

УДК 539.375

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И «МЕТОД ПРУЖИНОК» В ЗАДАЧАХ ОБ УПРУГИХ ПЛАСТИНАХ С ВЫТЯНУТЫМ ВЫРЕЗОМ

Гольдштейн Р. В., Корельштейн Л. Б.

Методом асимптотического интегрирования [1—3] анализируется класс задач теории упругости о пластинах с вытянутым несквозным вырезом при произвольном нагружении. Асимптотическое решение по малому параметру (отношению толщины пластины к длине выреза) строится как сумма внешнего решения, соответствующего двумерной задаче теории пластин, и внутреннего решения, соответствующего пограничным слоям в зоне порядка h вблизи выреза, а также границ пластины.

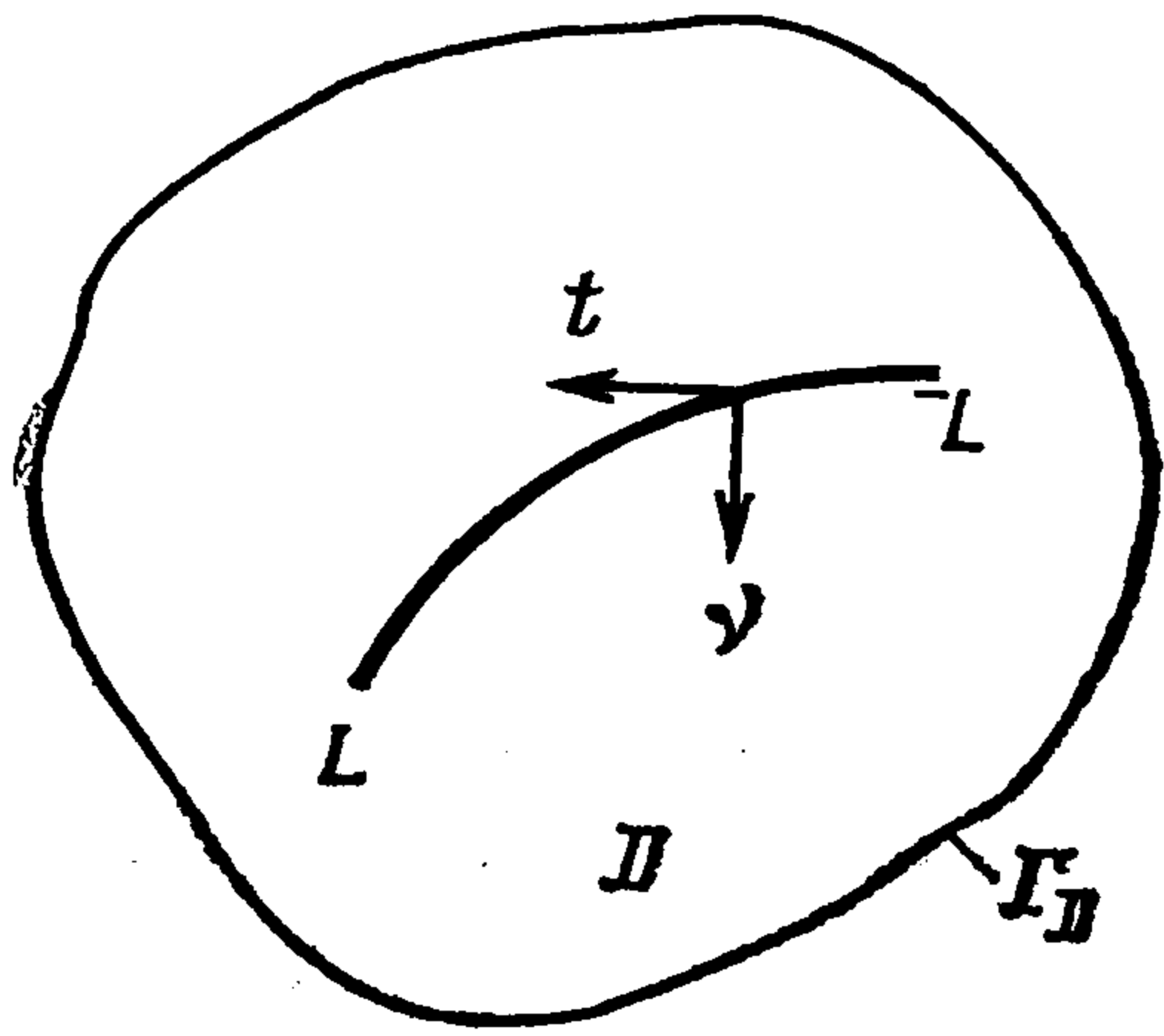
Показано, что влияние выреза на упруго-деформированное состояние в пластине (вне пограничных слоев) сказывается во втором члене внешнего решения, приводя к скачкам кинематических и силовых факторов на линии выреза. Получены уравнения, выражающие указанные скачки через геометрические параметры выреза и энергетические характеристики первого члена внутреннего решения, представляющего собой состояния плоской и антиплоской деформации полосы с вырезом под действием нагрузок на поверхность выреза, определяемых усилиями и моментами первого члена внешнего решения на линии выреза. Тем самым после решения соответствующих плоских и антиплоских задач для первого члена внутреннего решения определение второго члена внешнего решения сводится к задаче теории пластин со сформулированными граничными условиями на линии выреза и краях пластины. Второй член асимптотики пограничного слоя вблизи выреза представляет собой решение более сложных плоской и антиплоской задач для полосы с вырезом, с нагрузкой, включающей объемные и поверхностные силы, связанные с изменением вдоль выреза первого члена решения для пограничного слоя.

Исходя из полученных уравнений в случае выреза, представляющего собой вытянутую прямолинейную поверхностную трещину (нормальную к поверхности пластины), можно как для симметричного, так и для антисимметричного нагружения сформулировать приближенные граничные условия на линии трещины для двучленной асимптотики внешнего решения, что позволяет сразу ставить задачи теории пластин с учетом влияния трещин. Для симметричного нагружения эти граничные условия сводятся к уравнениям известного метода пружинки Райса — Леви [4—7], а для антисимметричного нагружения представляют собой новые уравнения подобной же структуры, физический смысл которых поясняется в статье. По найденным с использованием этих уравнений усилиям и моментам на линии трещины могут быть приближенно определены коэффициенты интенсивности напряжений на ее контуре.

