

УДК 539.3 : 534.1

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

Срубщик Л. С., Столяр А. М., Цибулин В. Г.

С применением метода пограничного слоя [1, 2] строятся полные асимптотические разложения решения двумерной задачи о нелинейных колебаниях упругой цилиндрической панели со свободными криволинейными границами в случае, когда параметр  $\delta$ , равный отношению длин закрепленной и свободной сторон, достаточно мал. Главный член разложений для функции прогиба определяется из известного нелинейного интегродифференциального уравнения колебаний арки. Невязки в выполнении краевых условий на закрепленных границах оказываются более высокого порядка малости относительно  $\delta$  и компенсируются функциями пограничного слоя, которые определяются из линейных краевых задач для бигармонического оператора в полуполосе. Проводятся расчеты при помощи метода конечных разностей для упругих, упруго-пластических цилиндрических панелей, арок, прямоугольных пластин под действием мгновенно приложенной ступенчатой поперечной нагрузки, устанавливаются пределы применимости одночленного разложения.

Вопросы предельного перехода от трехмерных уравнений теории упругости к двумерным в случае тонких областей исследовались для нелинейных задач в работах [3—5].

**1. К постановке задачи.** Уравнения нелинейных колебаний упругой прямоугольной цилиндрической панели вместе с начальными и граничными условиями [6] можно записать в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \Delta_1^2 w + \delta^4 \partial_t^2 w - k \delta^2 \partial_y^2 \Phi = \delta^4 q(x, t) + \delta^2 L(w, \Phi)$$

$$\Delta_1^2 \Phi + \frac{1}{2} \alpha \delta^2 L(w, w) + \alpha k \delta^2 \partial_y^2 w = 0$$

$$(1.2) \quad [w, \partial_t w]_{t=0} = 0$$

$$(1.3) \quad [\partial_x^2 \Phi, \partial_x \partial_y \Phi, \partial_y^2 w + \nu \delta^2 \partial_x^2 w, \partial_y^3 w + (2 - \nu) \delta^2 \partial_x^2 \partial_y w]_{y=\pm 1} = 0$$

$$(1.4) \quad [w, \partial_x^2 w, \delta^2 \partial_x^2 \Phi - \nu \partial_y^2 \Phi, \delta^2 \partial_x^3 \Phi + (2 + \nu) \partial_x \partial_y^2 \Phi]_{x=\pm 1} = 0$$

$$\left( \Delta_1 = \partial_y^2 + \delta^2 \partial_x^2, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \delta = \frac{a_2}{a_1} \right)$$

Размерные и безразмерные величины связаны формулами

$$(1.5) \quad x_1 = a_1 x, \quad x_2 = a_2 y, \quad W = a_1 w, \quad F = D \Phi, \quad \tau = ct$$

$$c^2 = \rho h a_1^4 D^{-1}, \quad \alpha = E h a_1^2 D^{-1}, \quad k = a_1 R^{-1}, \quad Q = q D a_1^{-3}$$

$$(D = E h^3 [12(1 - \nu^2)]^{-1})$$

Здесь  $W$  — прогиб панели,  $F$  — функция усилий,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $h$  — толщина панели,  $R$  — радиус кривизны в направлении  $x_2$ ,  $\rho$  — плотность материала. Предполагается, что поперечная нагрузка  $Q$  — функция от продольной координаты  $x_1$  и времени  $\tau$ . В плане панель занимает прямоугольник  $|x_\beta| \leq a_\beta$ ,  $\beta = 1, 2$ . Граничные условия (1.3) отвечают свободному краю, (1.4) — неподвижной шарнирной опоре.

Наряду с задачей (1.1)—(1.4) рассматривается нелинейное интегродифференциальное уравнение колебаний круговой арки, записанное ниже

в безразмерном виде

$$(1.6) \quad (1 - \nu^2) \partial_x^4 w + \partial_t^2 w - \frac{\alpha}{2} (k + \partial_x^2 w) \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} (\partial_x w)^2 - kw \right] dx = q$$

$$[w, \partial_t w]_{t=0} = 0, \quad [w, \partial_x^2 w]_{x=\pm 1} = 0$$

2. Построение асимптотических разложений. В системе уравнений (1.1)—(1.4) естественный малый параметр  $\delta$  входит как множитель перед частью старших производных. Таким образом, возникает задача о построении асимптотики при  $\delta \rightarrow 0$ .

