

УДК 539.3

О ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, НАГРЕВАЕМОМ КОНЦЕНТРИРОВАННЫМ ПОТОКОМ ЭНЕРГИИ

Германович Л. Н., Килль И. Д., Цодокова Н. С.

Получено точное решение задачи и вместе с ним простое и удобное для расчетов при малых временах приближенное решение (погрешность его оценена), справедливое для любых коэффициентов поглощения. В частном случае нулевого коэффициента поглощения решение упрощается и может быть записано в элементарных функциях (приведен пример). В этом случае выявлены новые качественные особенности поля напряжений, не присущие другим способам нагрева полупространства. Для достаточно больших коэффициентов поглощения (дан критерий) удалось получить еще более простое и удобное для расчетов замкнутое решение, которое также может выражаться (приведен пример) в элементарных функциях. В случае как больших, так и малых коэффициентов поглощения поле напряжений проанализировано и построены его изолинии.

Под действием концентрированного потока энергии (лазерного луча, электронного пучка и т. п.) в твердом теле в ряде случаев возникают температурные напряжения, которые могут быть причиной его хрупкого разрушения [1—5]. Ниже температурные напряжения в облучаемом теле изучаются на основе широко распространенной модели упругого полупространства (например, [2—7]). Предполагается, что в полупространстве действуют внутренние распределенные источники тепла, плотность которых убывает с глубиной экспоненциально (закон Бугера [5, 8]). На границе полупространства происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Эта модель представляется наиболее адекватной и позволяет определять термоупругие напряжения как на больших глубинах, так и на глубинах порядка характерного масштаба поглощения и меньших.

Плоская задача термоупругости для полупространства с источниками тепла решалась в [9]. Однако реальные энергетические пучки обладают обычно осевой симметрией. В [3] температура и термоупругие напряжения в полупространстве для случая равномерного распределения энергии в поперечном сечении цилиндрического пучка находились численным интегрированием двойных несобственных интегралов, в виде которых представлено точное решение. Попытка построения приближенного решения для случая осесимметричного гауссова распределения энергии в поперечном сечении пучка, больших коэффициентов поглощения и малых времен нагрева была предпринята в [7], где решение построено в виде рядов по системе гипергеометрических функций. Представляет интерес решение задачи для общего случая, поскольку реальное распределение энергии может быть далеким от равномерного и гауссова [10, 11], а коэффициент поглощения часто невелик (для прозрачных материалов). Кроме того, весьма желательно иметь такое простое приближенное решение, погрешность которого контролируется.

1. В цилиндрических координатах r, φ, z рассмотрим упругое полупространство $z \geq 0$, на границе которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой $z < 0$, имеющей нулевую температуру. С момента времени $t = 0$ в полупространстве действуют распределенные источники тепла с плотностью $q = q_0 f(r) e^{-\gamma z}$, причем функция $f(r)$ допускает преобразование Ганкеля и область ее значений — отрезок $[0, 1]$. Требуется найти температурное поле и поле напряжений внутри полупространства, начальная температура которого $T = 0$.

Переходя к безразмерным величинам

$$(1.1) \quad T' = \frac{Tk}{q_0 \delta^2}, \quad r' = \frac{r}{\delta}, \quad z' = \frac{z}{\delta}, \quad h' = h\delta, \quad \gamma' = \gamma\delta, \quad t' = \frac{at}{\delta^2}$$

где a — коэффициент температуропроводности, k — коэффициент теплопроводности, h — относительный коэффициент теплоотдачи, δ — произвольный линейный размер, и опуская для краткости штрихи при написании безразмерных величин, получим краевую задачу теплопроводности

$$(1.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + f(r) e^{-\gamma z}; \quad T|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = hT|_{z=0}$$

$$|T(r, z, t)| < \infty \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Применяя к (1.2) преобразования Лапласа по t и Ганкеля по r , получаем краевую задачу, решая которую и обращая преобразование Ганкеля, находим

$$(1.3) \quad T^*(r, z, s) = - \int_0^\infty F(z, \lambda, s) \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$F(z, \lambda, s) = \frac{(h + \gamma) e^{-\omega z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)(h + \omega)} - \frac{e^{-\gamma z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)}, \quad \omega = \sqrt{s + \lambda^2}$$

$$T^* = L_s[T] = \int_0^\infty T(r, z, t) e^{-st} dt, \quad f^H(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_0(\lambda r) dr$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода.

Изображения напряжений найдем методом термоупругого потенциала перемещений ([12], с. 21). Рассмотрим сначала некоторые общие вопросы. Пусть уравнение теплопроводности имеет вид $\partial T / \partial t = a \Delta T + Q(M, t)$, где под M понимается точка нагреваемого тела (совокупность координат) и для общности используются размерные величины. Известное представление термоупругого потенциала ([13], с. 484) не позволяет непосредственно использовать весьма удобный метод Паркуса ([12], с. 43). Возможна, однако, комбинация идей ([12], с. 43, [13], с. 484). Следуя ([13], с. 484), представим термоупругий потенциал в виде

$$(1.4) \quad \Phi = m \int_0^t (aT + \Psi) dt + \Phi_0 + \Phi_1 t, \quad m = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

где функции $\Psi(M, t)$, $\Phi_0(M)$ и $\Phi_1(M)$ удовлетворяют, соответственно, уравнениям $\Delta \Psi = Q$, $\Delta \Phi_0 = mT_0$, $\Delta \Phi_1 = 0$, T_0 — температура в полупространстве в начальный момент $t = 0$, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения. По сравнению с представлением в [13] в (1.4) добавлено слагаемое $\Phi_1 t$. Аналогично сделанному ранее ([12], с. 26, 27), можно показать, что это допустимо. Применяя теперь к (1.4) преобразование Лапласа и используя известные соображения ([12], с. 43), находим следующее представление термоупругого потенциала в общем случае:

$$(1.5) \quad \Phi^*(M, s) = \{m [a (sT^* - T_\infty) + s\Psi^* - \Psi_\infty] + s\Phi_0\} s^{-2}$$

$$T_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sT^*, \quad \Psi_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s\Psi^*$$