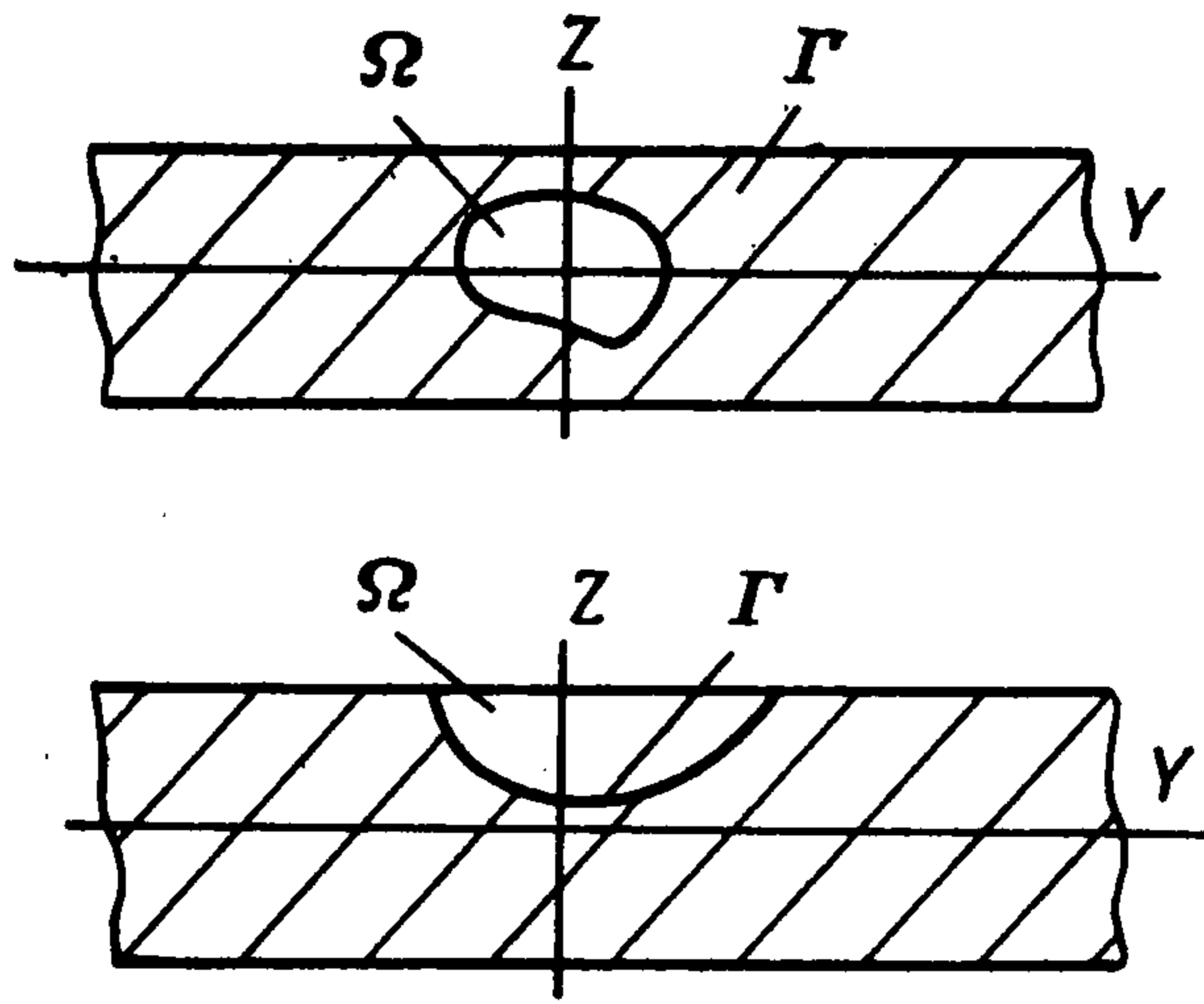
В качестве примера рассматривается задача о поверхностной трещине в безграничной пластине при антисимметричной нагрузке, которая сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений, решаемых численно. Приводятся результаты расчета для трещины полуэллиптической формы.

1. Рассмотрим пластину, заданную в декартовых координатах x_i соотношениями $(x_1, x_2) \in D, |x_3| \leq h/2$ (D — некоторая плоская область). Пусть $R(l)$ — плоская кривая длины $2L$, лежащая внутри области D (фиг. 1), параметр $l \in [-L, L]$ — расстояние вдоль кривой от ее середины, $L \gg h$. Введем ортонормированную тройку векторов $t(l) = dR(l)/dl, v(l) = e_3 \times t(l), e_3$, криволинейную ортогональную систему координат l, m, x_3 , т. е. $x(l, m, x_3) = R(l) + mv(l) + x_3 e_3$, а также безразмерные координаты

$$X_i = \frac{x_i}{L} \quad (i = 1, 2), \quad X_3 = Z = \frac{2x_3}{h}, \quad x = \frac{l}{L}, \quad y = \frac{m}{h}, \quad Y = \frac{2m}{h}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Предположим, что пластина содержит вытянутый вырез Ω (внутренний или поверхностный), занимающий область, которая в координатах x, Y, Z определяется соотношениями $f(x, Y, Z) \leq 0, |x| \leq 1, |Z| \leq 1$. (f — достаточно гладкая функция), так что в каждом сечении $x = x_0$ область выреза

$$\Omega(x_0) = \{(Y, Z) \mid f(x_0, Y, Z) \leq 0, |Z| \leq 1\}$$

внутренняя или примыкает к $Z = 1$ (фиг. 2). Пусть поверхности пластины $Z = \pm 1$ нагружены соответственно давлением $p^\pm(x_1, x_2)$, а поверхность выреза Γ в случае внутреннего выреза свободна от усилий, в случае краевого выреза — нагружена давлением $p^+(x_1, x_2)$. На Γ_D заданы некоторые краевые условия (точный их вид здесь несуществен).

Рассмотрим асимптотику решения указанной задачи по малому параметру $\varepsilon = h / 2L$ (фактически в данной работе ограничимся первыми двумя членами асимптотики).

Введем безразмерные напряжения и смещения

$$\sigma_{ij}^\circ = \sigma_{ij} / \sigma_0, \quad u_i^\circ = 2\mu u_i / (\sigma_0 L)$$

где σ_0 — характерная величина $p^+(x_1, x_2)$, μ — модуль сдвига.