Асимптотические разложения строятся в виде

$$(2.1) \quad w = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \left[ w_m(x, y, t) + u_m \left( \frac{1+x}{\delta}, y, t \right) + v_m \left( \frac{1-x}{\delta}, y, t \right) \right]$$

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \left[ \Phi_m(x, y, t) + \varphi_m \left( \frac{1+x}{\delta}, y, t \right) + \psi_m \left( \frac{1-x}{\delta}, y, t \right) \right]$$

Функции  $w_m, \Phi_m$  находятся при помощи первого итерационного процесса [1]. Для этого решение ищется в виде

$$(2.2) \quad \{w, \Phi\} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \{w_m, \Phi_m\}$$

Подставляем (2.2) в (1.1)—(1.4) и собираем коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$ . Приравнявая нулю коэффициенты при  $\delta^0$  и  $\delta^1$ , для определения  $w_0, \Phi_0$  и  $w_1, \Phi_1$  получаем

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \partial_y^4 w_m = 0; \quad [\partial_y^2 w_m, \partial_y^3 w_m]_{y=\pm 1} = 0; \quad [w_m, \partial_x^2 w_m]_{x=\pm 1} = 0; \\ m = 0, 1 \\ \partial_y^4 \Phi_m = 0; \quad [\partial_x^2 \Phi_m, \partial_x \partial_y \Phi_m]_{y=\pm 1} = 0; \quad [\partial_y^2 \Phi_m, \partial_x \partial_y^2 \Phi_m]_{x=\pm 1} = 0 \end{aligned}$$

Разыскивая  $w_m, \Phi_m$  в виде

$$\{w_m, \Phi_m\} = \sum_{j=0}^3 y^j \{w_{m,j}, \Phi_{m,j}\}$$

из (2.3) имеем

$$(2.4) \quad w_m = w_{m,0}(x, t) + y w_{m,1}(x, t), \quad [w_{m,0}, \partial_x^2 w_{m,0}]_{x=\pm 1} = 0, \quad \Phi_m = 0$$

Функция  $w_{0,0}$  пока не известна и будет определена ниже. Функция  $\Phi_0$  принята равной нулю, поскольку из постановки задачи (1.1)—(1.4) следует, что функция  $\Phi$  определяется с точностью до линейных по  $x$  и  $y$  слагаемых. Продолжая итерационный процесс, можно получить, что функции  $w_{m,j}, \Phi_{m,j}$  при нечетных значениях  $m$  и  $j$  обращаются в нуль. Поэтому далее в работе речь идет сразу о вычислении функций  $w_{m,j}, \Phi_{m,j}$  для четных  $m$  и  $j$ .

Приравнявая нулю выражения при  $\delta^2$  и учитывая (2.4), выводим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} w_2 = w_{2,0}(x, t) + y^2 w_{2,2}(x, t); \quad 2w_{2,2} = -\nu \partial_x^2 w_{0,0}; \\ \Phi_2 = C_2(t) y^2 \end{aligned}$$

Функция  $w_{2,0}$  пока не известна и будет определена ниже. На этом шаге первого итерационного процесса условия на границе  $x = \pm 1$  не выполняются. Возникающие здесь невязки компенсируются далее при помощи функций пограничного слоя.

Для определения  $C_2(t)$  применим известное тождество, связывающее функции  $\Phi$  и  $w$  при неподвижном закреплении границы  $x = \pm 1$  в про-

дольном направлении

$$(2.6) \quad \int_{-1}^1 (\partial_y^2 \Phi - \nu \delta^2 \partial_x^2 \Phi) dx = \alpha \delta^2 \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} (\partial_x w)^2 - kw \right] dx$$

При помощи (2.2), (2.5) из (2.6) выводим

$$(2.7) \quad C_2(t) = \frac{\alpha}{4} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} (\partial_x w_{0,0})^2 - kw_{0,0} \right] dx$$

Приравнявая нулю выражения при  $\delta^4$ , получим систему уравнений

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \partial_y^4 w_4 + 2\partial_x^2 \partial_y^2 w_2 + \partial_x^4 w_0 + \partial_t^2 w_0 - (k + \partial_x^2 w_{0,0}) \partial_y^2 \Phi_2 &= q \\ [\partial_y^2 w_4 + \nu \partial_x^2 w_2, \quad \partial_y^3 w_4 + (2 - \nu) \partial_x^2 \partial_y w_2]_{y=\pm 1} &= 0 \\ \partial_y^4 \Phi_4 + \alpha (k + \partial_x^2 w_{0,0}) \partial_y^2 w_2 = 0, \quad [\partial_x^2 \Phi_4, \partial_y \partial_x \Phi_4]_{y=\pm 1} &= 0 \end{aligned}$$

Из (2.8) находим

$$(2.9) \quad \begin{aligned} w_4 &= \sum_{m=0}^2 y^{2m} w_{4,2m}(x, t), \quad w_{4,4} = \frac{\nu - 2}{12} \partial_x^2 w_{2,2} \\ w_{4,2} &= (1 - \nu) \partial_x^2 w_{2,2} - \frac{\nu}{2} \partial_x^2 w_{2,0} \end{aligned}$$

Здесь  $w_{4,0}$  — также неизвестная функция. Из (2.8), (2.9) с учетом (2.5), (2.7) для определения главного члена разложения (2.2) получаем интегродифференциальное уравнение (1.6), нулевые начальные и граничные условия для которого выводятся из (1.2), (1.4) при помощи (2.4).

