

УДК 539.383

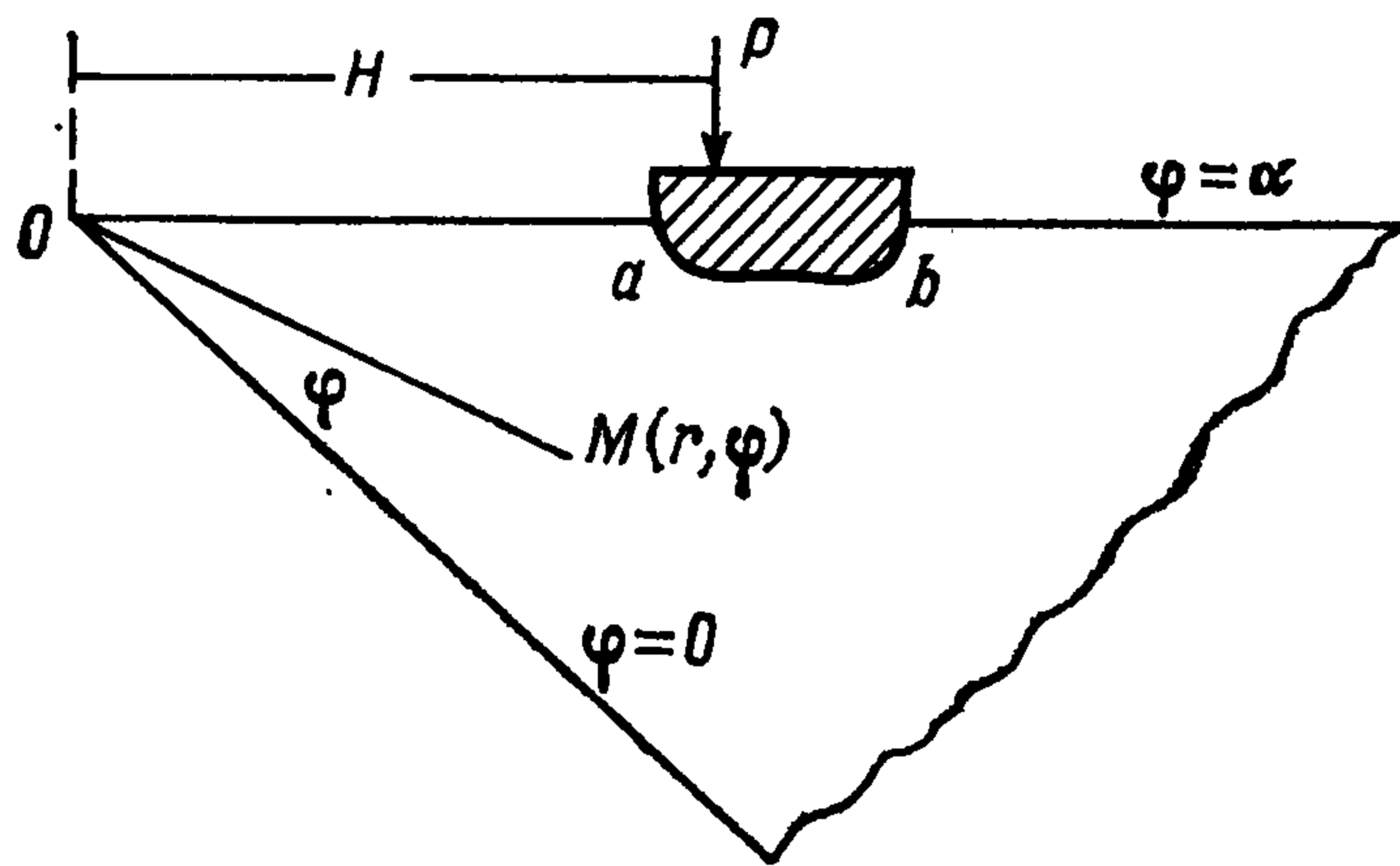
ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА

Александров В. М., Пожарский Д. А.

Путем обобщения асимптотического метода «малых λ » [1] изучается задача о вдавливании штампа с произвольным основанием в грань упругого клина с другой свободной гранью. Конкретно найдены решения для наклонного и параболического штампов. Для проверки точности асимптотических решений задача также исследована путем сведения к двум бесконечным алгебраическим системам уравнений второго рода. Результаты могут быть использованы для уточнения методики расчета на контактную прочность зубчатых передач. Ранее [2, 3] был изучен лишь случай штампа с плоским основанием, наименее интересный для приложений.