Асимптотику будем строить в виде

$$(1.1) \quad u_i^\circ = u_i^p + u_i^b + u_i^d, \quad \sigma_{ij}^\circ = \sigma_{ij}^p + \sigma_{ij}^b + \sigma_{ij}^d$$

где u_i^p, σ_{ij}^p — безразмерные смещения и напряжения вдали от края Γ_D и выреза, $u_i^b, \sigma_{ij}^b, u_i^d, \sigma_{ij}^d$ — смещения и напряжения краевых эффектов вблизи Γ_D и выреза, существенные на расстояниях порядка h от них и экспоненциально затухающие с удалением от Γ_D и Ω .

В общем случае в формуле (1.1) следует также учитывать краевой эффект вблизи концов выреза, однако в данной работе будем считать эти концы не слишком «тупыми», так что вдали от выреза и вблизи его средней части влияние указанного краевого эффекта в рассматриваемых членах асимптотики можно не учитывать.

Метод построения величин u_i^b, σ_{ij}^b и получающиеся с их учетом уточненные краевые условия на u_i^p, σ_{ij}^p на краях пластины известны [1—3]; в данной работе рассмотрим метод построения величин u_i^d, σ_{ij}^d и соответствующие условия для u_i^p, σ_{ij}^p на линии выреза. При этом при решении задач об ограниченных пластинах с вырезами необходимо использовать полученные ниже уравнения совместно с краевыми условиями [1—3]; в задаче о безграничной пластине с вырезом (см. п. 3) последние использовать не требуется.

Асимптотика u_i^p , σ_{ij}^p упругого поля в пластине вдали от неоднородностей имеет вид [7]

$$(1.2) \quad u_i^p = \varepsilon^{\beta_i} \sum V_i^{(n)}(X_1, X_2, X_3) \varepsilon^n, \quad \sigma_{ij}^p = \varepsilon^{k_{ij}} \sum S_{ij}^{(n)}(X_1, X_2, X_3) \varepsilon^n$$

$$\beta_1 = \beta_2 = -2, \quad \beta_3 = -3, \quad k_{12} = k_{11} = k_{22} = -2, \quad k_{13} = k_{23} = -1, \\ k_{33} = 0$$

(здесь и далее суммирование ведется по n от $n = 0$ до $n = \infty$) и должна удовлетворять уравнениям равновесия $S_{ij,j}^{(n)} = 0$, соотношениям закона Гука и условиям на поверхностях $X_3 = \pm 1$. Используя эти условия, можно, в частности, показать, что первые два члена асимптотики удовлетворяют соотношениям теории изгиба и растяжения пластинок (ν — коэффициент Пуассона)

$$(1.3) \quad V_3^{(n)} = w^{(n)}(X_1, X_2), \quad V_i^{(n)} = v_i^{(n)}(X_1, X_2) - Zw_{,i}^{(n)}$$

$$S_{ii}^{(n)} = n_{ii}^{(n)} + Zm_{ii}^{(n)}, \quad S_{ij}^{(n)} = n_{ij}^{(n)} + Zm_{ij}^{(n)}, \quad S_{i3}^{(n)} = 1/2(1 - Z^2)q_i^{(n)}$$

$$n_{ii}^{(n)} = (1 - \nu)^{-1}(v_{i,i}^{(n)} + \nu v_{j,j}^{(n)}), \quad m_{ii}^{(n)} = -(1 - \nu)^{-1}(w_{,ii}^{(n)} + \nu w_{,jj}^{(n)})$$

$$n_{ij}^{(n)} = 1/2(v_{i,j}^{(n)} + v_{j,i}^{(n)}), \quad m_{ij}^{(n)} = -w_{,ij}^{(n)}, \quad q_i^{(n)} = -(1 - \nu)^{-1} \nabla^2 w_{,i}^{(n)}$$

$$S_{33}^{(0)} = 1/2(S_+ + S_-) + 3/4(S_+ - S_-)(Z - 1/3 Z^3), \quad S_{33}^{(1)} = 0$$

$$(1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}(v_{i,i}^{(n)} + \nu v_{j,j}^{(n)})_{,i} + \nabla^2 v_i^{(n)} = 0$$

$$\nabla^4 w^{(0)} = 3/2(1 - \nu)(S_+ - S_-), \quad \nabla^4 w^{(1)} = 0$$

$$(n = 1, 2; (i, j) = (1, 2) \text{ или } (2, 1); S_{\pm} = p^{\pm}/\sigma_0).$$

Так как на поверхности выреза заданы усилия, то напряжения для краевого слоя вблизи выреза должны иметь тот же порядок, что и напряжения для внешнего решения (1.2), т. е. $\varepsilon^{-2}\sigma_0$. Поскольку характерный линейный размер краевого слоя равен h , смещения для краевого слоя должны иметь порядок $\varepsilon^{-2}\sigma_0 h \mu^{-1} = 2L\mu^{-1}\sigma_0 \varepsilon^{-1}$. Поэтому асимптотику σ_{ij}^d , u_i^d ищем в виде

$$(1.4) \quad u_i^d = \varepsilon^{-1} \sum u_i^{(n)}(x, Y, Z) \varepsilon^n, \quad \sigma_{ij}^d = \varepsilon^{-2} \sum \sigma_{ij}^{(n)}(x, Y, Z) \varepsilon^n$$

Члены разложения (1.4) должны удовлетворять (асимптотически) уравнениям равновесия и соотношениям закона Гука [2], а также однородным уравнениям на поверхностях пластины

$$\sigma_{xZ}^{(n)}(x, Y, \pm 1) = \sigma_{YZ}^{(n)}(x, Y, \pm 1) = \sigma_{ZZ}^{(n)}(x, Y, \pm 1) = 0$$

и исчезать на бесконечности ($u_i^d \rightarrow 0$, $\sigma_{ij}^d \rightarrow 0$ при $|Y| \rightarrow \infty$). Кроме того, поле $\sigma_{ij}^d + \sigma_{ij}^p$ должно асимптотически давать на поверхности выреза Γ заданные усилия. Наконец, поскольку компоненты разложения (1.2) могут, вообще говоря, при переходе через поверхность $y = 0$ (соответствующую вырезу) испытывать разрыв, необходимо потребовать, чтобы $u_i^d + u_i^p$, $\sigma_{ij}^d + \sigma_{ij}^p$ асимптотически удовлетворяли условиям непрерывности усилий и смещений при переходе через поверхность $Y = 0$ вне выреза.

