Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 532. 546

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАКОНАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Домбровский Г. А.

Предлагаются новые законы нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости (в том числе и законы фильтрации с предельным градиентом [1]), позволяющие при решении плоских стационарных задач пользоваться аппаратом теории функций комплексного переменного. Отмечаются некоторые известные частные случаи.

1. Рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости. Пусть $z = x + iy$ — плоскость течения, v — модуль вектора скорости фильтрации, θ — угол наклона вектора скорости фильтрации к оси x, ψ — функция тока, $\varphi = -H + \text{const}$, где H — напор, $\Phi(v)$ — функция, характеризующая закон фильтрации [2]. Приняв в качестве независимых переменных v и θ, будем иметь для функций $\varphi(v, \theta)$, $\psi(v, \theta)$ систему уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Phi^2(v)}{v\Phi'(v)}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\Phi(v)}{v^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

которую можно получить, например, из условия интегрируемости правой части дифференциального соотношения

$$dz = e^{i\theta}\left[\frac{d\varphi}{\Phi(v)} + \frac{i\,d\psi}{v}\right]$$

выражающего смысл функций Φ и ψ.

Если, согласно равенствам

$$L = \frac{\Phi(v)}{v}\sqrt{\frac{\Phi(v)}{v\Phi'(v)}}, \quad \sigma = \int\sqrt{\frac{\Phi'(v)}{v\Phi(v)}}\,dv \tag{1.1}$$

ввести функцию L и вместо v — независимое переменное σ, то придем к основной системе в канонической форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = L\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = -L\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$$

Из равенств (1.1) следуют соотношения

$$-L\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\Phi}\right) = \frac{1}{v}, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{v}\right) = -L\frac{1}{\Phi} \tag{1.2}$$

которые при заданной функции $L(\sigma)$ будем рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $1/\Phi(\sigma)$ и $1/v(\sigma)$.

2. Примем условие

$$L(\sigma) = n^2 \operatorname{cth}^2 m\sigma \quad (m, n = \text{const})$$

В этом случае решение основной системы допускает, как известно [3], представление

$$\varphi = \operatorname{Re}\{n(mF - \operatorname{cth} m\sigma F')\} \tag{2.1}$$

$$\psi = \operatorname{Im}\{n^{-1}(mF - \operatorname{th} m\sigma F')\}$$

где F — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\tau = \sigma - i\theta$. Полезно и несколько иное представление, отличающееся от (2.1) знаком правой части одного из соотношений и заменой аргумента функции F на $\omega = \sigma + i\theta$ ($\omega = \bar{\tau}$).

В результате решения системы (1.2) имеем

$$\Phi = \frac{Bne^{\sigma}}{Ae^{2\sigma}(\operatorname{th} m\sigma - m) + (\operatorname{th} m\sigma + m)}$$

$$v = \frac{Be^{\sigma} \operatorname{th} m\sigma}{n\,[Ae^{2\sigma}(m \operatorname{th} m\sigma - 1) + (m \operatorname{th} m\sigma + 1)]}$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Эти функции определяют параметрически (параметр σ) два представляющих интерес семейства законов нелинейной фильтрации с произвольными постоянными m, n, A и B (параметры семейств). Законы одного из семейств получаем, когда σ изменяется в окрестности $\sigma = -\infty$, законы другого семейства — когда σ изменяется в правой окрестности точки $\sigma = 0$. Кривые, изображающие в плоскости $v\Phi$ законы первого семейства, выходят из начала координат. При $\sigma = -\infty$ выполняются равенства $v = 0$, $\Phi = 0$, $d\Phi/dv = n^2$. Законы второго семейства являются законами фильтрации с предельным градиентом. При $\sigma = 0$ выполняются равенства

$$v = 0, \quad \Phi = Bn/[m\,(1 - A)], \quad d\Phi/dv = 0$$

Успех при решении задач нелинейной фильтрации методом годографа во многом зависит от того, насколько простым является переход от переменных годографа к переменным x, y физической плоскости течения. Из дифференциального соотношения п. 1 получена следующая удобная формула перехода, соответствующая представлению (2.1) решения основной системы:

$$z = -P_{+}(\sigma)\, e^{-\tau}F'(\tau) - P_{-}(\sigma)\, \overline{e^{\tau}F'(\tau)} +$$

$$+ \frac{m^2 - 1}{B}\left[\int e^{-\tau}F'(\tau)\, d\tau - A \overline{\int e^{\tau}F'(\tau)\, d\tau}\right]$$

$$P_{\pm}(\sigma) = \frac{e^{\pm\sigma}}{2}\left(\frac{n \operatorname{cth} m\sigma}{\Phi} \pm \frac{\operatorname{th} m\sigma}{nv}\right)$$

Определение координат физической плоскости течения сведено, таким образом, к вычислению интегралов от функций комплексного переменного τ.

