u_1 = 1, u_2 = 1$ (точка A). На левой границе ($t > 0, x = 0$) принято $u_1 = -0,574, u_2 = -0,038$ (точка B из области неединственности решения). Результаты численного счета для некоторого момента времени приведены на фиг. 2, a , где можно выделить UB , которые идентифицируются с UB , рассмотренными теоретически: последовательность двух UB (с их структурой) — быстрой и медленной (переход из точки A в точку Q_1 и из точки Q_1 в точку B) (фиг. 1, $2a$).

Точкам A, B, Q_1 на фиг. 1 соответствуют участки оси x (выделенные штрихпунктирными линиями на фиг. 2, а), на которых величины u_1, u_2 принимают постоянные значения. Было проверено, что эти постоянные значения, представляющие состояния перед и за УВ $A \rightarrow Q_1$ и $Q_1 \rightarrow B$, с принятой точностью удовлетворяют уравнениям соответствующих ударных адиабат. Следует отметить, что внутри структуры, соответствующей ударному переходу из точки A в точку Q_1 , величина u_2 имеет локальный максимум (фиг. 2, а). Это согласуется с качественным исследованием [9] решений, представляющих структуру соответствующих УВ.

Аналогичные варианты расчета были проведены и для других значений $u_1 u_2$ на левой границе области x, t , соответствующих точкам из области неединственности, координаты которых

u_1^*	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-1	-1	-1,1
u_2^*	-0,1	-0,2	-0,2	-0,3	-0,35	-0,3	-0,3	-0,34	-0,25

Во всех случаях реализовалось решение первого типа.

Расчеты показали, что решение второго типа для значений u_1, u_2 на левой границе, соответствующих точкам из области неединственности, можно сформировать следующим образом: сначала нужно полностью сформировать решение второго типа для u_1, u_2 на левой границе, соответствующих точке из области однозначности. Для этого в качестве левого граничного условия брались координаты u_1, u_2 точки, не принадлежащей области неединственности (точка B_1 на фиг. 1), но расположенной достаточно близко к границе этой области. Затем на левой границе значения u_1, u_2 изменялись на значения, принадлежащие области неединственности (точка B_2 на фиг. 1). Это приведет к тому, что от левой границы направо будут распространяться малые возмущения. После взаимодействия ранее образованных волн с этими возмущениями решение при больших временах должно выйти на некоторую автомодельную асимптотику. Расчет показал, что решение не меняет свой тип.

Результаты счета изображены на фиг. 2, б, где можно выделить последовательность простых волн и УВ, полностью соответствующих решению второго типа: быстрая УВ Жуге — скачок из точки A в точку J , затем идет быстрая простая волна — отрезок интегральной кривой JL , быстрая УВ Жуге — скачок из L в M , затем скачок из M в B_2 медленной ударной волной. Участок JL , соответствующий простой волне, выделен на фиг. 2, б путем сравнения решений в два последующих момента времени. График решения для момента времени t_1 изображен сплошной линией, а для момента времени $t_2 > t_1$ — штриховой линией в той части кривой, где графики в моменты времени t_1 и t_2 не совпадают, и сплошной линией, где они совпадают. Участок JL расширяется с течением времени, а участки, соответствующие структурам скачков $A \rightarrow J$ и $L \rightarrow M$, не изменяются.

Точкам A, M, B_2 на фиг. 1 соответствуют участки оси x постоянных значений u_1, u_2 на фиг. 2, б, а отрезок кривой, соответствующий точке M на фиг. 1, изображен с разрывом. Это означает, что часть расчетных точек не изображена и значения u_1, u_2 в этих точках равны u_1, u_2 до и после разрыва на графике. Внутри структуры скачков из начальной точки A в точку J величина u_1 имеет локальный максимум, в структуре скачка из точки M в точку L величина u_2 имеет локальный минимум. Это согласуется с видом интегральных кривых в [9].