С учетом перечисленных выше соотношений задачу для каждого члена асимптотики (1.4) при каждом фиксированном $x = x_0$ можно (аналогично [2]) свести к плоской и антиплоской задачам о бесконечной полосе с вырезом $\Omega(x_0)$, нагруженной некоторыми поверхностными и объемными силами, выраженными через предыдущие члены асимптотики (1.4) и члены асимптотики (1.2). Условия на скачки членов асимптотики (1.2) при $y = 0$ выбираются при этом так, чтобы обеспечить существование решений со-

ответствующих плоских и антиплоских задач, а также непрерывность смещений и усилий при $Y = 0$.

Рассмотрим, в соответствии со сказанным выше, соотношения для первых членов асимптотики (1.2), (1.4). Так как порядок первого члена асимптотики u_i^p больше порядка асимптотики u_i^d , из условия непрерывности смещений следует, что функция $V_i^{(0)}(x, y, Z)$ непрерывна при $y = 0$, т. е. скачки смещений и углов поворота срединной поверхности при $y = 0$, равны нулю:

$$(1.5) \quad \Delta v_x^{(0)} = \Delta v_y^{(0)} = \Delta w^{(0)} = \Delta w_{,y}^{(0)} = 0$$

Условия на скачки $S_{ij}^{(0)}$ получаются при рассмотрении плоской и антиплоской задач для $\sigma_{ij}^{(n)}$ при $n = 0, 1$. Для существования затухающего на бесконечности решения этих задач внешние силы, приложенные к полуполосе с вырезом, должны быть уравновешены, т. е. при любом x должны быть равны нулю следующие величины:

1) главный вектор объемных и поверхностных сил в антиплоской задаче $Q_x^{(n)}$;

2) главный вектор объемных и поверхностных сил в плоской задаче $Q_Y^{(n)} \mathbf{v}(x) + Q_Z^{(n)} \mathbf{e}_3$;

3) составляющая по $\mathbf{t}(x)$ главного момента объемных и поверхностных сил в плоской задаче $M_x^{(n)}$.

Можно проверить, что соотношение $Q_Z^{(0)} = 0$ выполняется автоматически, соотношения $Q_Y^{(0)} = Q_x^{(0)} = M_x^{(0)} = 0$ определяют нулевые скачки усилий $n_{xy}^{(0)}$, $n_{yy}^{(0)}$ и момента $m_{yy}^{(0)}$. Так как напряжения от перерезывающих сил на порядок меньше тангенциальных напряжений, скачок перерезывающей силы $q_y^{(0)}$ находится из условия $Q_Z^{(1)} = 0$. В итоге

$$(1.6) \quad \Delta n_{xy}^{(0)} = \Delta n_{yy}^{(0)} = \Delta m_{yy}^{(0)} = \Delta q_y^{(0)} + \Delta m_{xy, x}^{(0)} = 0$$

Соотношения (1.5), (1.6) показывают, что $V_i^{(0)}$, $S_{ij}^{(0)}$ непрерывны при $y = 0$ и определяются только соотношениями (1.3) и краевыми условиями на Γ_D , т. е. упругое поле в пластине в первом приближении «не замечает» выреза.

С учетом (1.6) плоскую и антиплоскую задачи для напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ для каждого x сводим к определению исчезающих на бесконечности напряжений $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{(0)}$ в полосе с вырезом, нагруженной только по поверхности $\Gamma(x)$ выреза и так, что усилия на поверхности $\Gamma(x)$ компенсируют усилия от $S_{ij}^{(0)}$:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{xY}^* n_Y + \sigma_{xZ}^* n_Z &= -S_{xy}^{(0)}(x, 0, Z) n_Y, \quad \sigma_{YX}^* n_Y + \sigma_{YZ}^* n_Z = -S_{yy}^{(0)}(x, 0, Z) n_Y \\ \sigma_{ZY}^* n_Y + \sigma_{ZZ}^* n_Z &= 0 \quad (Y, Z) \in \Gamma(x) \\ S_{\alpha y}^{(0)}(x, 0, Z) &= n_{\alpha y}^{(0)}(x, 0) + Z m_{\alpha y}^{(0)}(x, 0) \quad (\alpha = x, y) \end{aligned}$$

Так как $\sigma_{ij}^* \rightarrow 0$ при $Y \rightarrow \pm\infty$, для смещений u_i^* в соответствующей плоской и антиплоской задаче имеем

$$\begin{aligned} u_x^*(x, Y, Z) &= u_x^{\pm\infty} + o(1), \quad u_Y^*(x, Y, Z) = u_Y^{\pm\infty} + Z\theta^{\pm\infty} + o(1) \\ u_Z^*(x, Y, Z) &= u_Z^{\pm\infty} - Y\theta^{\pm\infty} + o(1), \quad Y \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

а смещения $u_i^{(0)}$ выражаются через u_i^* следующим образом:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u_x^{(0)} &= u_x^* - u_x^\lambda, \quad u_Y^{(0)} = u_Y^* - u_Y^\lambda - Z\theta^\lambda, \\ u_Z^{(0)} &= u_Z^* - u_Z^\lambda + Y\theta^\lambda \\ \lambda &= +\infty, \quad Y > 0; \quad \lambda = -\infty, \quad Y < 0 \end{aligned}$$

определяются однозначно (в то время как u_i^* определяются с точностью до жесткого перемещения и поворота) и удовлетворяют условию $u_i^{(0)} \rightarrow 0$ при $Y \rightarrow \pm\infty$.

Условие непрерывности $u_i^d + u_i^p$ при $Y = 0$ вне Ω для членов порядка ε^{-2} и ε^{-1} при учете (1.8) запишем в виде

$$(1.9) \quad \Delta w^{(1)} = 0, \quad \Delta v_x^{(1)} = \{u_x\}_\infty, \quad \Delta v_y^{(1)} = \{u_Y\}_\infty, \quad \Delta w_{,y}^{(1)} = -\{\theta\}_\infty, \\ \Delta w^{(2)} = \{u_Z\}_\infty \\ \{u_\alpha\}_\infty = u_\alpha^{+\infty} - u_\alpha^{-\infty}, \quad \{\theta\}_\infty = \theta^{+\infty} - \theta^{-\infty} \quad (\alpha = x, Y, Z)$$

т. е. скачки смещений и углов поворота выражаются через относительные смещения и поворот концов полосы.