Возвращаясь к рассматриваемому случаю, можно положить $\Phi_0 = 0$ (так как $T_0 = 0$). Поскольку теперь Ψ не зависит от времени, то $\Psi^* = \Psi/s$, $\Psi_\infty = \Psi$. Отсюда и из (1.5) следует, что представление изображения термоупругого потенциала Паркуса справедливо в частном случае не зависящей от времени плотности внутренних источников тепла (и нулевой начальной температуры). Используя его (т. е. (1.5) при $s\Psi^* = \Psi_\infty$, $\Phi_0 =$

= 0), получаем

$$(1.6) \quad \Phi^*(r, z, s) = \frac{m(sT^* - T_\infty)}{s^2}, \quad T_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sT^*$$

Возвращаясь вновь к безразмерным величинам (1.1) и подставляя (1.3) в (1.6), находим

$$(1.7) \quad \Phi^* = -m \int_0^\infty \left\{ \frac{(h+\gamma)e^{-\omega z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} + \frac{e^{-\gamma z}}{s(\lambda^2 - \gamma^2)(\omega^2 - \gamma^2)} + \right. \\ \left. + \frac{(h+\gamma)e^{-\lambda z}}{s^2(\lambda^2 - \gamma^2)(h+\lambda)} \right\} \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

Изображения напряжений, соответствующих (1.7), находим по формулам (1.32) из [12]. Чтобы удовлетворить граничным условиям

$$(1.8) \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_{rz}|_{z=0} = 0$$

полученное таким образом решение следует сложить с дополнительным «бестемпературным» решением. Оно определяется при помощи бигармонической функции Лява

$$(1.9) \quad L^*(r, z, s) = \int_0^\infty [A(s, \lambda)z + B(s, \lambda)] J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

по формулам (8.10) из [14].

Окончательно для изображений искомых напряжений имеем (G — модуль сдвига)

$$(1.10) \quad \frac{\sigma_{rr}^*}{D} = -T^* + \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda F(z, \lambda, s)}{s} + [2h + (1 - hz)\lambda - z\lambda^2] \frac{F(0, \lambda, s)}{s} e^{-\lambda z} + \xi \left[\frac{1}{s} (\lambda e^{-\gamma z} - (2\gamma - \lambda - \lambda\gamma z + \lambda^2 z) e^{-\lambda z}) + \frac{2 - \lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} + \lambda F_1(z, \lambda) \right] \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - \\ - \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda F(z, \lambda, s)}{s} + [2h(1 - \nu) + (1 - 2\nu - hz)\lambda - z\lambda^2] \frac{F(0, \lambda, s)}{s} e^{-\lambda z} + \xi \left[\frac{1}{s} (\lambda e^{-\gamma z} + [2\gamma(\nu - 1) + (\gamma z + 1 - 2\nu)\lambda - z\lambda^2] e^{-\lambda z}) + \frac{2 - 2\nu - \lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} + \lambda F_1(z, \lambda) \right] \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} d\lambda \\ \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^*}{D} = -T^* + 2\nu \int_0^\infty \left\{ \frac{(h+\lambda)F(0, \lambda, s)}{s} e^{-\lambda z} - \xi \left(\frac{\gamma - \lambda}{s} - \frac{1}{\lambda + \gamma} \right) e^{-\lambda z} \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda + \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda F(z, \lambda, s)}{s} + [2h(1 - \nu) + (1 - 2\nu - hz)\lambda - z\lambda^2] \frac{F(0, \lambda, s)}{s} e^{-\lambda z} + \xi \left[\frac{2 - 2\nu - \lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} - \frac{1}{s} [2\gamma(1 - \nu) - (1 - 2\nu + \gamma z)\lambda + z\lambda^2] e^{-\lambda z} + \frac{\lambda}{s} e^{-\gamma z} + \lambda F_1(z, \lambda) \right] \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} d\lambda \\ \frac{\sigma_{zz}^*}{D} = \int_0^\infty \left\{ -\frac{\lambda F(z, \lambda, s)}{s} + \lambda(1 + hz + \lambda z) \frac{F(0, \lambda, s)}{s} e^{-\lambda z} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \xi \left[\frac{\lambda(1 - \gamma z + \lambda z)}{s} e^{-\lambda z} - \frac{\lambda}{s} e^{-\gamma z} + \frac{\lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} + \right. \\
& \left. + \lambda F_1(z, \lambda) \right] \lambda^2 f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\
\frac{\sigma_{rz}}{D} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{hF(z, \lambda, s)}{s} - (h - h\lambda z - z\lambda^2) \frac{F(0, \lambda, s)}{s} e^{-\lambda z} - \right. \\
& - \xi \left[\frac{h + \gamma}{s} e^{-\omega z} - \frac{\gamma - \gamma z \lambda + z\lambda^2}{s} e^{-\lambda z} - \frac{h}{s} e^{-\gamma z} - \frac{\lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} + \right. \\
& \left. \left. + \gamma F_1(z, \lambda) \right] \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\
F_1(z, \lambda) &= \frac{e^{-\gamma z} - e^{-\lambda z}}{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad \xi = \frac{1}{s(s + \lambda^2 - \gamma^2)}, \quad D = 2mGq_0 \frac{\delta^2}{k}
\end{aligned}$$

Обращение изображений (1.10) можно выполнить, пользуясь таблицами из ([15], с. 254, 257). Для построенного таким образом точного решения должна быть проведена проверка равномерной сходимости интегралов, что было сделано в приводимом ниже примере. Отметим, что для существования преобразования Ганкеля $f^H(\lambda)$ и его обращения достаточно, чтобы $f(r)$ была функцией ограниченной вариации, абсолютно интегрируемой на полупрямой $[0, +\infty[$ ([16], с. 258). В физических задачах это требование, по-видимому, всегда выполняется.