Таким образом, полученные решения показывают, что решение неавтомодельной задачи может стремиться при $t \rightarrow \infty$ к разным решениям предельной автомодельной задачи (если это решение неединственно), в зависимости от деталей постановки начальных и граничных условий, соответствующих ограниченными значениями времени.

Разделить явным образом все начальные и граничные условия на два класса, соответствующих различному, асимптотическому поведению (при $t \rightarrow \infty$, невозможно). Однако если ограничиться рассмотрением постановок задач, в которые входят непрерывные функции с ограниченными производными, то при $\nu \rightarrow 0$ для однозначного продолжения решений по времени нужно уметь решать задачи о взаимодействии двух УВ или УВ и малого возмущения (столкновение большего числа волн маловероятно). При этом, конечно, интерес представляют случаи, когда соответствующее автомодельное решение неединственно.

В связи с этим была рассмотрена задача о взаимодействии двух УВ, одна из которых догоняет другую. Для этого была сформирована структура медленной УВ, соответствующей эволюционному скачку из точки A в точку A_1 (фиг. 1), и структура до-

гонящей ее быстрой УВ, соответствующей эволюционному скачку из точки A_1 в точку B (фиг. 1). Точка B расположена на ударной адиабате, проведенной из точки A_1 как начальной, и принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A как начальной. Счет показал, что в результате взаимодействия этих УВ образуются две другие УВ: впереди идет быстрая, за ней медленная, таким образом решение выходит на автомодельную асимптотику, соответствующую решению первого типа автомодельной задачи об изменении нагрузки на границе упругого полупространства.

Так же была рассмотрена задача о взаимодействии быстрой УВ, соответствующей эволюционному скачку из точки A в точку Q_1 (или любую другую точку эволюционного участка EQ) и малого возмущения. Малое возмущение было сформировано перед быстрой УВ. Проведенные численные расчеты показали, что в результате взаимодействия УВ и малого возмущения образуется одна УВ.

В соответствии с полученным в [3] решением автомодельной задачи о внезапном изменении нагрузки на границе ударного полупространства численно изучено, как меняется вид решения, когда точки B_i , изображающие левое граничное условие, находятся вблизи линии EP , разделяющей области, в которых реализуется сверху решение первого и второго типа, снизу — решение второго типа. С этой целью получено решение для ряда значений u_1, u_2 на левой границе, часть из которых соответствует точкам, лежащим сверху от линии EP , а часть — снизу: $u_1^* = -0,5; u_2^* = -0,2; -0,25; -0,3; -0,33; -0,34; -0,345; -0,35$. Счет показал, что для точек, изображающих состояние на левой границе и расположенных выше точки с координатами $(-0,5; -0,34)$, реализуется решение первого типа, а для лежащих ниже этой точки — второго типа.

Таким образом, расчеты показывают, что автомодельные асимптотики первого типа (последовательность быстрой УВ и медленной УВ или простой волны) образуются более устойчиво (обладают в некотором смысле большей областью притяжения), чем автомодельные асимптотики второго типа. В случае задач с медленно меняющимися начальными и граничными условиями процессы взаимодействия возникающих в решении УВ будут происходить, по-видимому, всегда так, как если бы второго автомодельного решения не существовало.

Интересно отметить, что решение первого типа, наиболее часто возникающее в расчетах, не удовлетворяет условию устойчивости относительно сглаживания начальной функции [5, 12]. По существу последнее условие является условием устойчивости относительно конечных возмущений и, как показывает численный счет, его невыполнение не приводит в рассматриваемом случае к самопроизвольной перестройке решения.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и Е. И. Свешникову за постановку задачи и замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешникова Е. И. Простые волны в нелинейной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642—646.
2. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831—840.
3. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284—291.
4. Бармин А. А., Успенский В. С. Развитие пульсационных режимов в одномерных нестационарных МГД-течениях с исключением электропроводности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 115—122.
5. Олейник О. А. Об одном классе разрывных решений квазинелинейных уравнений первого порядка // Научн. докл. высш. шк. Физ-мат. науки. 1958. № 3. С. 91—98.
6. Галин Г. Я. Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1958. Т. 119. № 6. С. 1106—1109.
7. Галин Г. Я. К теории ударных волн // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1959. Т. 127. № 1. С. 55—58.
8. Калашников А. С. Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1959. Т. 127. № 1. С. 27—30.
9. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Исследование структуры квазипоперечных упругих ударных волн // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 926—932.

