

**ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВНУТРЕННИХ ВОЛН
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТОЙ
БРЕНТА — ВЯЙСЯЛЯ**

Боровиков В. А.

Строится функция Грина уравнения внутренних волн в полупространстве $z > 0$ с линейным по высоте z квадратом частоты Брента — Вяйсяля.

1. Постановка задачи. В полупространстве $z > 0$ рассматривается обобщенное решение $\Gamma(t, \sqrt{x^2 + y^2}, z, z_0)$ уравнения

$$(1.1) \quad L\Gamma = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta + B^2 z \Delta_h \right) \Gamma = 0$$

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \Delta_h + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

с начальными и граничными условиями

$$(1.2) \quad \Gamma = 0, \quad \partial \Delta \Gamma / \partial t = \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0) \quad (t = 0)$$

$$(1.3) \quad \Gamma = 0 \quad (z = 0)$$

Очевидно, что продолженная нулем при $t < 0$ эта функция удовлетворяет уравнению

$$(1.4) \quad L\Gamma = \delta(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0)$$

т. е. является функцией Грина для уравнения внутренних волн при квадрате частоты плавучести $N^2(z) = B^2 z$; $B = \text{const}$.

Приближенное выражение для Γ имеет вид [1] (J_0 — функция Бесселя, v — функция Эйри)

$$(1.5) \quad G(t, r, z, z_0) = - \frac{1}{\pi^2 B} \int_0^\infty \sigma^{1/3} d\sigma \int_0^\infty U d\omega$$

$$(1.6) \quad U = v(\sigma^{2/3}(\omega^2 - z)) v(\sigma^{2/3}(\omega^2 - z_0)) \sin B\omega t J_0(\sigma\omega r)$$

Поскольку $v(\xi)$ удовлетворяет уравнению Эйри, можно убедиться, что функция U , а вместе с ней и G — точное решение уравнения (1.1). Приближенный характер функции G проявляется в том, что она не удовлетворяет граничному условию (1.3), а второе условие в (1.2) удовлетворяется с точностью до гладкого слагаемого Ψ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta G |_{t=0} = \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0) + \Psi(r, z, z_0)$$

Естественно предположить, что точная функция Грина также имеет вид (1.5), (1.6), где, однако, произведение функций Эйри следует заменить на какую-либо другую комбинацию решений уравнения Эйри от тех же аргументов. Условие симметричности Γ по z, z_0 , граничные условия (1.3) и, наконец, требование, чтобы подынтегральное выражение в (1.5) имело ту же асимптотику при $\sigma \rightarrow \infty$ и $\omega < z, z_0$, что и (1.6) (это условие оказалось существенным для выполнения начальных условий), позволили угадать вид функции U и выписать следующее выражение:

$$(1.7) \quad \Gamma = \frac{1}{4\pi^2 B} \int_0^\infty \sigma^{1/3} d\sigma \int_0^\infty \sin B\omega t J_0(\sigma\omega r) H(\sigma^{2/3}\omega^2) \Phi(z, \sigma, \omega) \Phi(z_0, \sigma, \omega) d\omega$$

$$\Phi(z, \sigma, \omega) = w_1(\sigma^{2/3}(\omega^2 - z)) w_2(\sigma^{2/3}\omega^2) - w_1(\sigma^{2/3}\omega^2) w_2(\sigma^{2/3}(\omega^2 - z))$$

$$H(\xi) = [w_1(\xi) w_2(\xi)]^{-1}, \quad w_{1,2} = u(\xi) \pm iv(\xi)$$

где $w_{1,2}$ — первая и вторая функции Эйри. Интегральные представления и основные свойства функций w_1, w_2, u, v приведены, например, в [2, 3].

Цель работы — доказать формулы (1.7) для функции Грина и определить ее асимптотики при $t \rightarrow \infty$, а также при фиксированном t и $z \rightarrow z_0, r \rightarrow 0$. В п. 5 выводятся используемые при этом интегральные представления для произведений функций Эйри.