Величины $\{u_x\}_\infty$, $\{u_Y\}_\infty$, $\{\theta\}_\infty$ можно выразить через энергетические и геометрические характеристики полосы с вырезом. Для этого достаточно записать соотношения теорем взаимности Бетти для упругого поля u_i^* , σ_{ij}^* и соответственно для полей однородного антиплоского сдвига, однородного плоского растяжения и чистого изгиба полосы. Таким образом легко получаются соотношения

$$(1.10) \quad \Delta v_x^{(1)} = \{u_x\}_\infty = U_x^n + W_x^n \\ \Delta v_y^{(1)} = \{u_Y\}_\infty = U_y^n + 1/2(1 - \nu)W_y^n \\ \Delta w^{(1)} = 0, \quad -1/3\Delta w_{,y}^{(1)} = 1/3\{\theta\}_\infty = U_y^m + 1/2(1 - \nu)W_y^m$$

Здесь

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} U_\alpha^n \\ U_\alpha^m \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_\alpha^{nn} & A_\alpha^{nm} \\ A_\alpha^{nm} & A_\alpha^{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_{\alpha y}^{(0)} \\ m_{\alpha y}^{(0)} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} W_\alpha^n \\ W_\alpha^m \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} W_0 & W_1 \\ W_1 & W_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_{\alpha y}^{(0)} \\ m_{\alpha y}^{(0)} \end{vmatrix} \\ W_k(x) &= \iint_{\Omega(x)} Z^k dY dZ, \quad A_\alpha^{nn}(x) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x)} u_\alpha^n n_Y dS \\ A_\alpha^{nm}(x) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x)} u_\alpha^m n_Y dS = \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x)} Z u_\alpha^n n_Y dS, \\ A_\alpha^{mm}(x) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x)} Z u_\alpha^m n_Y dS \quad (\alpha = x, y) \end{aligned}$$

Значения усилий и моментов берутся при $y = 0$; величины u_α^n , u_α^m ($\alpha = x, y$) — смещения u_α^* при нагрузке (1.7) на $\Gamma(x)$, отвечающей случаям единичной силы ($n_{\alpha y}^{(0)}(x, 0, Z) = 1$, $m_{\alpha y}^{(0)}(x, 0, Z) = 0$) и единичного момента ($n_{\alpha y}^{(0)}(x, 0, Z) = 0$, $m_{\alpha y}^{(0)}(x, 0, Z) = 1$). Таким образом, коэффициенты W и A зависят только от формы и расположения выреза $\Omega(x)$ (а коэффициенты A_y^{nn} , A_y^{nm} , A_y^{mm} — также от коэффициента Пуассона ν) и имеют смысл: $W_k(x)$ — геометрических моментов области $\Omega(x)$, A — безразмерной энергии (взаимной энергии) решений плоской (антиплоской) задачи о полосе с вырезом, нагруженной на $\Gamma(x)$ усилиями, соответствующими единичной силе и моменту.

Для замыкания задачи для второго члена асимптотики (1.2) необходимо получить еще четыре соотношения на скачки усилий и моментов при $y = 0$. Они получаются из условий $Q_x^{(1)} = Q_Y^{(1)} = Q_Z^{(2)} = M_x^{(1)} = 0$ и после довольно громоздких преобразований могут быть приведены к

следующему виду:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \Delta n_{xy}^{(1)} t + \Delta n_{yy}^{(1)} v &= [W_*^n t]_{,x} \\ \frac{1}{3} \Delta m_{yy}^{(1)} &= [U_x^m + W_x^m]_{,x} - k(x) W_*^m \\ \frac{1}{3} [\Delta q_y^{(1)} + \Delta m_{xy, x}^{(1)}] &= [k(x) (U_x^m + W_x^m) + W_{*, x}^m]_{,x} \\ \left\| \begin{matrix} W_*^n \\ W_*^m \end{matrix} \right\| &= \left\| \begin{matrix} W_0 & W_1 \\ W_1 & W_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} n_{xx}^{(0)} - \nu n_{yy}^{(0)} \\ m_{xx}^{(0)} - \nu m_{yy}^{(0)} \end{matrix} \right\| \end{aligned}$$

($k(x)$ — безразмерная кривизна кривой $R(x)$: $dt/dx = -k(x)v$).

После решения задачи теории пластинок для $V_i^{(1)}$, $S_{ij}^{(1)}$, определяемой соотношениями (1.3), (1.10), (1.11) и краевыми условиями на Γ_D , может быть полностью сформулирована задача для второго члена асимптотики (1.4). Полученные при этом соотношения ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

2. В предельном частном случае задачи п. 1, когда в качестве выреза берется нормальная к плоскости $Z = 1$ прямолинейная поверхностная трещина, занимающая область $|x| \leq 1$, $Y = 0$, $1 - 2\zeta(x) \leq Z \leq 1$ ($0 \leq \zeta \leq 1$), формулы п. 1 существенно упрощаются. Введем безразмерные усилия, моменты и смещения срединной поверхности, ограничившись двумя членами асимптотики:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x^{(0)} + \varepsilon v_x^{(1)}, \quad v_y = v_y^{(0)} + \varepsilon v_y^{(1)}, \quad w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)}, \\ n_{ij} &= n_{ij}^{(0)} + \varepsilon n_{ij}^{(1)} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

и запишем через них соотношения (1.5), (1.6), (1.10), (1.11), пренебрегая членами порядка ε^2 . При этом представим напряженно-деформированное состояние пластины как сумму симметричного и антисимметричного слагаемых относительно плоскости $y = 0$ и рассмотрим каждое из них в отдельности.

Симметричное нагружение. В этом случае соотношения п. 1 дают на прямой $y = X_2 = 0$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Delta v_y &= \varepsilon (A_y^{nn} n_{yy} + A_y^{nm} m_{yy}) \\ - \frac{1}{3} \Delta w_{,y} &= \varepsilon (A_y^{nm} n_{yy} + A_y^{mm} m_{yy}) \\ \Delta v_x = \Delta w = \Delta m_{yy} = \Delta n_{yy} = n_{xy} = q_y + m_{xy, x} &= 0 \end{aligned}$$

т. е. уравнения «модели пружинок» Райса—Леви. Коэффициенты A_y^{nn} , A_y^{nm} , A_y^{mm} как функции ζ и ν в этом случае вычислены и протабулированы [6].