Формула перехода, соответствующая представлению решения основной системы через функцию $F(\omega)$, имеет аналогичный вид.

Замечание. Если заменить m на im и n на in, то получим формулы, соответствующие условию $L(\sigma) = n^2 \operatorname{ctg}^2 m\sigma$. Затем очевидным образом можно записать все необходимые формулы, соответствующие условиям $L(\sigma) = n^2 \operatorname{tg}^2 m\sigma$, $L(\sigma) = n^2 \operatorname{th}^2 m\sigma$.

3. Обратим внимание на некоторые частные случаи приведенных в п. 2 и полученных из условия $L(\sigma) = n^2 \operatorname{cth}^2 m\sigma$ результатов.

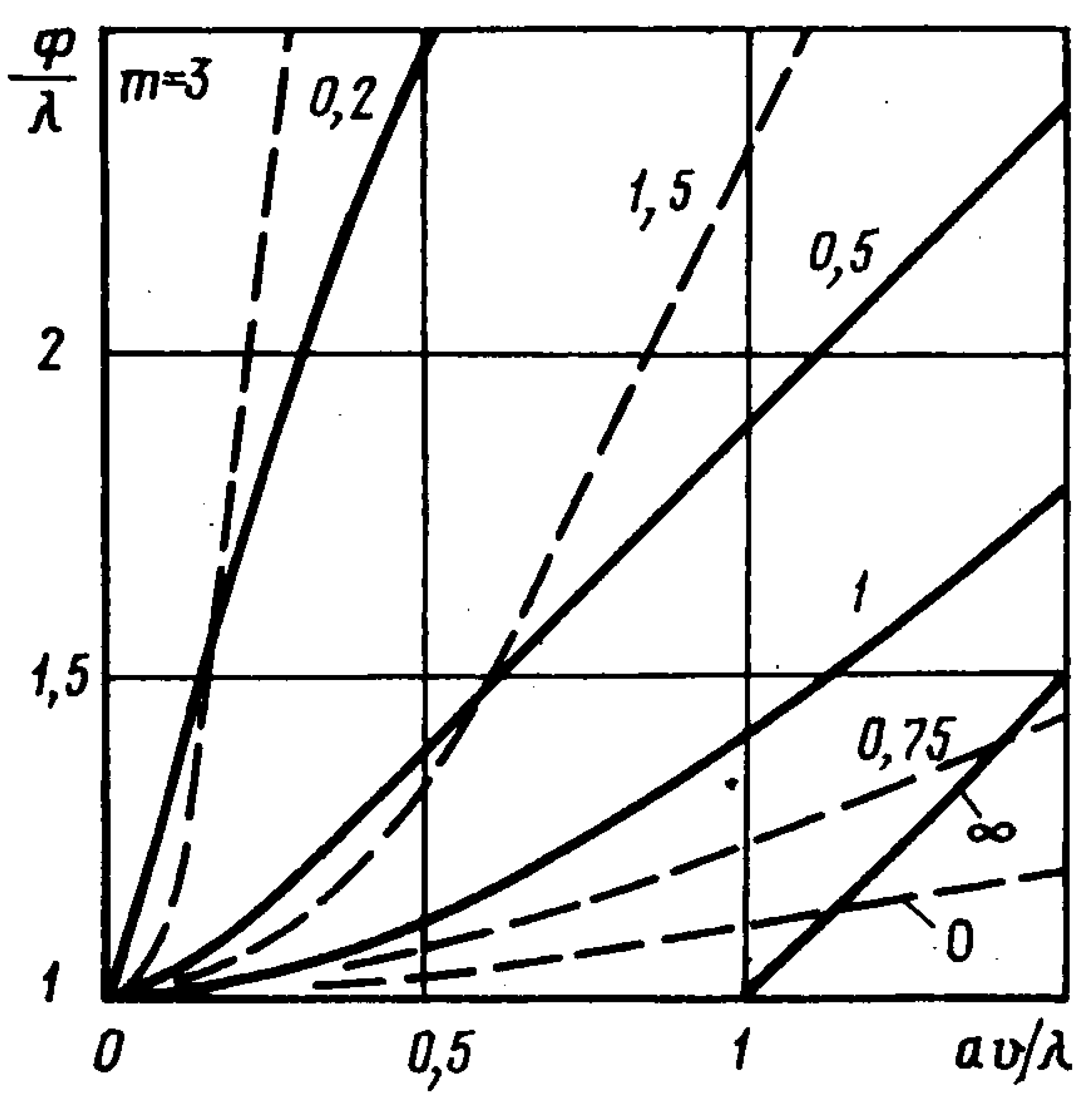
1°. Сделаем замену F на F/m, B на mB и устремим m к бесконечности. В пределе придем к формулам, вытекающим из условия $L = n^2 = \mathrm{const}$. Метод решения задач нелинейной фильтрации, основанный по существу на таком условии, был предложен в [4] (σ изменяется в окрестности $\sigma = -\infty$). Случай $L = \mathrm{const}$ рассматривался также в работе [5], где дополнительно указан закон фильтрации, отличный от принятого в [4].