Переходя в (1.6) к размерным переменным по формулам (1.5), приходим к известному уравнению колебаний арки. Далее из (2.5), (2.7) находим  $\Phi_2$  — главный член разложения (2.2) для функции  $\Phi$ .

Перейдем к построению следующих членов асимптотики. Можно показать, что  $w_{2m}$ ,  $\Phi_{2m}$  определяются в виде

$$\{w_{2m}, \Phi_{2m}\} = \sum_{j=0}^m y^{2j} \{w_{2m, 2j}(x, t), \Phi_{2m, 2j}(x, t)\}$$

В частности, из (2.5), (2.6), (2.8) имеем

$$\Phi_{4,0} = \Phi_{4,4} = \frac{\alpha \nu f}{24} \partial_x^2 w_{0,0}; \quad \Phi_{4,2} = -2\Phi_{4,4} + \int_{-1}^1 \Phi_{4,4} dx + \frac{g}{2}$$

Для определения  $w_{2,0}$  выводим

$$(2.10) \quad \begin{aligned} (1 - \nu^2) \partial_x^4 w_{2,0} + \partial_t^2 w_{2,0} - 2\Phi_{2,2} \partial_x^2 w_{2,0} - fg &= 2f \int_{-1}^1 \Phi_{4,4} dx + \\ + \frac{\nu}{6} \partial_x^2 q + \frac{2}{3} \nu^2 (1 - \nu) \partial_x^6 w_{0,0}, \quad w_{2,0}|_{x=\pm 1} &= 0 \\ \left( f = k + \partial_x^2 w_{0,0}; \quad g = -\frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 w_{2,0} f dx \right) \end{aligned}$$

Заметим, что в отличие от (1.6) уравнение (2.10) линейное. Приравнявая нулю выражения при  $\delta^{2m+2}$ ,  $\delta^{2m+4}$  ( $m = 2, 3, \dots$ ), для определения функций  $w_{2m}$ ,  $\Phi_{2m}$  получим

$$(2.11) \quad \begin{aligned} (1 - \nu^2) \partial_x^4 w_{2m,0} + \partial_t^2 w_{2m,0} - 2f\Phi_{2m+2} - 2\Phi_{2,2} \partial_x^2 w_{2m,0} &= l_{2m,0} \\ \Phi_{2m+2,2} = C_{2m+2}(t) - \sum_{j=2}^{m+1} j\Phi_{2m+2,2j}; \quad \Phi_{2m+2,0} &= \sum_{j=2}^{m+1} (j-1)\Phi_{2m+2,2j} \end{aligned}$$

Функции  $l_{2m,0}$ ,  $\Phi_{2m+2,2j}$  ( $j = 2, \dots, m+1$ ) найдены на предыдущих шагах первого итерационного процесса, а функции  $w_{2m,2j}$  вычисляются через производные от функции  $w_{0,0}$ ,  $w_{2,0}$ ,  $\dots$ ,  $w_{2m-4,0}$ . Функции  $C_{2m+2}(t)$  ( $m > 1$ ) определяются из тождества (2.6) при подстановке разложений (2.1).

Функции пограничного слоя  $u_m$ ,  $\varphi_m$  ( $v_m, \psi_m$ ), сосредоточенные в окрестности  $x = -1$  ( $x = 1$ ), компенсируют невязки в выполнении граничных условий (1.4). Они определяются при помощи второго итерационного процесса [1]. При этом одновременно получают граничные значения для  $\partial_x^2 w_{2,0}$ ,  $w_{2m,0}$ ,  $\partial_x^2 w_{2m,0}$  ( $m \geq 2$ ), необходимые для замыкания уравнений (2.10), (2.11). Подставляем (2.1) в (1.1)–(1.4), учитываем результаты первого итерационного процесса, делаем замену переменных  $x = -1 + \delta\xi$  ( $x = 1 + \delta\xi$ ) и собираем коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$ . Приравняв нулю коэффициенты при  $\delta^0$ , для  $u_0, \varphi_0$  находим систему нелинейных уравнений с нулевой правой частью, откуда получаем  $u_0 = \varphi_0 = 0$ . Приравняв нулю коэффициенты при  $\delta^1, \delta^2, \delta^3$ , выводим