2. Формулы полученного выше точного решения не всегда удобны для практических расчетов вследствие их сложности и наличия устранимых разрывов.

При исследовании процессов, происходящих при интенсивном нагреве концентрированными потоками энергии, особый интерес представляет получение простой формы решения для малых значений времени нагрева. Полное асимптотическое разложение решения при $t \rightarrow 0$ можно получить методом, разработанным в [17]. Ограничимся здесь получением простого асимптотического представления решения при $t \rightarrow 0$, являющегося нулевым членом разложения в методе [17].

Отметим, что одной из первых работ, посвященных построению приближенного решения при малых временах, явилась статья [18]. Ниже используется метод [17] по той причине, что он позволяет явным образом оценить погрешность получаемого приближенного решения.

Метод выделения главных членов асимптотики решения продемонстрируем на примере σ_{rz} .

Обозначая L_t^{-1} оператор, обратный L_s (t — аргумент оригинала), и используя сначала теорему об интегрировании оригинала, а затем формулу Тейлора, находим

$$\begin{aligned}
(2.1) \quad L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda^2 - \gamma^2)} \right\} &= \\
&= t - \frac{1}{2} t^2 (\lambda^2 - \gamma^2) \exp[-(\lambda^2 - \gamma^2)\tau], \quad 0 < \tau < t
\end{aligned}$$

Поэтому оригинал двух последних слагаемых в формуле для σ_{rz} из (1.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad L_t^{-1} \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\lambda z e^{-\lambda z}}{s(\lambda + \gamma)(s + \lambda^2 - \gamma^2)} - \frac{\gamma F_1(\lambda, z)}{s(s + \lambda^2 - \gamma^2)} \right] \lambda^2 f^H(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \right\} &= \\
&= \sigma_{rz}^{(1)} + \delta_1
\end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \sigma_{rz}^{(1)} = t \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda z e^{-\lambda z}}{\lambda + \gamma} - \gamma F_1(\lambda, z) \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda$$

причем для δ_1 при помощи (2.1) и известного неравенства ((9.1.60) в [19]) $|J_1(x)| \leq 1/\sqrt{2}$ получаем оценку

$$(2.4) \quad |\delta_1| \leq \frac{t^2 e^{\gamma^2 t}}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{e} + \left(1 + \frac{1}{e}\right) \gamma \right] |f^H(\lambda)| \lambda^2 d\lambda$$

Аналогичным образом

$$(2.5) \quad |\delta_2| = \left| L_t^{-1} \left\{ \int_0^\infty \frac{(\gamma - \gamma\lambda z - \lambda^2 z) e^{-\lambda z} + h e^{-\gamma z}}{s^2 (s + \lambda^2 - \gamma^2)} f^H(\lambda) \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda \right\} \right| \leq \\ \leq \frac{t^2}{2\sqrt{2}} e^{\gamma^2 t} \int_0^\infty \left(\gamma + \frac{\lambda}{e} + h \right) |f^H(\lambda)| \lambda^2 d\lambda$$

Имеем далее, полагая $y = z/(2\sqrt{t}) + \gamma\sqrt{t}$ и используя известную формулу ([15], с. 248)

$$L_t^{-1} \left\{ \frac{e^{-z\sqrt{s}}}{s - \gamma^2} \right\} = \frac{e^{\gamma^2 t}}{2} \left\{ e^{-\gamma z} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{t}} - \gamma\sqrt{t} \right) + \right. \\ \left. + e^{\gamma z} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t} \right) \right\} \leq \\ \leq \frac{e^{\gamma^2 t}}{2} \left\{ 2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left(y^2 - \frac{z^2}{4t^2} - \gamma^2 t \right) \int_y^\infty e^{-x^2} dx \right\} = \\ = \frac{e^{\gamma^2 t}}{2} \left\{ 2 + \exp \left(-\frac{z^2}{4t^2} - \gamma^2 t \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 - 2uy} du \right\} \leq e^{\gamma^2 t} + \frac{1}{2}$$

откуда находим, что

$$(2.6) \quad |\delta_3| = \left| L_t^{-1} \left\{ \int_0^\infty \frac{(h + \gamma) e^{-z\sqrt{s+\lambda^2}}}{s^2 (s + \lambda^2 - \gamma^2)} f^H(\lambda) \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda \right\} \right| \leq \\ \leq (h + \gamma) \left(\frac{t^2}{2} e^{\gamma^2 t} + \frac{t^2}{4} \right) \int_0^\infty |f^H(\lambda)| \lambda^2 d\lambda$$

Для оценки оригинала первых двух слагаемых в σ_{rz}^* из (1.10) требуется оценить величину $L_t^{-1} \{F(z, \lambda, s)/s\}$. Оценим сначала $L_t^{-1} \{F(z, \lambda, s)\}$. Заметим, что $T_1 = -L_t^{-1} \{F(z, 0, s)\}$ — решение одномерной краевой задачи теплопроводности, получающейся из (1.2) при $f(r) = 1$, $\Delta = \partial^2/\partial z^2$. Если $h = \gamma = 0$, то решение этой задачи $T = T_0 = t$; в противном случае $T = T_1 = -L_t^{-1} \{F(z, 0, s)\}$.