2°. Заменим n на mn и устремим m к нулю. В пределе получим все формулы для случая $L(\sigma) = n^2/\sigma^2$. Исследование законов фильтрации для этого случая проводилось в [5].

3°. Пусть $A = 0$, $B = \lambda m/n$, $n^2 = a$. При $\sigma \geqslant 0$ будем иметь известное [6, 7] семейство законов фильтрации с предельным градиентом

$$\frac{\Phi}{\lambda} = \frac{me^{\sigma}}{\operatorname{th} m\sigma + m}, \quad \frac{av}{\lambda} = \frac{me^{\sigma}}{\operatorname{cth} m\sigma + m} \tag{3.1}$$

На фигуре сплошными линиями изображены, согласно этим формулам, зависимости Φ/λ от av/λ для некоторых значений параметра m. Случай $m = 1$, отличающийся особенно простой формулой перехода, впервые был рассмотрен в [8]. Характерным является также случай $m = \infty$. В пределе при $m \to \infty$ приходим к формулам метода, предложенного в [9]. Чтобы получить в результате предельного перехода выражения для φ и ψ, а также формулу перехода, следует предварительно сделать замену F на F/m.



4°. Положим $A = 0$, $B = \lambda m/n$, $n^2/m^2 = a$. Получим соотношения, отличающиеся от (3.1) заменой во втором равенстве множителя m на m^{-1}. Кривые, рассчитанные по этим формулам при разных m, представлены на фигуре штрихами. При $m = 0$ имеем закон

$$\frac{\Phi}{\lambda} = \frac{e^{\sigma}}{\sigma + 1}, \quad \frac{av}{\lambda} = \sigma e^{\sigma}$$

приложенный к решению некоторых задач фильтрации с предельным градиентом в [10—12]. Кривая, изображающая этот закон, содержит точку перегиба с координатами $av/\lambda = \sqrt{e}/2$, $\Phi/\lambda = 2\sqrt{e}/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернадинер М. Г., Ентонв В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука. 1975. 199 с.
2. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 33—52.
3. *Домбровский Г. А.* Метод аппроксимаций адиабаты в теории плоских течений газа. М.: Наука. 1964. 158 с.
4. *Соколовский В. В.* О нелинейной фильтрации грунтовых вод // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 5. С. 525—536.
5. *Ильинский Н. Б., Фомин В. М., Шешуков Е. Г.* О нелинейных законах фильтрации специального вида и решении краевых задач // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1972. Вып. 9. С. 92—102.
6. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* О решении задач фильтрации с предельным градиентом // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 940—946.
7. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* Об одной плоской стационарной задаче нелинейной фильтрации с предельным градиентом // Вестн. Харьк. ун-та. 1985. № 277. С. 3—6.
8. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. 177—181.
9. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 166—169.
10. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* Об одном законе фильтрации с предельным градиентом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983 № 3. С. 83—85.
11. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* Решение одной задачи фильтрации с предельным градиентом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 76—78.
12. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* Точное решение одной задачи теории фильтрации с предельным градиентом // Вестн. Харьк. ун-та. 1986. № 286. С. 3—7.

Харьков

Поступила в редакцию
20.X.1987