$$(2.12) \quad u_1 = \varphi_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \Delta_2^2 \varphi_2 = 0, \quad [\partial_\xi^2 \varphi_2, \partial_\xi \partial_y \varphi_2]_{y=\pm 1} = 0$$

$$A\varphi_2|_{\xi=0} = 2\nu C_2(t), \quad B\varphi_2|_{\xi=0} = 0, \quad [A\varphi_2, B\varphi_2]_{\xi=l \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$(2.13) \quad \Delta_2^2 u_4 = k\partial_y^2 \varphi_2, \quad [u_4, \partial_\xi^2 u_4]_{\xi=l \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$[\partial_y^2 u_4 + \nu\partial_\xi^2 u_4, \partial_y^3 u_4 + (2-\nu)\partial_\xi^2 \partial_y u_4]_{y=\pm 1} = 0$$

$$u_4|_{\xi=0} = -w_4|_{x=-1}, \quad \partial_\xi^2 u_4|_{\xi=0} = -\partial_x^2 w_2|_{x=-1}$$

$$(\Delta_2 = \partial_\xi^2 + \partial_y^2, \quad A = \partial_\xi^2 - \nu\partial_y^2,$$

$$B = \partial_\xi^3 + (2+\nu)\partial_\xi \partial_y^2, \quad l = 2/\delta)$$

Отметим, что краевые задачи для  $u_m, \varphi_m$  при  $m \geq 1$  являются линейными. Функции  $v_m, \psi_m$  находятся аналогично.

Вычисление функции пограничного слоя  $u_4$  из задачи (2.13) проиллюстрируем для случая прямоугольной пластины ( $k = 0$ ). Решение строим в виде

$$u_4 = a_0 e^{-s_0 \xi} F_0(y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-s_m \xi} F_m(y)$$

Функции П. Ф. Папковича  $F_m(y)$  [7] определяются из краевой задачи (штрих означает производную по  $y$ )

$$(2.14) \quad F_m^{IV} + 2s_m^2 F_m'' + s_m^4 F_m = 0$$

$$[F_m'' + \nu s_m^2 F_m, F_m''' + (2-\nu)s_m^2 F_m']_{y=\pm 1} = 0$$

( $s_0, s_m$  — соответственно действительный и комплексные корни уравнения  $\Psi(s) \equiv (3+\nu)\sin 2s - (1-\nu)2s = 0$ ).

При вычислении  $a_m$  из граничных условий (2.13) ставится задача представления двух действительных функций  $f_1 = -w_4(-1, y, t)$  и  $f_2 = -\partial_x^2 w_2(-1, y, t)$  в виде рядов

$$(2.15) \quad \{f_1, f_2\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{1, s_m^2\} a_m F_m(y)$$

Здесь время  $t$  играет роль параметра.

Для первой краевой задачи вопросы полноты системы элементарных решений П. Ф. Папковича для бигармонического оператора в полуполосе исследовались в [8–10]. Условия сходимости рядов (2.15) при  $F_m(\pm 1) = F_m'(\pm 1) = 0$  получены в [11], а для задачи (2.14) — в [12]. При по-

мощи этих условий находим недостающее граничное условие для задачи (2.10) и одно — для задачи (2.11) при  $m = 2$ .

Чтобы получить начальные условия при  $t = 0$  для функций  $w_{2m,0}$ , подставляем (2.1) в (1.2), собираем коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$  и приравниваем их нулю. В частности, коэффициент при  $\delta^0$  дает для  $w_{0,0}$  начальные условия, записанные в (1.6). При этом должны выполняться условия согласования

$$q(\pm 1, 0) = \partial_x^2 q(\pm 1, 0) = \partial_t q(\pm 1, 0) = 0$$

Коэффициенты при  $\delta^2$  и  $\delta^4$  приводят соответственно к нулевым начальным условиям для функций  $w_{2,0}$ ,  $\partial_t w_{2,0}$  и  $w_{4,0}$ ,  $\partial_t w_{4,0}$ . Аналогичные условия согласования на старшие производные от  $q$  добавляются при построении следующих членов разложения.

После вычисления главных членов разложения (2.1) процесс построения следующих членов асимптотики продолжается аналогично: поочередно определяются функции первого и второго итерационных процессов. При решении погранслойных задач одновременно определяются граничные значения функций первого итерационного процесса  $w_{2m,0}$ ,  $\partial_x^2 w_{2m,0}$ .

*Замечания 1°.* В случае жесткого защемления краев панели  $x_1 = \pm a_1$  ( $[w, \partial_x w]_{x=\pm 1} = 0$ ) главный член разложения определяется также из уравнения колебаний арки, но с краевыми условиями  $[w, \partial_x w]_{x=\pm 1} = 0$ .