Очевидно, что $T_1 \leq T_0$, а потому, учитывая получаемую из (1.3) при помощи теоремы смещения оценку

$$|L_t^{-1} \{F(z, \lambda, s)\}| \leq |L_t^{-1} \{F(z, 0, s)\}|$$

находим, используя теорему об интегрировании оригинала

$$(2.7) \quad \left| L_t^{-1} \left\{ \frac{F(z, \lambda, s)}{s} \right\} \right| \leq \frac{t^2}{2} \\ |\delta_4| = \left| L_t^{-1} \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{hF(z, \lambda, s)}{s} + (\lambda^2 z + h\lambda z - h) \frac{F(0, \lambda, s)}{s} e^{-\lambda z} \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \lambda^2 f^H(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \right\} \right| \leq \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \left(2h + \frac{\lambda}{e} \right) |f^H(\lambda)| \lambda^2 d\lambda$$

Из (2.2)–(2.7) следует, что $\sigma_{rz}^{(1)}$ — асимптотическое представление σ_{rz} при $t \rightarrow 0$, причем оценка погрешности при замене σ_{rz} на $\sigma_{rz}^{(1)}$ не превосходит $|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + |\delta_4|$. Производя аналогичные вычисления для остальных напряжений, окончательно получаем

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{D} &= -T + t \int_0^\infty \left\{ \frac{2 - \lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} + \lambda F_1(\lambda, z) \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - \\ &- t \int_0^\infty \left\{ \frac{2 - 2\nu - \lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} + \lambda F_1(\lambda, z) \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} d\lambda + \delta_{rr} \\ \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{D} &= -T + 2\nu t \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda + \gamma} \lambda^2 f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda + \\ &+ t \int_0^\infty \left\{ \frac{2 - 2\nu - \lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} + \lambda F_1(\lambda, z) \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} d\lambda + \delta_{\varphi\varphi} \\ \frac{\sigma_{zz}}{D} &= t \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} - \lambda F_1(\lambda, z) \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda + \delta_{zz} \\ \frac{\sigma_{rz}}{D} &= t \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda z}{\lambda + \gamma} e^{-\lambda z} - \gamma F_1(\lambda, z) \right\} \lambda^2 f^H(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda + \delta_{rz} \end{aligned}$$

Соотношения (2.8) представляют собой точные выражения для напряжений. Приближенные (асимптотически точные при $t \rightarrow 0$) выражения получаем отбрасыванием в (2.8) δ_{rr} , $\delta_{\varphi\varphi}$, δ_{zz} , δ_{rz} и заменой температуры в (2.8) ее асимптотическим представлением. Имеем

$$(2.9) \quad \begin{aligned} |\delta_{rr}| &\leq t^2 \frac{6 + \sqrt{2}}{4} \int_0^\infty \{ \lambda + h + 2(\lambda + \gamma) e^{\nu z t} \} \lambda^2 |f^H(\lambda)| d\lambda \\ |\delta_{\varphi\varphi}| &\leq t^2 \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1}{e} + \frac{1 + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) (h + \lambda) + \right. \\ &+ \left. \frac{1 + 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} (\lambda + \gamma) e^{\nu z t} \right\} \lambda^2 |f^H(\lambda)| d\lambda \\ |\delta_{zz}| &\leq \frac{t^2}{2} \int_0^\infty \left\{ \lambda \left(2 + \frac{1}{e} \right) + \frac{h}{e} + \right. \\ &+ \left. \left[\lambda \left(3 + \frac{1}{e} \right) + \frac{2\gamma}{e} \right] e^{\nu z t} \right\} \lambda^2 |f^H(\lambda)| d\lambda \\ |\delta_{rz}| &\leq \frac{t^2}{4\sqrt{2}} \int_0^\infty \left\{ 5h + \gamma + \frac{2\lambda}{e} + \right. \\ &+ \left. \left[\left(\frac{2}{e} + 6 \right) \gamma + 4h + \frac{4\lambda}{e} \right] e^{\nu z t} \right\} \lambda^2 |f^H(\lambda)| d\lambda \end{aligned}$$

Выделяя главный член асимптотики температуры, получим

$$(2.10) \quad \begin{aligned} T &= t e^{-\nu z} f(r) + \delta_T \\ |\delta_T| &\leq (h + \gamma) t^{3/2} e^{\nu z t} \int_0^\infty \left\{ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{t}}{2} (\lambda^2 + \gamma^2) \right\} \lambda |f^H(\lambda)| d\lambda \end{aligned}$$

Как следует из (2.8)–(2.10), σ_{ij} имеет порядок малости t , $\delta_{ij} = O(t^2)$, $i, j = r, \varphi, z$ ($t \rightarrow 0$), тогда как $T = O(t)$, $\delta_T = O(t^{3/2})$ ($t \rightarrow 0$). Это означает, что при малых значениях t основной вклад в погрешность при вычислении σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ может вносить погрешность вычисления температуры.

Для «сохранения» порядка погрешности выделим первый член асимптотического разложения $T(r, z, t)$, пользуясь методом [17]. Имеем

$$(2.11) \quad T = T_1(z, t) f(r) + \varepsilon_T$$

$$\varepsilon_T = - \int_0^t \tau \frac{\partial T_1}{\partial \tau} d\tau \int_0^\infty \lambda^3 J_0(\lambda r) f^H(\lambda) e^{-\lambda^2 \xi} d\lambda, \quad 0 < \xi < \tau$$

откуда, используя неравенства $\partial T_1 / \partial \tau \geq 0$, $T_1 \leq T_0$, получаем

$$(2.12) \quad |\varepsilon_T| \leq t^2 \int_0^\infty \lambda^3 |f^H(\lambda)| d\lambda$$

т. е. $\varepsilon_T = O(t^2)$ — малая нужного порядка.

Решение (2.11) имеет ясный физический смысл. Действительно, из (2.10) и (2.12) следует, что $\varepsilon_T = o(T)$. Это означает, что при малых временах нормальный к поверхности теплообмен осуществляется по законам одномерной теплопроводности с точностью до малых высшего порядка. С той же точностью радиальным тепловым потоком можно пренебречь. Аналогичный результат получен ранее в плоском случае [9] и в задаче о конвективном нагреве полупространства [20].