Из соотношений для первых двух членов асимптотики (1.4) можно получить соотношения для коэффициентов интенсивности напряжений (с точностью до ε^2)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} K_I / K^\circ &= K_I^n (\zeta(x)) n_{yy}(x, 0) + K_I^m (\zeta(x)) m_{yy}(x, 0) \\ K_{II} = K_{III} &= 0 \quad (K^\circ = \varepsilon^{-2} \sigma_0 \sqrt{\pi h \zeta(x)}) \end{aligned}$$

где безразмерные коэффициенты интенсивности K_I^n , K_I^m в плоской задаче о полосе с краевой трещиной, нагруженной единичной постоянной и линейной нагрузкой, известны [8].

Антисимметричное нагружение. В этом случае соотношения п. 1 на прямой $y = X_2 = 0$ дают

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Delta v_x &= \varepsilon (A_x^{nn} n_{xy} + A_x^{nm} m_{xy}) \\ \frac{1}{3} \Delta m_{yy} &= \varepsilon (A_x^{nm} n_{xy} + A_x^{mm} m_{xy})_{,x} \\ \Delta v_y = \Delta w_{,y} = \Delta n_{xy} = \Delta q_y + \Delta m_{xy, x} = w = n_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения (2.3) показывают, что при антисимметричном нагружении поверхностную трещину можно моделировать сквозной трещиной с линейно-упругими связями между берегами и дополнительно приложенным изгибающим моментом.

Различие уравнений (2.1) и (2.3) можно пояснить следующим образом. Уравнения (2.1) для симметричного случая получаются, если предположить [4], что упругое поле вблизи трещины — плоская деформация (решение задачи о растяжении и изгибе плоской полосы с надрезом в каждом сечении $x = x_0$), и учесть при определении дальнего поля возникающие из-за наличия надреза дополнительные смещение и поворот концов полосы относительно друг друга. Аналогичным образом уравнения (2.3) могут быть получены, если считать, что упругое поле вблизи трещины — антиплоская деформация (решение задачи об антиплоском сдвиге полосы с надрезом), и учитывать при определении дальнего поля дополнительное относительное смещение концов полосы (первое уравнение (2.3)). Однако в данном случае необходимо также учесть, что в отличие от симметричного случая прилегающая к трещине область при выбранных указанным образом напряжениях не полностью уравновешена.

Действительно, если рассмотреть содержащий часть трещины тонкий слой $|Z| \leq \leq 1$, $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$, то можно показать, что обусловленное надрезом дополнительное упругое поле дает на поверхностях $x = x_0$, $x = x_0 + \Delta x$ усилия, суммарные моменты которых относительно оси x отличны от нуля. Так как дополнительное упругое поле зависит от x , получаем, что на рассматриваемый слой действует ненулевой момент, который должен быть уравновешен на бесконечности, т. е. со стороны дальнего поля. Это означает, что последнее должно на трещине иметь соответствующий скачок изгибающего момента, в чем и состоит второе уравнение (2.3).

Для коэффициентов интенсивности напряжений в этом случае имеем

$$(2.4) \quad K_I = 0, \quad K_{II}/K^0 = o(\epsilon) \\ K_{III}/K^0 = K_{III}^n(\zeta(x))n_{xy}(x, 0) + K_{III}^m(\zeta(x))m_{xy}(x, 0)$$

где K_{III}^n , K_{III}^m — аналогичные K_I^n , K_I^m коэффициенты для антиплоской задачи. Для удельного приращения энергии при росте трещины из (2.4) имеем

$$(2.5) \quad \delta W/\delta S = 1/2\mu (K^0)^2 [(K_{III}^n n_{xy} + K_{III}^m m_{xy})^2 + o(\epsilon)]$$

Величины

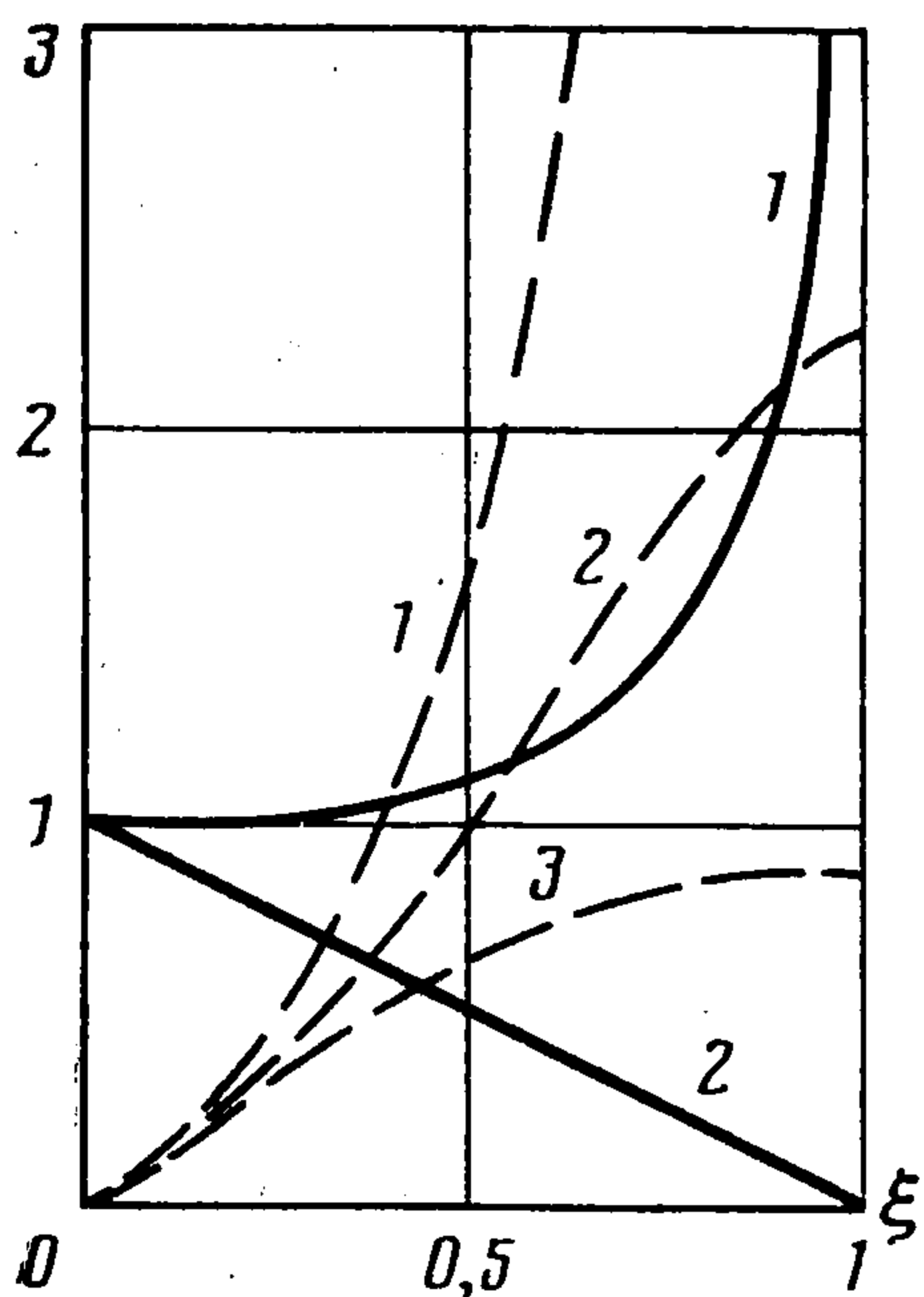
$$(2.6) \quad A_x^{nn}, A_x^{nm}, A_x^{mm}, K_{III}^n, K_{III}^m$$