*2°.* В случае шарнирного закрепления или жесткого защемления границ  $x_2 = \pm a_2$  нет предельного перехода от уравнений колебаний цилиндрической панели к уравнению колебаний арки.

*3°.* Изложенный алгоритм можно перенести на случай нагрузки вида  $Q(x_1, -x_2, \tau) = Q(x_1, x_2, \tau)$ .

**3. Линейные колебания прямоугольной пластины.** Применяя метод п. 2 к линейному уравнению колебаний прямоугольной пластины с двумя шарнирно закрепленными и двумя свободными сторонами

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 W + \rho h \partial_\tau^2 W &= Q(x_1, \tau), \quad [W, \partial_\tau W]_{\tau=0} = 0 \\ [\partial_2^2 W + \nu \partial_1^2 W, \partial_2^3 W + (2-\nu) \partial_1^2 \partial_2 W]_{x_2=\pm a_2} &= 0; \\ [W, \partial_1^2 W]_{x_1=\pm a_1} &= 0 \\ \left( \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}; \partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta}; \beta = 1, 2; \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 \right) \end{aligned}$$

получаем, что главный член асимптотического разложения определяется из известного линейного уравнения колебаний балки

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{Eh^3}{12} \partial_1^4 W_0 + \rho h \partial_\tau^2 W_0 &= Q \\ [W_0, \partial_\tau W_0]_{\tau=0} = 0, \quad [W_0, \partial_1^2 W_0]_{x_1=\pm a_1} &= 0 \end{aligned}$$

Для оценки эффективности асимптотического метода задачи (3.1), (3.2) исследовались численно для мгновенно приложенной в момент  $\tau = 0$  постоянной ступенчатой нагрузки с амплитудой  $Q_0 = 5$  КПа. Для обеих задач применялась явная схема метода конечных разностей. Геометрические и механические параметры принимались следующими:  $E = 210$  ГПа;  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 0,3$ ;  $h = 1$  мм;  $a_2 = 20$  мм;  $\delta = a_2/a_1$ .

На фиг. 1 представлен график

$$\kappa(\delta) = 200 \frac{|1-\gamma|}{|1+\gamma|}, \quad \gamma = \frac{W(0, 0, T_\delta)}{W_0(0, T_0)}$$

где  $T_\delta$ ,  $T_0$  — моменты времени, на которые приходится первый максимум функции прогиба для пластин с параметром  $\delta$  и балки соответственно. Кривая 1 отвечает жесткому защемлению, а кривая 2 — шарнирному закреплению краев  $x_1 = \pm a_1$ . В частности, значение  $\kappa(0,5)$  равно 4,3% и 8,7% соответственно.

$$\rho h \partial^2 W = \partial + \partial^\alpha (M^{\alpha\beta} \partial W) - k^{\alpha\beta} N^{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (4.1)$$