В случае $\gamma = 0$ формулы (2.8) принимают вид

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}/D &= -T + t \{B_{10} - zB_{20} + f(r) - [(1 - 2\nu)B_{01} - zB_{11} + A_{01}]/r\} \\ \sigma_{\varphi\varphi}/D &= -T + t \{2\nu B_{10} + [(1 - 2\nu)B_{01} - zB_{11} + A_{01}]/r\} \\ \sigma_{zz}/D &= t \{zB_{20} + B_{10} - f(r)\}; \quad \sigma_{rz}/D = tzB_{21} \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad A_{ij} = \int_0^\infty \lambda^i J_j(\lambda r) f^H(\lambda) d\lambda, \quad B_{ij} = \int_0^\infty \lambda^i J_j(\lambda r) e^{-\lambda z} f^H(\lambda) d\lambda$$

Для некоторых видов распределений интегралы (2.14) берутся в элементарных функциях. Так, для куполообразного распределения

$$(2.15) \quad f(r) = (r^2 + 1)^{-3/2}$$

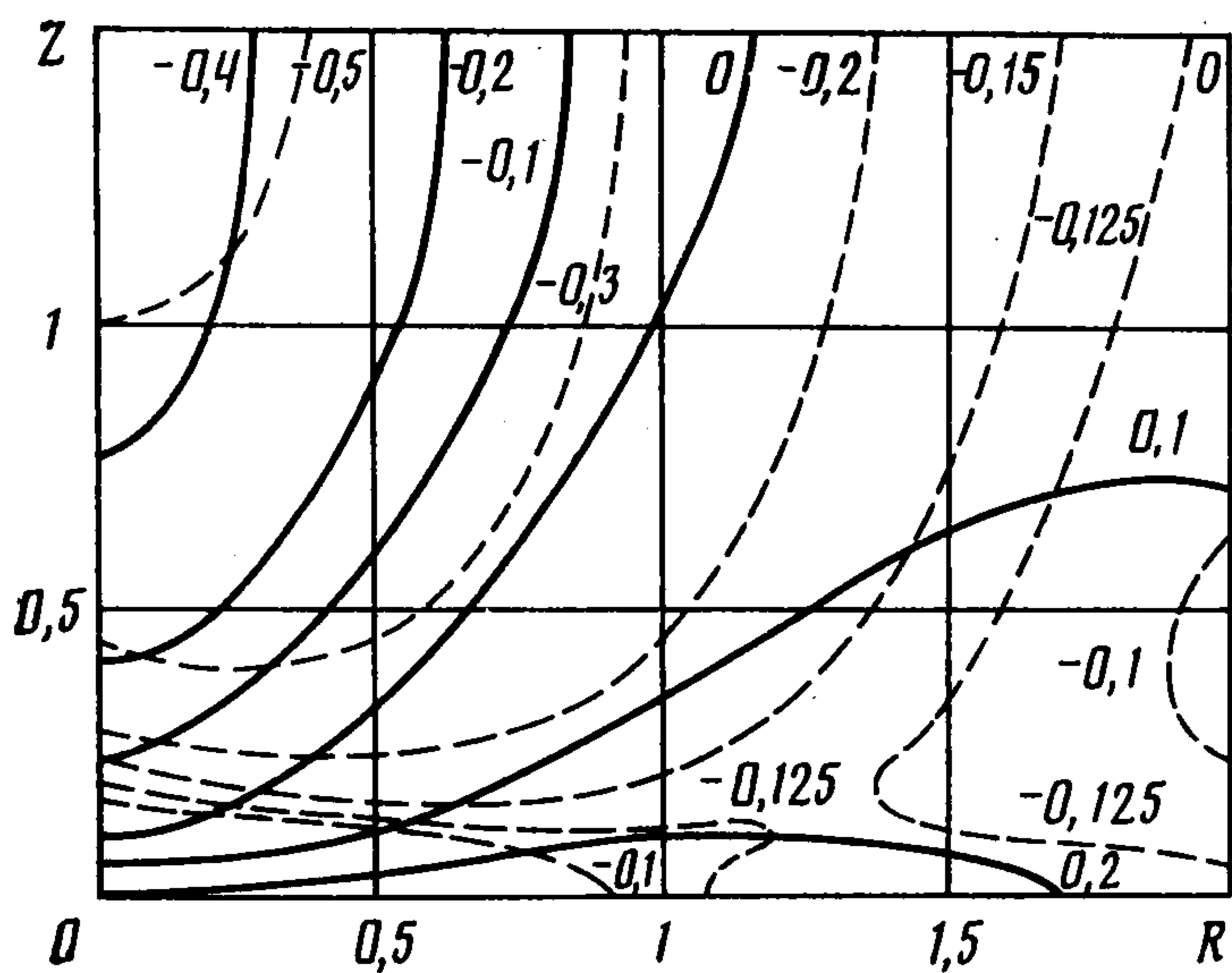
расчеты весьма просты, а оценка погрешностей (2.9) сводится к факториалам ([21], с. 324).

На фиг. 1 изображены линии равных максимальных (сплошные кривые) и минимальных (штриховые) безразмерных главных напряжений $\sigma_1/(Dt)$ и $\sigma_3/(Dt)$ для распределения (2.15). Напряжения рассчитывались по формулам (2.13) при $\nu = 0,2$, температура — по формуле (2.11). Коэффициенты (2.14) приведены в [17]. Как видно, вблизи поверхности $z = 0$ имеют место растягивающие напряжения, по абсолютной величине превосходящие сжимающие. Этим данный результат качественно отличается от случая конвективного теплообмена [17].