2. Проверка начального условия. Подынтегральное выражение в (1.2) — решение уравнения (1.1), поэтому Γ при $t > 0$ — обобщенное решение этого уравнения. Очевидно, Γ удовлетворяет условию (1.3) и первому уравнению в (1.2), поэтому достаточно проверить выполнение второго условия в (1.2), т. е. что

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Gamma \Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} [(r^2 + (z + z_0)^2)^{-1/2} - (r^2 + (z - z_0)^2)^{-1/2}]$$

Если в интеграле, выражающем $\partial\Gamma/\partial t$ при $t = 0$, сделать замену переменных $p = \sigma^{1/2}\omega$; $q = \sigma\omega$, то формула (2.1) сведется к следующим соотношениям:

$$(2.2) \quad I_1 = \int_0^\infty H(p^2) F(p, qz) F(p, qz_0) dp = \frac{2}{3} \pi \exp[-q|z + z_0|] - \\ - 4 \int_0^\infty v\left(p^2 - \frac{qz}{p}\right) v\left(p^2 - \frac{qz_0}{p}\right) dp$$

$$(2.3) \quad I_2 = \int_0^\infty J_0(qr) dq \int_{-\infty}^\infty v\left(p^2 - \frac{qz}{p}\right) v\left(p^2 - \frac{qz_0}{p}\right) dp = \frac{\pi}{6} [r^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2}$$

Наметим доказательство этих формул. Учитывая, что $v(\xi) = (w_1(\xi) - w_2(\xi))/(2i)$, запишем I_1 в форме $I_{11} + I_{12}$, где

$$(2.4) \quad I_{11} = -4 \int_0^\infty v\left(p^2 - \frac{qz}{p}\right) v\left(p^2 - \frac{qz_0}{p}\right) dp$$

$$(2.5) \quad I_{12} = -4 \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^M w_2\left(p^2 - \frac{qz}{p}\right) w_2\left(p^2 - \frac{qz_0}{p}\right) \frac{v(p^2)}{w_2(p^2)} dp = \\ = -4 \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left[\int_0^{M \exp(\pi i/3)} + \int_{M \exp(\pi i/3)}^M \right] = -4 \lim_{M \rightarrow \infty} [I_{13} + I_{14}]$$

В интеграле I_{13} положим $p = s \exp(\pi i/3)$ и перейдем к интегрированию по s . Учитывая (D₁₃) из [3], получим

$$(2.6) \quad I_{13} = \int_0^M v\left(s^2 + \frac{qz}{s}\right) v\left(s^2 + \frac{qz_0}{s}\right) ds$$

Вычисляя I_{14} , воспользуемся следующей из [3] (с. 415—417) асимптотикой подынтегрального выражения в (2.5) при $|p| \rightarrow \infty$, $0 \leq \arg p \leq \pi/3$. В результате получим

$$(2.7) \quad I_{14} = -1/6 \pi \exp[-q|z + z_0|] + O(M^{-1})$$

Используя (2.6) и (2.7) для вычисления I_{12} и учитывая (2.4), получим (2.2).

Для доказательства равенства (2.3) следует, во-первых, провести интегрирование по области $-\infty < q < \infty$, $p > 0$ (что не изменит значения интеграла I_2), во-вторых, сделать замену $q = p\xi$ и, в-третьих, для произведения функций Эйри воспользоваться интегральным представлением (5.4) (п. 5). Проводя в получившемся интеграле интегрирование по p (учитывая, что $\operatorname{Im} \alpha > 0$ и используя формулу 6.728 из [4]), а затем по ξ и α , получим (2.3).

Таким образом, доказана формула (1.7) для функции Грина.