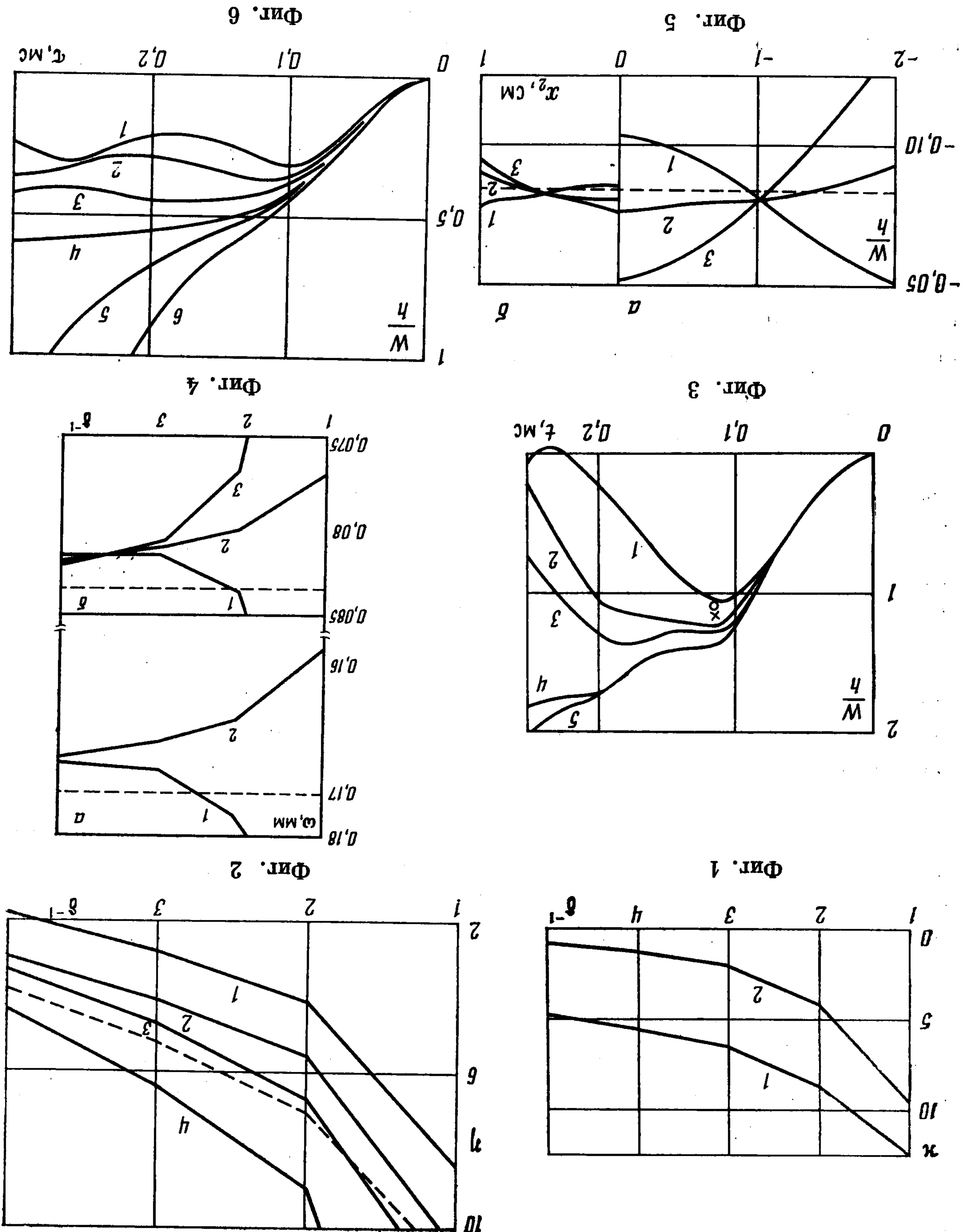
$$\rho h \partial^2 U^\alpha = \partial^\beta N^{\alpha\beta}; \quad \{N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}\} = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma^{\alpha\beta} \{1, z\} dz$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}) \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\partial^\alpha U^\beta + \partial^\beta U^\alpha + \partial^\alpha W \partial^\beta W] + k^{\alpha\beta} W - z \partial^\alpha \partial^\beta W$$

4. Динамическое прощелкивание упругой цилиндрической панели. Рассмотрим уравнения нелинейных колебаний упругой цилиндрической панели с учетом инерционных моментов в тангенциальных направлениях [6]

Отметим, что для задачи о равновесии прямоугольной пластины, сжатой в продольном направлении, вопрос о замене ее в расчетах сжатым стержнем рассматривался в [13] (с. 255), [14] (с. 16).



$$[W, \partial_\tau W, U_\alpha, \partial_\tau U_\alpha]_{\tau=0} = 0, \quad [W, M_{11}, U_\alpha]_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$[\partial_2 M_{22} + 2\partial_1 M_{12}, M_{22}, N_{12}, N_{22}]_{x_2=\pm a_2} = 0, \quad k_{22} = R^{-1}, \quad k_{1\alpha} = 0$$

Здесь  $U_\alpha$  — тангенциальные смещения срединной поверхности,  $N_{\alpha\beta}$  и  $M_{\alpha\beta}$  — соответственно усилия и моменты. Краевые условия на  $x_1 = \pm a_1$  отвечают неподвижному шарнирному закреплению, а краевые условия на  $x_2 = \pm a_2$  — свободному краю.

Применяя метод асимптотического интегрирования из п. 2 к задаче (4.1), для определения главных членов разложения получим уравнения колебаний арки [15]

$$(4.2) \quad \rho h \partial_\tau^2 W_0 = Q + \partial_1 (\partial_1 M + N \partial_1 W_0) - \frac{N}{R}; \quad \rho h \partial_\tau^2 U_{1,0} = \partial_1 N$$

$$\{N, M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \{1, z\} dz, \quad \sigma = E \varepsilon$$

$$\varepsilon = \partial_1 U_{1,0} + \frac{1}{2} (\partial_1 W_0)^2 + \frac{W_0}{R} - z \partial_1^2 W_0$$

$$[W_0, \partial_\tau W_0, U_{1,0}, \partial_\tau U_{1,0}]_{\tau=0} = 0; \quad [W_0, M, U_{1,0}]_{x_1=\pm a_1} = 0$$