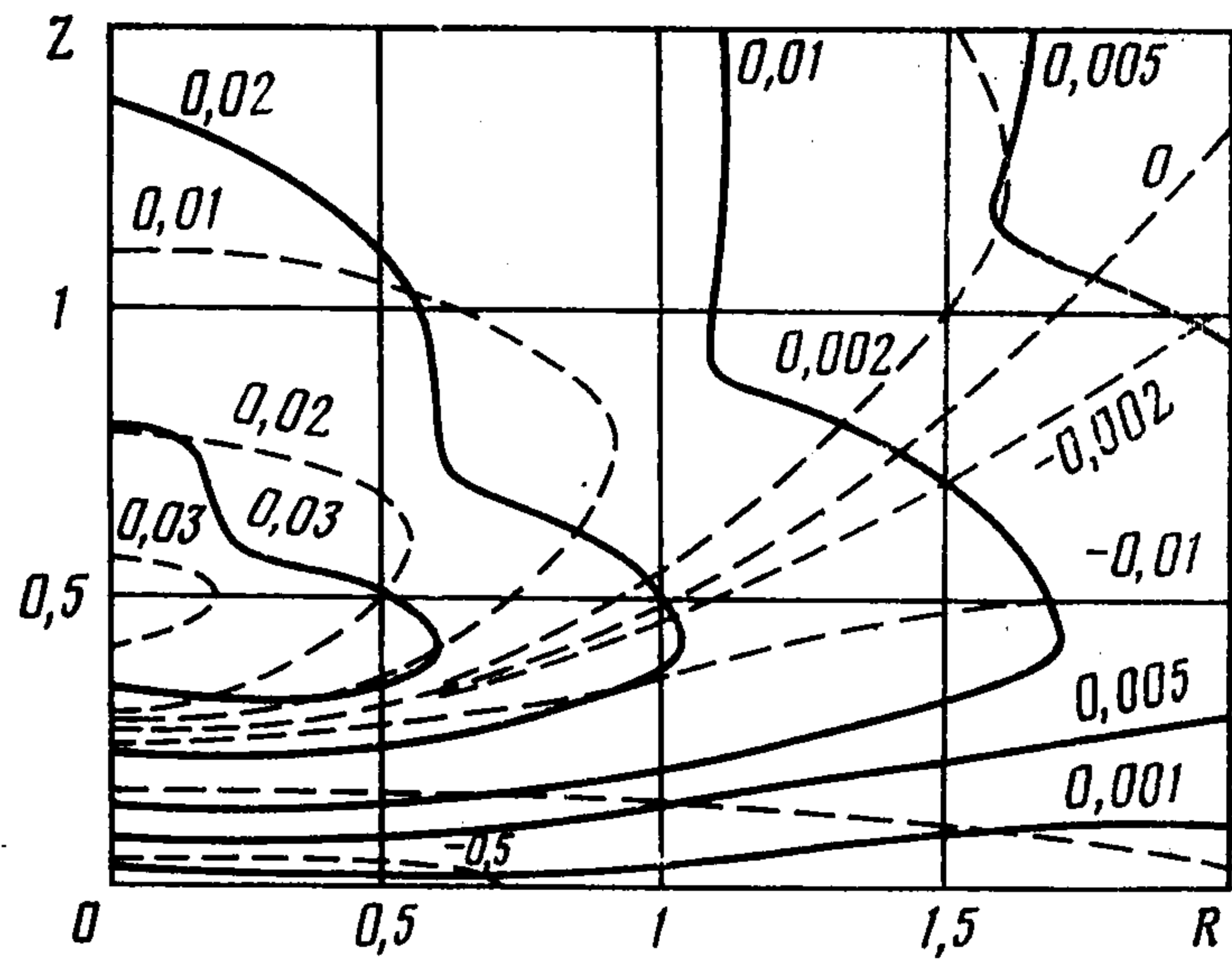
Асимптотика напряжений и оценка погрешностей при малых t в случае непрозрачных материалов (больших γ) определяются соотношениями (2.1), (2.2). Однако значительно более простые соотношения можно получить иным путем, основанным на корректности (устойчивости к малым изменениям температуры) краевой задачи термоупругости. Перейдем к изучению этого случая, когда концентрированным потоком энергии нагреваются слабо прозрачные материалы.

3. Пусть в полупространстве $z \geq 0$ температура распределена по закону (2.10) (далее погрешностью δ_T пренебрегаем, полагая $\delta_T = 0$). Если величина γ велика, то температура