можно найти, решив методами теории функций комплексной переменной соответствующие антиплоские задачи. В результате получим

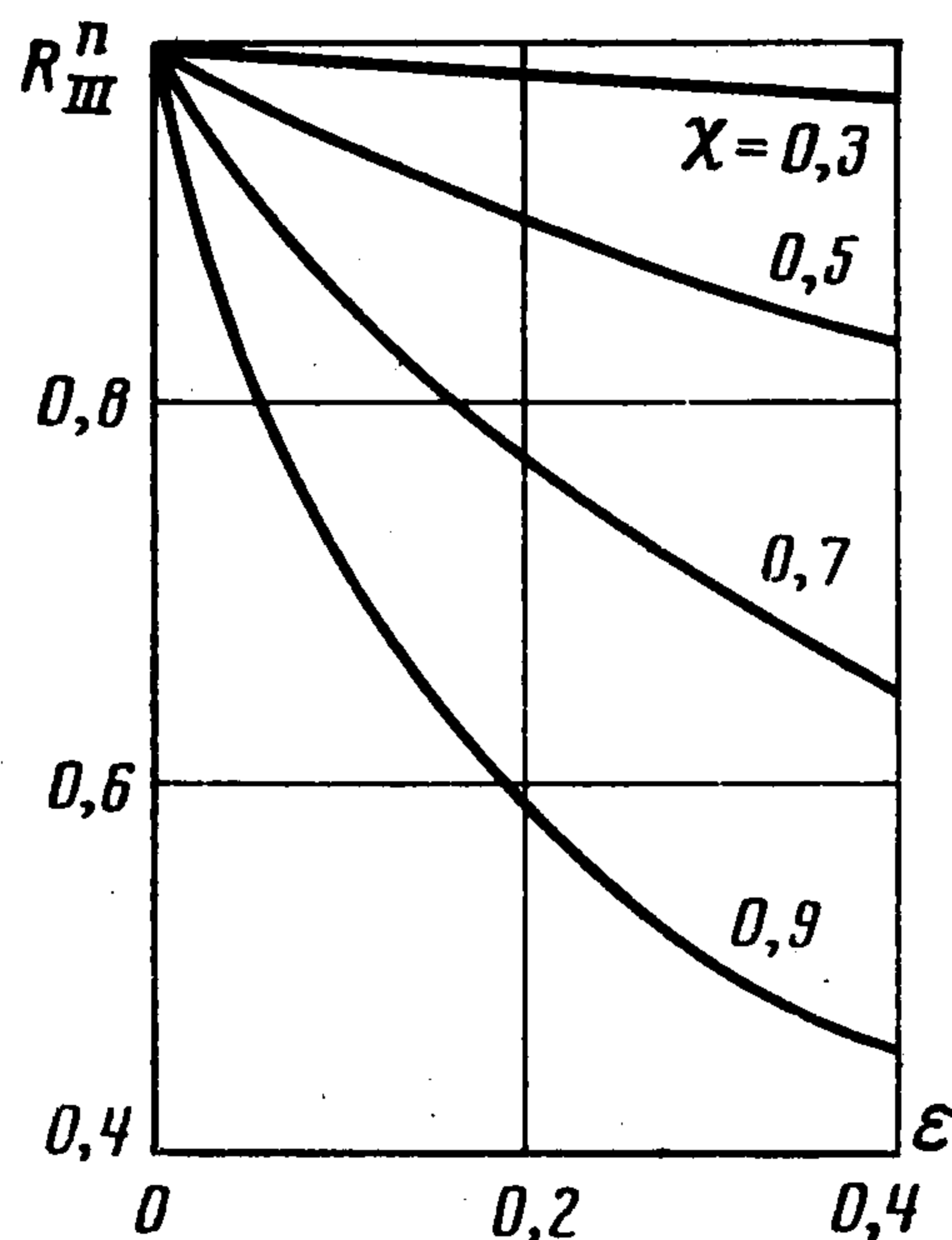
$$(2.7) \quad K_{III}^n = \left[\frac{2}{\pi\zeta} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \zeta \right]^{1/2}, \quad K_{III}^m = F\left(\sin \frac{\pi}{2} \zeta\right) K_{III}^n \\ A_x^{nn}(\zeta) = G_0(\zeta) = -\frac{16}{\pi} \ln \cos \frac{\pi}{2} \zeta, \quad A_x^{nm}(\zeta) = G_1(\zeta), \\ A_x^{mm}(\zeta) = G_2(\zeta) \\ G_k = 8 \int_0^{\zeta} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} t F^k\left(\sin \frac{\pi}{2} t\right) dt \quad (k=0, 1, 2), \\ F(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2} = 1 - \frac{4}{\pi^2} [\operatorname{Li}_2(t) - \operatorname{Li}_2(-t)], \\ \operatorname{Li}_2(t) = - \int_0^t \frac{\ln(1-\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

На фиг. 3 изображены графики величин (2.6) в зависимости от ζ (штриховые кривые 1—3 и сплошные кривые 1, 2 соответственно).