Для решения задач (4.1), (4.2) применим явную схему метода конечных разностей. С учетом симметрии, имеющейся в задаче (4.1), можно рассмотреть четверть панели  $(x_1, x_2) \in [0, a_1] \times [0, a_2]$  и ввести на ней основную сетку

$$\left\{ (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) \mid x_{\alpha, i_\alpha} = i_\alpha g_\alpha; i_\alpha = 0, 1, \dots, n_\alpha; g_\alpha = \frac{a_\alpha}{n_\alpha}; \alpha = 1, 2 \right\}$$

и вспомогательную сетку

$$\left\{ (x_{1, i_1-1/2}, x_{2, i_2-1/2}) \mid x_{\alpha, i_\alpha-1/2} = \frac{1}{2} (x_{\alpha, i_\alpha} + x_{\alpha, i_\alpha-1}); i_\alpha = 1, 2, \dots, n_\alpha \right\}$$

Прогибы, деформации, напряжения, усилия и моменты будем определять в узлах основной сетки, а тангенциальные смещения срединной поверхности — в узлах вспомогательной сетки.

Геометрические и механические параметры принимались следующими:  $a_1 = 20$  мм;  $h = 1$  мм;  $R = 100$  мм;  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>;  $E = 210$  ГПа;  $\nu = 0,3$ . Расчеты для панели и арки проводились до момента времени  $\tau_0 = 300$  мкс с одинаковым шагом сетки по времени. Параметры сетки для задачи (4.1):  $n_1 = 2n_2 = 20$ . В задаче (4.2) рассматривался отрезок  $0 \leq x_1 \leq a_1$ , который разбивался на 20 равных элементов. В процессе расчетов колебаний панелей с различными значениями параметра  $\delta$  и арки определялись величины

$$\omega(\delta) = \max_{[0, \tau_0]} |W(0, 0, \tau)|, \quad \omega_a = \max_{[0, \tau_0]} |W_0(0, \tau)|, \quad \eta(\delta) = 100 \left| \frac{\omega(\delta) - \omega_a}{\omega(\delta)} \right|$$

Здесь  $\omega(\delta)$  и  $\omega_a$  — максимумы прогибов центра панели и арки соответственно.

На фиг. 2 представлены результаты решения задач (4.1), (4.2) для мгновенно приложенной в момент  $\tau = 0$  постоянной ступенчатой нагрузки  $Q(x_1, \tau) = Q_0$ . Кривые 1—4 построены для зависимости  $\eta(\delta)$  соответственно при следующих значениях  $Q_0$ : 0,5; 2; 3; 3,8 МПа. Видно, что решение уравнения арки хорошо описывает колебания панели. Например, при  $\delta = 0,5$  и  $Q_0 \leq 2$  МПа расхождение в результатах не превышает 5%.

На фиг. 3 приведены графики зависимости от времени прогиба панели  $W/h$  в точке  $(0, 0)$  и арки  $W_0/h$  при  $x_1 = 0$ . Кривые 1, 2 и 4 относятся к панели с  $\delta = 0,5$  при  $Q_0 = 3,8; 4; 4,1$  МПа соответственно. Кривые 3, 5 получены из расчета панели с  $\delta = 0,25$  и арки при  $Q_0 = 4$  МПа. Кружком и крестиком отмечен максимум прогиба для панели с  $\delta = 0,25$  и арки для  $Q_0 = 3,8$  МПа. На основе критерия Будянского — Рота [16] с точностью до 0,1 МПа для панелей с различными  $\delta$  были найдены критические нагрузки (КН) динамического прощелкивания  $Q_d$ :  $Q_d|_{\delta=1} = Q_d(1) = 4,2$  МПа;  $Q_d(0,5) = Q_d(0,35) = Q_d(0,25) = 4,1$  МПа. Для арки было получено  $Q_d = 4$  МПа. Заметим, что КН динамического прощелкивания — «устойчивая» характеристика упругой системы. Несмотря на то что с приближением нагрузки  $Q_0$  к КН  $Q_d$  отмечается возрастание  $\eta(\delta)$  (см. фиг. 2), а функции  $W(0, 0, \tau)$  и  $W_0(0, \tau)$  существенно различаются

по амплитуде и частоте колебаний (см. фиг. 3), величина самой КН определяется по арочной теории с расхождением в 2,5%.

На фиг. 2 штрихами отмечены результаты расчетов панелей и арки с жестко заземленными краями  $x_1 = \pm a_1$  под действием нагрузки  $Q_0 = 2$  МПа. По сравнению со случаем шарнирного закрепления соответствующие значения функции  $\eta$  ( $\sigma$ ) здесь несколько выше. Для КН динамического прощелкивания жестко заземленной панели получено  $Q_d(1) = 4,4$  МПа,  $Q_d(0,5) = Q_d(0,35) = Q_d(0,25) = 4,3$  МПа. Для арки КН динамического прощелкивания равна 4,2 МПа.