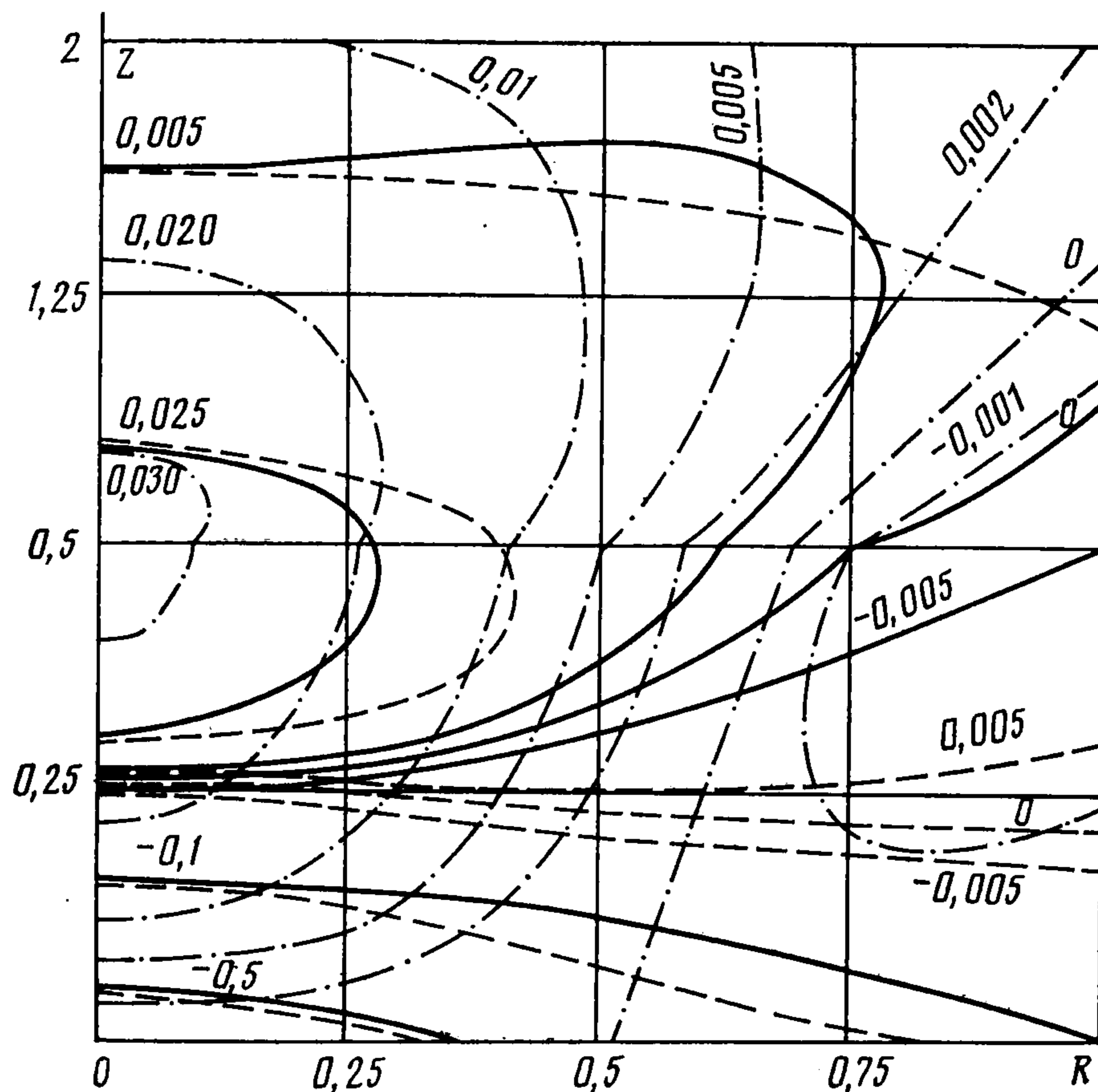
$$(3.1) \quad T = tf(r) e^{-\gamma z} \left(1 + \frac{b}{\gamma^2} \right) \left(b = \frac{1}{f(r)} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \right)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

не слишком сильно отличается от (2.3) для распределений $f(r)$, для которых b ограничено на всем интервале изменения r . Только такие распределения далее рассматриваются. (Именно ограниченность величины b для распределения $f(r) = \exp(-r^2)$ позволила в [7] использовать аппроксимацию температуры, по существу аналогичную (3.1).)

В этом случае напряжения, соответствующие распределению (3.1), не слишком сильно отличаются от напряжений, соответствующих распределению (2.3). Но частным решением уравнения $\Delta\Phi = mT$ являются, как можно проверить

$$(3.2) \quad \Phi = tm\gamma^{-2}f(r)e^{-\gamma z}$$

Используя ту же, что и выше, функцию Лява, найдем выражения для напряжений

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}/D &= t\gamma^{-2} \{ [A_{21}/r - \gamma^2 f(r)] e^{-\gamma z} + 2\gamma B_{20} - (1 + \gamma z) B_{30} + \\ &+ zB_{40} + [-2\gamma(1 - \nu) B_{11} + (1 - 2\nu + \gamma z) B_{21} - zB_{31}] / r \} \\ \sigma_{\varphi\varphi}/D &= t\gamma^{-2} \{ [A_{30} - \gamma^2 f(r) - A_{21}/r] e^{-\gamma z} + 2\nu(\gamma B_{20} - B_{30}) + \\ &+ [2\gamma(1 - \nu) B_{11} - (1 - 2\nu + \gamma z) B_{21} + zB_{31}] / r \} \\ \sigma_{zz}/D &= t\gamma^{-2} \{ A_{30} e^{-\gamma z} + (\gamma z - 1) B_{30} - zB_{40} \} \\ \sigma_{rz}/D &= t\gamma^{-2} \{ \gamma A_{21} e^{-\gamma z} - \gamma B_{21} + \gamma z B_{31} - zB_{41} \} \end{aligned}$$

соответствующих температуре (3.1). Здесь коэффициенты A_{ij} , B_{ij} по-прежнему определяются формулами (2.14).

Приближенное решение для $f(r) = \exp(-r^2)$ было получено ранее [7] в виде бесконечных рядов по A_{ij} .

Следует отметить, что соотношения (3.3) имеют смысл, если $\gamma^2 \gg b$. Именно это будем иметь в виду, говоря, что величина γ велика. Точнее, выражения (3.3) представляют собой асимптотику напряжений при $\gamma \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$.

В случае распределения плотности источников тепла (2.15) выражения для напряжений (3.2) представляют собой элементарные функции и имеют смысл при $\gamma^2 \gg 6$ (что практически обычно выполняется).

На фиг. 2 изображены линии равных максимальных и минимальных напряжений для случая $\gamma = 10$ и $\nu = 0,2$. Обозначения совпадают с принятыми для фиг. 1. На фиг. 3 показаны линии равных безразмерных напряжений $\sigma_{rr}/(Dt)$ (сплошные кривые), $\sigma_{\varphi\varphi}/(Dt)$ (штриховые) и $\sigma_{zz}/(Dt)$ (штрихпунктирные). Изломы на графиках объясняются скачкообразным изменением масштаба по оси z (в точке $z = 0,5$) в три раза. Как видно, в качественном отношении распределение напряжений аналогично случаю конвективного теплообмена [17], что естественно объясняется качественным сходством температурных полей. Это физически очевидно и строго следует из результатов [22].