3. Асимптотика Γ при $t \rightarrow \infty$. Запишем Γ в форме

$$(3.1) \quad \Gamma(t, r, z, z_0) = \frac{1}{4\pi^2 B} \int_0^\infty \sin B\omega t \Psi(\omega) d\omega$$

$$(3.2) \quad \Psi(\omega) = \int_0^\infty \sigma^{1/2} J_0(\sigma\omega r) H(\sigma^{3/2}\omega^2) \Phi(z, \sigma, \omega) \Phi(z_0, \sigma, \omega) d\omega$$

Из формулы (3.1) видно, что асимптотика Γ при $t \rightarrow \infty$ определяется, во-первых, вкладом $f_0(t)$ в интеграл (3.1) от границы интервала интегрирования и, во-вторых,

вкладом $f_1(t)$ в (3.1) от особых точек функции $\Psi(\omega)$:

$$(3.3) \quad \Gamma(t, r, z, z_0) \approx f_0(t) + f_1(t)$$

Покажем, что при $t \rightarrow \infty$ функция $f_0(t)$ стремится к нулю быстрее t^{-1} . Для этого достаточно проверить, что

$$(3.4) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \Psi(\omega) = 0$$

При вычислении этого предела можно положить $\sigma^{2/3}\omega^2 = 0$, т. е. рассматривать интеграл

$$(3.5) \quad \Psi_1(\omega) = \int_0^\infty \sigma^{1/3} J_0(\sigma\omega r) \Phi(z, \sigma, 0) \Phi(z_0, \sigma, 0) d\sigma$$

Строгое доказательство этого утверждения опускаем из-за его громоздкости, а здесь лишь заметим, что при $\omega \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл (3.2) дает интервал $0 < \sigma < \omega^{-1/3}$, а в пределах этого интервала $\sigma^{2/3}\omega^2 \rightarrow 0$. С выписанным интегралом сделаем следующие преобразования. Во-первых, введем под знак интеграла множитель $\exp(-q\sigma)$ и будем рассматривать предел полученного выражения при $q \rightarrow 0$. Во-вторых, воспользуемся для $J_0(\sigma\omega r)$ интегральным представлением [4] (формула 8.44 (1)). Наконец, в-третьих, для входящих в (3.5) попарных произведений функций Эйри воспользуемся интегральными представлениями (5.1)–(5.3), в которых положим $\alpha = \sigma^{1/3}\beta$. Проведя интегрирование по σ , а затем последовательно переходя к пределу при $q \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$, получим обращающуюся в нуль сумму трех однократных контурных интегралов, откуда и следует (3.4).

Найдем теперь функцию $f_1(t)$ — вклад в асимптотику интеграла (3.1) от особых точек функции $\Psi(\omega)$. Аналогичная задача была рассмотрена в [1] для приближенной функции Грина $G(t, r, z, z_0)$, которую можно записать в форме, аналогичной (3.1):

$$(3.6) \quad G = - \int_0^\infty \sin B\omega t F(\omega) d\omega$$

$$(3.7) \quad F(\omega) = \frac{1}{\pi^2 B} \int_0^\infty \sigma^{1/3} J_0(\sigma\omega r) v(\sigma^{2/3}(\omega^2 - z)) v(\sigma^{2/3}(\omega^2 - z_0)) d\sigma$$

Функция $\Psi(\omega)$ имеет те же особые точки, что и $F(\omega)$. Действительно, полагая $w_{1,2}(\xi) = u(\xi) \pm iv(\xi)$ и используя известную асимптотику функций $u(\xi)$, $v(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$, можно записать разность $F(\omega) - \Psi(\omega)$ (где $\Psi(\omega)$ имеет вид (3.2)) в форме интеграла по σ , подынтегральное выражение в котором экспоненциально убывает при $\sigma \rightarrow \infty$ равномерно по ω (при ограниченном снизу ω). Поэтому $F(\omega) - \Psi(\omega)$ — аналитическая функция ω при $\omega > 0$, откуда и следует, что вклад в асимптотику Γ от особых точек $\Psi(\omega)$ совпадает с вкладом в асимптотику G от особых точек $F(\omega)$. Используя и уточняя результаты п. 4 из [1], получим, что при $t \rightarrow \infty$ функция Γ имеет следующую асимптотику:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} &\text{при } r\sqrt{z_-} < \frac{2}{3}(z_+ - z_-)^{3/2} \\ &\Gamma(t, r, z, z_0) = o(t^{-1}) \end{aligned}$$