Влияние распределения поперечной нагрузки по ширине панели (координата  $x_2$ ) можно оценить из фиг. 4, на которой приведена зависимость  $\omega$  ( $\delta$ ). Кривые 1—3 получены из расчета панелей при нагрузках  $Q_1 = 2Q_0(1 - |x_2|/a_2)$ ,  $Q_2 = Q_0$ ,  $Q_3 = 2Q_0|x_2|/a_2$ . Штриховая линия отвечает максимуму прогиба арки  $\omega_a$  при нагрузке  $Q_0$ . На фиг. 4, а приведены результаты для  $Q_0 = 1$  МПа, а на фиг. 4, б — для  $Q_0 = 0,5$  МПа. Видно, что с уменьшением параметра  $\delta$  резко падает влияние неравномерности распределения нагрузки по ширине панели и уже при  $\delta = 0,35$  им можно пренебречь.

На фиг. 5 дано распределение функции прогиба по линии  $x_1 = 0$  в момент времени  $\tau = 70$  мкс для панели с  $\delta = 1$  (а) и  $\delta = 0,5$  (б), вычисленное для нагрузок  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  (соответственно кривые 1—3) при  $Q_0 = 0,5$  МПа. Штриховой линией нанесен прогиб арки в точке  $x_1 = 0$ . Видно, что уменьшение ширины увеличивает жесткость панели в направлении  $x_2$  и неравномерность приложения нагрузки слабо сказывается на результатах.

5. **Динамическое прощелкивание упругопластической цилиндрической панели.** Аналогичные п. 4 численные результаты получены в случае цилиндрической панели с теми же геометрическими и механическими параметрами, с пределом текучести  $\sigma_T = 0,24$  ГПа и тангенциальным модулем  $E_T = 2,1$  ГПа. Определяющие соотношения принимались согласно теории течения с кинематическим упрочнением [17]. С применением критерия Будянского—Рота для ступенчатой нагрузки с точностью до 0,1 МПа получены КН динамического прощелкивания  $Q_d(1) = Q_d(0,5) = 1,7$  МПа,  $Q_d(0,35) = Q_d(0,25) = 1,6$  МПа. Для арки найдено  $Q_d = 1,6$  МПа.

На фиг. 6 приведены графики прогиба арки  $W_0(0, \tau)/h$  и панели  $W(0, 0, \tau)/h$  для разных значений параметра  $\delta$  и нагрузки  $Q_0$ . Кривые 1 и 2 отвечают расчету с  $\delta = 0,5$  для  $Q_0 = 1,4$  МПа и  $Q_0 = 1,5$  МПа соответственно. Кривые 3—5 получены при  $Q_0 = 1,6$  МПа и соответствуют следующим значениям  $\delta$ : 1,0; 0,5; 0,25. График зависимости прогиба арки  $W_0(0, \tau)$  при нагрузке  $Q_0 = 1,6$  МПа обозначен цифрой 6. Видно, что неучет пластических свойств материала панели значительно завышает величину КН динамического прощелкивания. В то же время характер сходимости решения для панелей при уменьшающейся ширине к решению для арки аналогичен полученному в случае упругого поведения материала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук (УМН). 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3—122.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
3. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. М.: Мир. 1983. 172 с.
4. Sugimoto N. Nonlinear theory for flexural motions of thin elastic plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. No. 2. P. 377—390.
5. Кучеренко В. В., Попов В. А. Асимптотика решений задач теории упругости в тонких областях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 1. С. 58—61.
6. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
7. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335—339.
8. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всес. съезда по теорет. и прикл. механ. М.: Наука. 1966. С. 116—136.
9. Ворович И. И., Ковальчук В. Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 861—869.
10. Устинов Ю. А., Юдович В. И. О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 706—714.
11. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямо-

- угольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211—228.
12. Столяр А. М. Асимптотическое интегрирование уравнения колебаний длинной прямоугольной пластины // Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высш. шк. Естеств. науки. 1986. № 4. С. 46—50.
  13. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука. 1982. 568 с.
  14. Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 2. Механика упругих и абсолютно твердых тел. М.: Наука. 1986. 411 с.
  15. Столяр А. М., Цибулин В. Г. Асимптотическое интегрирование уравнений колебаний цилиндрических панелей // Тр. Всес. симпозиума «Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика. Кутаиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1985. С. 417—420.
  16. Budiansky B., Roth R. S. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells // 1962. TND-1510. NASA. P. 597—606.
  17. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. 1954. Т. 6. № 3. С. 314—325.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
24.VIII.1987