Оценка погрешности приближенного решения (3.3) может быть получена путем сравнения с приближенным решением (2.8), для которого имеется явная оценка погрешности (2.9). При вычислении интегралов в (2.8) устранимые особенности выделяются в ϵ -окрестности γ , интеграл по которой легко оценивается, например, разложением подынтегральной функции по формуле Тейлора.

4. Необходимо также отметить, что в случае больших γ может быть использован и другой подход, согласно которому нагрев полупространства концентрированным потоком энергии можно описать однородным уравнением теплопроводности (без учета источников тепла), но с граничными условиями теплопроводности второго рода. В этом случае задание теплового потока через поверхность полупространства равносильно по существу заданию источников тепла строго на поверхности полупространства в подходе, использованном выше. Детали распределения полей температуры и напряжений в поверхностном слое толщины порядка $1/\gamma$ остаются неизвестными, и приходится ограничиться большими глубинами, на которых оба подхода дают близкие результаты. Поэтому если есть необходимость рассматривать небольшие глубины ($z \ll 1/\gamma$), то необходимо как-то явно учитывать взаимодействие излучения с веществом. Простейшим способом учета как с физической, так и с математической точки зрения является введение внутренних источников тепла, распределенных по закону Бугера.

Отклонения от закона Бугера, имеющие место вблизи поверхности полупространства, стоит принимать во внимание в случаях, когда температуру и напряжения необходимо определить в области, где эти отклонения существенны, поскольку на больших глубинах последние уже не сказываются. Но и тогда часто удается воспользоваться законом Бугера. Так, в случае нагрева полупространства электронным пучком максимум q_m плотности внутренних источников тепла лежит на некоторой глубине z_m от поверхности [23] и функцию распределения плотности внутренних источников тепла естественно аппроксимировать выражением

$$(4.1) \quad \begin{aligned} q(z) &= (q_0 + q_1) e^{-\gamma z} - q_1 e^{-\beta z} \\ q_0 &= q(0), \quad q_1 > 0, \quad \gamma < \beta \end{aligned}$$

Если q_0 , q_m , z_m , γ известны, то

$$q_1 = \frac{q_m - q_0 e^{-\gamma z_m}}{e^{-\gamma z_m} - e^{-\beta z_m}}$$

а величина β определяется из уравнения

$$\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{q_m}{q_0} e^{\gamma z_m} - 1 \right) + 1 = \frac{q_m}{q_0} e^{z_m (\beta - \gamma)}$$

которое при $\gamma < \beta$ имеет единственное решение.

Таким образом, в данном случае аппроксимация (4.1) приводит к линейной комбинации полученных выше решений с коэффициентами поглощения γ и β .

В построении графиков авторам оказал большую помощь
В. Ф. Стальгорв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schumacher B. W., Taylor C. R. Rock breakage by Means of electron beam piercing (laboratory tests) // Reports 10 th Symp. on Electron. Ion and Laser Technology. San Francisco Press. 1969. P. 271—284.
2. Lauriello P. J., Chen J. Thermal fracturing of hard rock // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. No. 4. P. 909—914.
3. Lauriello P. J., Fritsch C. A. Design and Economic constraints of thermal rock weakening techniques // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1974. V. 11. No. 1. P. 31—39.
4. Cherepanov G. P. Mechanics of brittle fracture. N. Y.: Mc Graw-Hill. 1979. 950 p.
5. Соболев Э. Н., Углов А. А. Лазерная обработка горных пород // Физика и химия обраб. материалов. 1983. № 2. С. 3—17.
6. Апполонов В. В., Барчуков А. И., Карлов Н. В. и др. Термическое воздействие мощного лазерного излучения на поверхность твердого тела // Квант. электроника. 1975. Т. 2. № 2. С. 380—390.
7. Даниловская В. И., Шефтер Э. М. Температурные поля и напряжения, возникающие в упругом полупространстве под действием осесимметричного лучистого потока // Физика и химия обраб. материалов. 1969. № 3. С. 13—19.
8. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Кокора А. Н. Лазерная обработка материалов. М.: Машиностроение. 1975. 296 с.
9. Германович Л. Н. О температурных напряжениях в упругом полупространстве с источниками тепла // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 74—85.
10. Шиллер Э., Гайзиг У., Панцер Э. Электронно-лучевая технология М.: Энергия. 1982. 528 с.
11. Tomlinson W. J., Gordon J. P., Smith P. W., Kaplan A. E. Reflection of a Gaussian beam at a nonlinear interface // Appl. Optics. 1982. V. 21. No. 11. P. 2041—2051.
12. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз. 1963. 251 с.
13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1979. 560 с.
14. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными тепловыми полями. М.: Физматгиз. 1958. 167 с.
15. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк. 1965. 466 с.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973. 831 с.
17. Германович Л. Н., Килль И. Д. О термонапряжениях в упругом полупространстве // ПМТФ. 1983. № 3. С. 159—164.
18. Дудолов Л. С. О температурных напряжениях в упругом полупространстве // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1968. № 1. С. 102—106.
19. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. И. Абрамовица и Г. Стигана. М.: Наука. 1979. 830 с.
20. Германович Л. Н., Ершов Л. В., Килль И. Д. О термоупругих напряжениях в несимметрично нагреваемом полупространстве // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1001—1009.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1108 с.
22. Lundberg G. The thermoelastic problem for the half-space // Chalmers tekn. högsk. handl. 1970. No. 329. 16 p.
23. Рыкалин Н. Н., Зуев И. В., Углов А. А. Основы электронно-лучевой обработки материалов. М.: Машиностроение. 1978. 239 с.