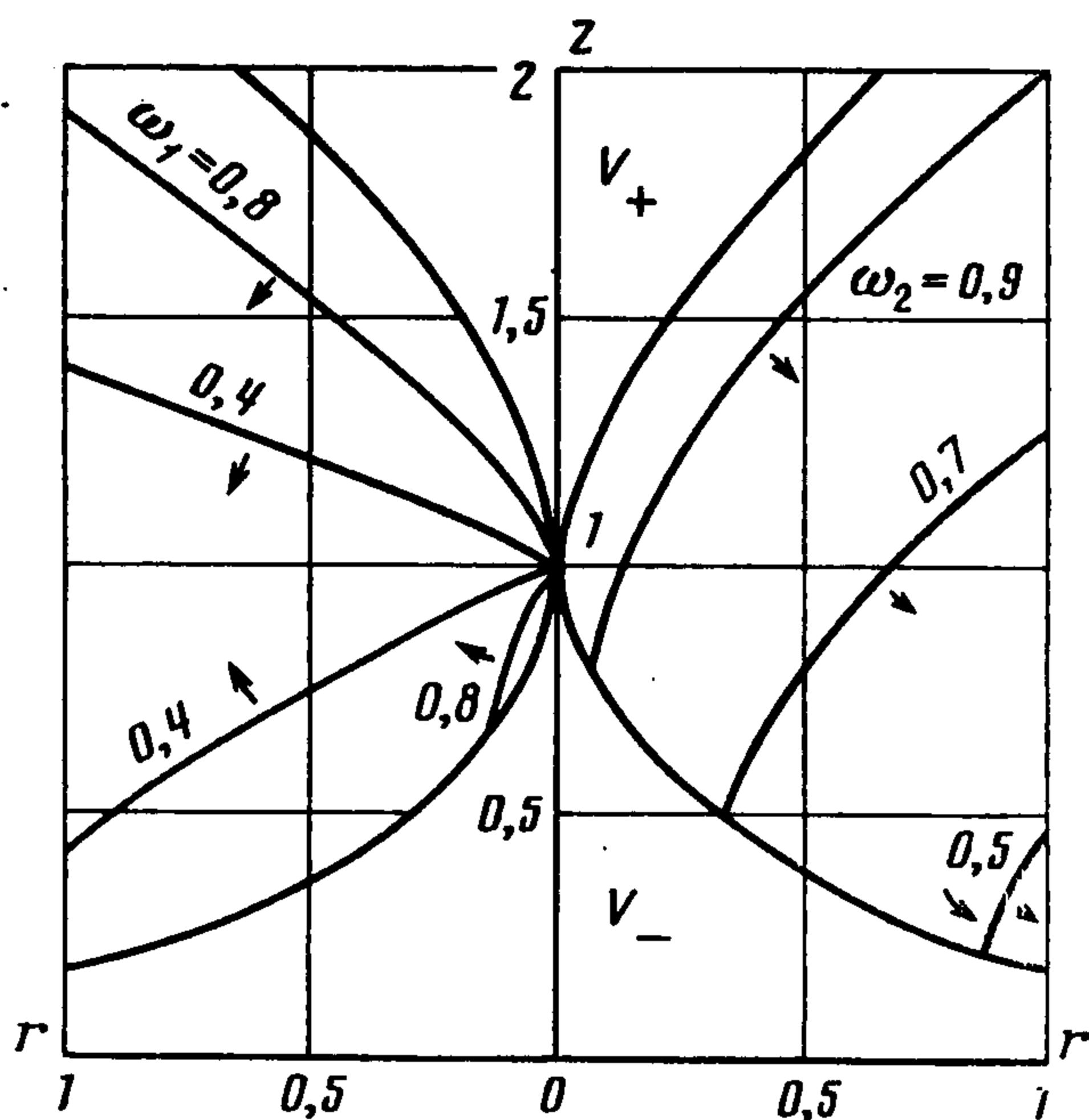
$$(3.9) \quad \begin{aligned} &\text{при } r\sqrt{z_-} > \frac{2}{3}(z_+ - z_-)^{3/2} \\ &\Gamma(t, r, z, z_0) \approx (\omega_1 t)^{-1/2} A(r, z, z_0, \omega_1) \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + (\omega_2 t)^{-1/2} A(r, z, z_0, \omega_2) \sin\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-3/2}) \end{aligned}$$