10. Куликовский А. Г. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1988. Т. 50. Вып. 4. С. 597—604.
11. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. 1980. 352 с.
12. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука. 1978. 687 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1987

УДК 539.3 : 534.1

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ АНТИПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА

Боев Н. В., Сумбатян М. А.

Рассматривается нестационарная антиплоская задача для упругого прямоугольника при заданных напряжениях на боковых гранях. Решение задачи в изображениях по Лапласу получено в виде ряда по однородным решениям. Использование некоторых специальных операторных соотношений позволяет выписать оригинал решения в явном виде. При этом для любого момента времени каждое однородное решение выражается в виде конечной суммы. Проведен численный анализ задачи и выявлены характерные особенности поведения напряженного состояния во времени.

Рассмотрим неустановившиеся колебания бесконечного по длине (ось y) упругого бруса прямоугольного сечения со сторонами $2h$ и $2a$, $z \in [-h, h]$, $x \in [-a, a]$ в условиях антиплоской деформации, вызванной усилиями на противоположащих боковых гранях $\xi = \pm 1$, $z \in [-h, h]$

$$(1) \quad \tau_{\xi y}(\xi, \zeta, T) |_{\xi=\pm 1} = f(\zeta, T); \quad \xi = x/a, \quad \zeta = z/h; \quad \xi, \zeta \in [-1, 1]$$

Здесь $f(\zeta, T)$ — произвольная функция переменных ζ и времени T . Для простоты предположим, что грани $\zeta = \pm 1$ свободны от напряжений ($\tau_{\zeta y} |_{\zeta=\pm 1} = 0$) и начальные условия такие:

$$v |_{T=0} = \partial v / \partial T |_{T=0} = 0, \quad 1 < \xi, \quad \zeta < 1.$$

($v = v(\xi, \zeta, T)$ — перемещение вдоль оси y).

К исходной краевой задаче применим преобразование Лапласа по времени. Имеем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} = \varepsilon^2 p^2 V, \quad V = \int_0^{\infty} v(\xi, \zeta, t) e^{-st} dt$$

$$t = T/T_0, \quad \varepsilon = h/a, \quad p^2 = \rho a^2 s^2 / (\mu T_0^2)$$

Здесь ρ — плотность материала, μ — модуль сдвига, T_0 — характерное время.

Поскольку при условии (1) функция V нечетна по ξ , разыскиваем ее в виде $W(\zeta, p) \operatorname{sh} \gamma \xi$, где функция $W(\zeta, p)$ определяется из следующей самосопряженной краевой задачи

$$(2) \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} W(\zeta, p) = -\varepsilon^2 (\gamma^2 - p^2) W(\zeta, p), \quad \frac{d}{d\zeta} W(\pm 1, p) = 0$$

Собственные функции задачи (2) в случае симметричной задачи по ζ имеют вид

$$(3) \quad W(\zeta, p) = B_k^*(p) \cos \varepsilon \sqrt{\gamma^2 - p^2} \zeta$$

где $B(p)$ — неизвестная функция параметра p , а собственные значения определяются из уравнения

$$\sqrt{\gamma^2 - p^2} \sin \varepsilon \sqrt{\gamma^2 - p^2} = 0, \quad \gamma_k^2 = \pi^2 k^2 / \varepsilon^2 + p^2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$