3. В качестве примера применения приведенных в п. 2 уравнений (2.3) рассмотрим задачу о краевой трещине в бесконечной пластине при анти-



Фиг. 3



Фиг. 4

симметричном нагружении. В этом случае упругое поле есть сумма однородного поля, которое имело бы место в пластине без трещины (ниже обозначено индексом ∞), и затухающего на бесконечности возмущения от трещины (обозначенного индексом c). Первое поле непрерывно при $y = 0$, для второго система (2.3) записывается в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Delta v_x^c &= \varepsilon (A_x^{nn} n_{xy} + A_x^{nm} m_{xy}) \\ \frac{1}{2} \Delta m_{yy}^c &= \varepsilon (A_x^{nm} n_{xy} + A_x^{mm} m_{xy}), \quad x \\ \Delta v_y^c &= \Delta w_{,y}^c = \Delta n_{xy}^c = \Delta q_y^c + \Delta m_{xy,x}^c = w^c = n_{yy}^c = 0 \end{aligned}$$

Решая заданную уравнениями (1.3), (3.1) для поля возмущения от трещины задачу теории растяжения и изгиба пластинок, можно показать, что

$$(3.2) \quad \begin{aligned} n_{xy}^c(x, 0) &= I, \quad m_{xy}^c(x, 0) = -\frac{1-\nu}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Delta m_{yy}^c(x')}{x' - x} dx' = -J \\ I &= \frac{1+\nu}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Delta v_x^c(x'), x'}{x' - x} dx', \quad J = \frac{3(1-\nu)}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\delta(x'), x'}{x' - x} dx' \end{aligned}$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения, введено обозначение

$$(3.3) \quad \delta(x) = \varepsilon (A_x^{nm} n_{xy} + A_x^{mm} m_{xy})$$

и использовано второе соотношение (3.1). При учете соотношений (3.1), (3.2) задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, вид которых аналогичен соответствующим уравнениям метода пружин [6]

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Delta v_x^c(x) - \varepsilon I A_x^{nn}(\zeta(x)) + \varepsilon J A_x^{nm}(\zeta(x)) &= \\ &= \varepsilon [A_x^{nn}(\zeta(x)) n_{xy}^\infty(x, 0) + A_x^{nm}(\zeta(x)) m_{xy}^\infty(x, 0)] \\ \delta(x) - \varepsilon I A_x^{nm}(\zeta(x)) + \varepsilon J A_x^{mm}(\zeta(x)) &= \\ &= \varepsilon [A_x^{nm}(\zeta(x)) n_{xy}^\infty(x, 0) + A_x^{mm}(\zeta(x)) m_{xy}^\infty(x, 0)] \end{aligned}$$

Таким образом, если известны напряжения в пластине без трещины, задача сводится к решению двух сингулярных уравнений (3.4), которые могут быть решены численно (например, методом механических квадратур [8]), после чего, найдя из уравнения (3.3) и первого уравнения (3.1) величины $n_{xy}(x, 0)$, $m_{xy}(x, 0)$, можно по формулам (2.4), (2.5) найти величины K_{III} и $\delta W / \delta S$, определяющие возможность и скорость роста трещины в рассматриваемом случае.

В качестве конкретного примера была рассмотрена полуэллиптическая трещина $\zeta(x) = \chi \sqrt{1-x^2}$ при однородной сдвиговой нагрузке ($n_{xy}^\infty(x, 0) = n_{xy}^\infty = \text{const}$, $m_{xy}^\infty(x, 0) = 0$). Уравнения (3.4) были решены приближенно методом механических квадратур на ЭВМ при разных значениях ε и χ , характеризующих вытянутость и относительную глубину трещины. При этом согласно (2.4), (2.7) в наиболее, по-видимому, опасной (с точки зрения роста трещины) точке контура, соответствующей $x = 0$, имеем $K_I = K_{II} = 0$ (из симметрии задачи) и

$$(3.5) \quad K_{III} = K^\circ K_{III}^n(\chi) R_{III}^n(\varepsilon, \chi, \nu) n_{xy}^\infty(0, 0) \\ (R_{III}^n(\varepsilon, \chi, \nu) = [n_{xy}(0, 0) + m_{xy}(0, 0) F(\sin^{1/2}\pi\chi)]/n_{xy}^\infty(0, 0))$$

где R_{III}^n — безразмерный коэффициент, отражающий влияние пространственной геометрии задачи. Графики его зависимости от ε при $\nu = 0,3$ изображены на фиг. 4.

Результаты расчетов показывают, что с уменьшением вытянутости трещины (т. е. с ростом ε) коэффициент интенсивности K_{III} убывает, причем для достаточно глубоких трещин весьма существенно, что следует учитывать при расчетах прочности конструкций с трещинами рассматриваемого вида. Исключение составляют лишь трещины весьма малой глубины ($\chi \approx 0,1$ и менее), для которых расчет показывает, что в результате воздействия, обусловленного наличием трещины изгибающего момента m_{xy} коэффициент K_{III} с увеличением ε незначительно возрастает (на доли процента).

Полученные результаты для не слишком «мелких» трещин весьма сходны с результатами для трещин отрыва [5—7], но по сравнению со случаем отрывной трещины коэффициент K_{III} с ростом χ убывает несколько медленнее, чем K_I .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
2. Колос А. В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 771—781.
3. Gregory R. D., Wan F. Y. M. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elasticity. 1984. V. 14. No. 1. P. 27—64.
4. Rice J. R., Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1972. V. 39. No. 1. P. 185—194.
5. Rice J. R. The line-spring model for surface flaws // The surface crack: Physical problems and computational solutions. N. Y.: ASME. 1972. P. 171—185.
6. Delale F., Erdogan F. Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or axial part-through crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. No. 1. P. 97—102.
7. Yashi O. S., Erdogan F. A pressurized cylindrical shell with a fixed end which contains an axial part-through or through crack // Intern. J. Fracture. 1985. V. 28. No. 3. P. 161—187.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев.: Наук. думка. 1976. 443 с.