Здесь $\omega_{1,2} = \omega_{1,2}(r, z, z_0)$ — корни уравнения

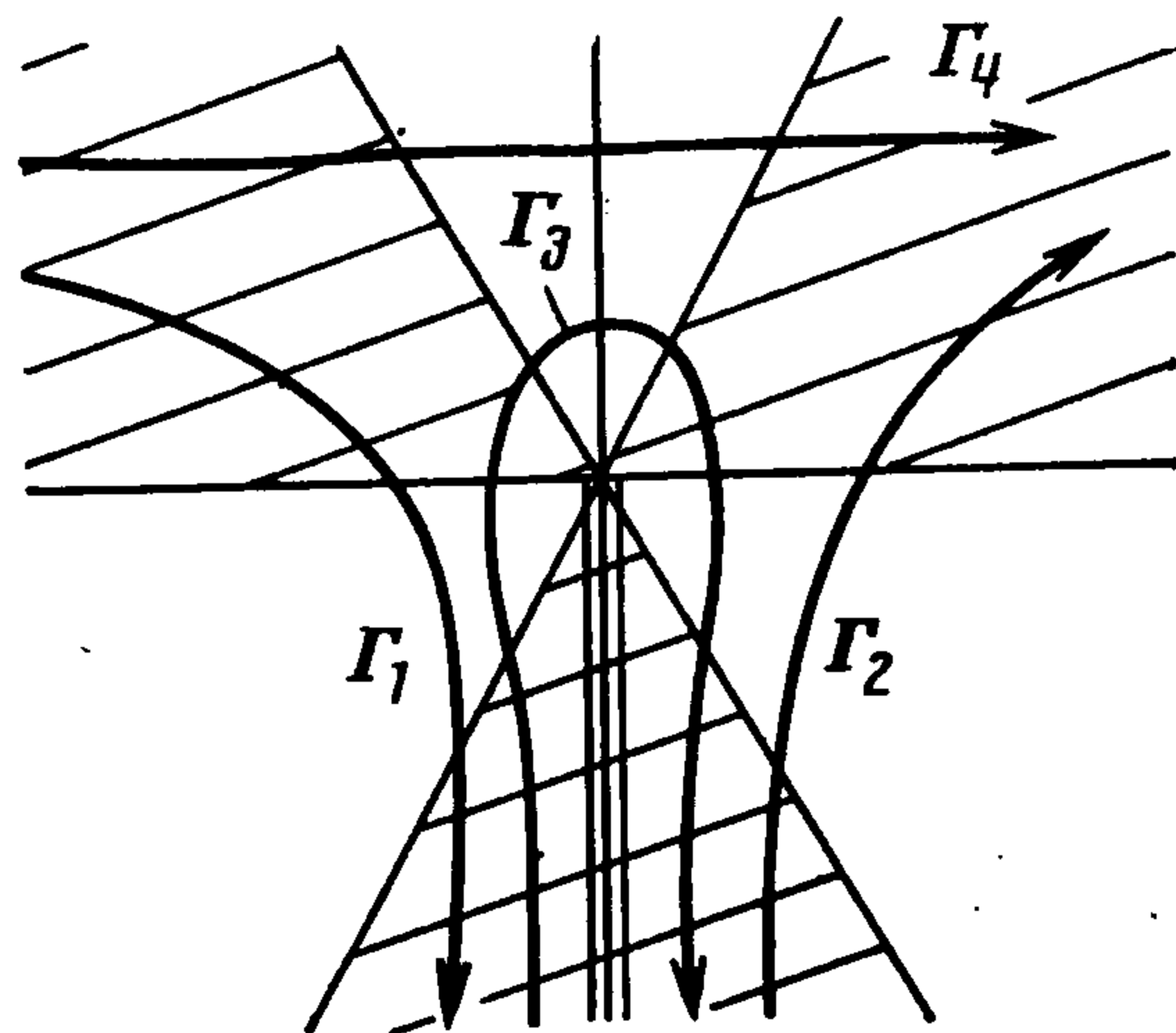
$$r\omega_{1,2} = \frac{2}{3B^2} [(B^2 z_+ - \omega_{1,2}^2)^{3/2} \mp (B^2 z_- - \omega_{1,2}^2)^{3/2}]$$

$$z_- = \min(z, z_0), \quad z_+ = \max(z, z_0)$$

$$A(r, z, z_0, \omega) = (2\pi)^{-3/2} [(B^2 z - \omega^2)(B^2 z_0 - \omega^2)]^{-1/4} \left[\frac{1}{r\omega} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right]^{1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Прокомментируем полученные результаты. Область $r\sqrt{z_-} < 2/3(z_+ - z_-)^{3/2}$ образует две воронки V_+ и V_- , выходящие из точки $r = 0; z = z_0$ (см. фиг. 1, где $B = 1, z_0 = 1$). Внутри этих воронок функция Грина не осциллирует и убывает быстрее t^{-1} . Вне воронок она убывает как $t^{-1/2}$ и состоит из двух осциллирующих слагаемых, характерный период осцилляций которых стремится к нулю, как t^{-1} . Гребни волн этих слагаемых задаются формулами

$$(3.10) \quad \omega_{1,2}(r, z, z_0) = (n \pm 1/4) \pi / (Bt) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

т. е. совпадают с линиями уровня функций ω_1, ω_2 . Эти линии уровня показаны на фиг. 1: правее оси $r = 0$ — для функции ω_2 и левее — для функции ω_1 . С увеличением t гребни каждого из слагаемых в (3.9) движутся в сторону убывания $\omega_{1,2}$, т. е. в направлениях, показанных стрелками на фиг. 1.

Положим $z_0 = N^2/B^2$ и устремим B к нулю при фиксированных $t, r, z - z_0$. Тогда $\Gamma(t, r, z, z_0)$ будет стремиться к функции Грина $\Gamma_0(t, r, z - z_0)$ уравнения внутренних волн для постоянной частоты плавучести N . При этом предельном переходе воронки V_+ и V_- стягиваются к оси $r = 0$, функция $\omega_2(r, z, z_0)$ стремится к N ; ω_1 — к $N |\cos \theta|$ (где $\text{ctg } \theta = |z - z_0|/r$), а (3.9) переходит в известную [5] асимптотику функции Γ_0 при $t \rightarrow \infty$.

4. Асимптотика Γ при $r > 0, z \rightarrow z_0$. При $N = \text{const}$ функция Грина $\Gamma_0(t, r, z - z_0)$ имеет вид [5]

$$\Gamma_0 = \frac{-1}{2\pi^2 \rho} \int_{N \cos \theta}^N \frac{\sin \omega t d\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 - N^2 \cos^2 \theta}}$$

$$\rho = (r^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}, \quad \cos \theta = |z - z_0|/\rho$$

т. е. имеет сингулярность при $\rho \rightarrow 0$. Покажем что построенная выше функция Грина Γ имеет при $r \rightarrow 0, z \rightarrow z_0$ ту же сингулярность, что и Γ_0 , если в качестве частоты Брента — Вайсяля N взять ее значение $B\sqrt{z_0}$ на горизонте источника $z = z_0$:

$$(4.1) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \Gamma = - \frac{1}{2\pi^2 B} \int_{\sqrt{z_0} \cos \theta}^{\sqrt{z_0}} \frac{\sin B\omega t d\omega}{\sqrt{z_0 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 - z_0 \cos^2 \theta}}$$

Чтобы доказать (4.1), заметим, что выражающаяся формулами (3.6), (3.7) приближенная функция Грина G имеет при $\rho \rightarrow 0$ ту же сингулярность, что и Γ . Действительно, эта сингулярность обусловлена плохой сходимостью при $\sigma, \omega \rightarrow \infty$ интегралов, выражающих Γ и G , а их разность описывается интегралом, сходящимся при $\sigma, \omega \rightarrow \infty$ абсолютно и равномерно по r, z, z_0 . Поэтому достаточно найти предел ρG .

Положим $r = \rho \sin \theta; z - z_0 = \rho \cos \theta$ и будем искать предел ρG при $\rho \rightarrow 0$ и фиксированном θ . Используем для G формулы (3.6), (3.7), а для произведения функции Эйри — формулу (5.4), после чего проведем замену переменных $p = \sigma r; q = \alpha \sigma^{-1/3} r^{-1}$ и перейдем к пределу при $r \rightarrow 0; z \rightarrow z_0$. Проведя в получившемся выражении интегрирование по q и затем по p , получим (4.1).

5. Интегральные представления для произведений функций Эйри. Положим

$$I_k = -\pi^{-1/2} e^{\pi i/4} \int_{\Gamma_k} \exp iF(\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}$$

$$F(\alpha) = \alpha^3/12 + \alpha(p+q)/2 - (p-q)^2/(4\alpha)$$

где контуры Γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) показаны на фиг. 2. Справедливы следующие соотношения:

$$(5.1) \quad w_1(p) w_1(q) = I_1$$

$$(5.2) \quad w_2(p) w_2(q) = I_2$$

$$(5.3) \quad w_1(p) w_2(q) + w_2(p) w_1(q) = -I_3$$

$$(5.4) \quad 4v(p) v(q) = -I_4$$

Чтобы доказать (5.1)–(5.4), заметим, что каждый из интегралов I_k удовлетворяет уравнению Эйри как по переменной p , так и по переменной q . Действительно, применяя к I_k операторы $d^2/dp^2 - p$ или $d^2/dq^2 - q$, получаем под знаком интеграла полный дифференциал от функции $i\alpha^{-1/2} \exp iF(\alpha)$. Учитывая, что I_k симметричны по p , q , получаем

$$(5.5) \quad I_k = \gamma_k w_1(p) w_1(q) + \omega_k [w_1(p) w_2(q) + w_2(p) w_1(q)] + \delta_k w_2(p) w_2(q)$$

Чтобы найти постоянные γ_k , ω_k , δ_k , положим $p = -m^2$, $q = -n^2$, $m > n \gg 1$ и приравняем асимптотику правой части в (5.5) к найденной методом перевала асимптотике интегралов I_k . В результате получим формулы (5.1)–(5.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Анютин А. П., Боровиков В. А. Эволюция локализованных возмущений стратифицированной жидкости с переменной частотой Брента — Вайсяля // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 863–867.
2. Фок В. А. Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио. 1970. 517 с.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах диффракции коротких волн. М.: Наука. 1972. 456 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.
5. Секерж-Зенькович С. Я. Фундаментальное решение оператора внутренних волн // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. № 2. С. 286–289.

Москва

Поступила в редакцию
29.V.1987

УДК 539.3 : 534.1

О ФОРМИРОВАНИИ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Чугайнова А. П.

Изучаются движения в виде плоских нелинейных квазипоперечных волн в слабореизотропной упругой среде. Ранее [1–3] была рассмотрена автомоделная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства. Решение указанной автомоделной задачи в некоторой области задаваемых параметров оказалось неединственным (2 решения). В связи с этим возникает вопрос, в каких случаях реализуется одно или другое решение в области неединственности. Вопрос выбора единственного решения обсуждался в ряде работ [4–8]. В частности, для отбора решения требовалось условие существования структуры [6–8]. Исследование структуры разрывов в автомоделной задаче о действии внезапно приложенной нагрузки на границу упругого полупространства [9] показало, что все разрывы, содержащиеся в решениях (ког-