1. Рассмотрим задачу о плоской деформации упругого клина раствора α , в верхнюю грань которого силой P вдавливается жесткий штамп (фигура). Плечо приложения силы относительно вершины клина равно H , силы трения между поверхностями штампа и клина отсутствуют, нижняя грань клина не нагружена.

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\varphi(r, 0) &= \tau_{r\varphi}(r, 0) = \\ &= 0 \quad (0 < r < \infty) \\ \tau_{r\varphi}(r, \alpha) &= 0 \\ &(0 < r < \infty), \\ \sigma_\varphi(r, \alpha) &= 0 \quad (0 < r < a, \\ &b < r < \infty) \\ v(r, \alpha) &= -(\delta + \beta r - \\ &- f(r)) = -\delta(r) \quad (a \leq \\ &\leq r \leq b) \end{aligned}$$



Здесь $\delta + \beta r$ — жесткое перемещение штампа. Зона контакта определяется неравенством $a \leq r \leq b$, а форма основания штампа — функцией $f(r)$. Требуется определить $\sigma_\varphi(r, \alpha) = -q(r)$ при $a \leq r \leq b$, а также связь между величинами P и β .

Было получено [2] интегральное уравнение задачи относительно безразмерной функции контактных давлений $\varphi(x)$

$$(1.2) \quad \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g(x) \quad (|x| \leq 1)$$

$$(1.3) \quad K(t) = \int_0^\infty L(u, \alpha) \sin ut \, du - \frac{\pi B(\alpha)}{2}$$

$$(1.4) \quad L(u, \alpha) = (u \sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha u)(2 \operatorname{sh}^2 \alpha u - 2u^2 \sin^2 \alpha)^{-1}$$

Здесь

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \lambda &= 2 [\ln(b/a)]^{-1}, \quad x = \lambda \ln(r/a) - 1, \quad \varphi(x) = r q(r) \\ g(x) &= \theta r \delta'(r), \quad \theta = G(1-\nu)^{-1} \end{aligned}$$

(G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона). Таблица значений $B(\alpha)$ приведена в [2]. Безразмерный параметр λ характеризует относительное положение штампа на грани клина.

Для плоского при учете перекоса ($\beta \neq 0$), т. е. наклонного штампа

$$(1.6) \quad f(r) \equiv 0, \quad g(x) = k e^{(x+1)/\lambda}, \quad k = \beta a \theta$$

Для параболического штампа (R — радиус кривизны)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} f(r) &= r^2/(2R) - r(a+b)/(2R) + (a+b)^2/(8R) \\ g(x) &= me^{(x+1)/\lambda} - ne^{2(x+1)/\lambda} \\ m &= \theta a (\beta + (a+b)/(2R)), \quad n = \theta a^2/R \end{aligned}$$

Методом «больших λ » [1, 2] найдены следующие выражения для наклонного (1.8) и параболического (1.9) штампов:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} q(r) &= q_0 \left(\frac{P}{\pi} + \mu \frac{PA}{2} - \mu^2 \frac{Pa_0}{\pi} + \mu^3 \frac{k}{2} - \mu^4 \frac{Pa_1}{\pi} + \mu^5 \frac{k}{24} + \right. \\ &+ \lambda^{-1} \left(\mu^2 k + \mu^4 \frac{k}{6} \right) + \lambda^{-2} \left(\frac{Pa_0}{2\pi} + \mu \frac{PAa_0 + k}{4} - \left[\mu^2 \frac{Pa_1}{\pi} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \mu^3 \left(\frac{3}{4} PAa_1 + \frac{11k}{48} \right) \right] \right) + \lambda^{-3} \left(\mu^2 \frac{k}{12} - \frac{k}{2} \right) + \lambda^{-4} \left(\frac{7Pa_1}{8\pi} + \right. \\ &+ \left. \mu \left(\frac{1}{8} PAa_0^2 - \frac{3}{16} PAa_1 - \frac{17k}{192} + \frac{5a_0k}{16} \right) - \lambda^{-5} \frac{5k}{48} \right) + O(\lambda^{-6}) \end{aligned}$$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} q(r) &= q_0 \left(\frac{P}{\pi} + \mu \frac{PW}{2} - \mu^2 \frac{Pa_0}{\pi} + \mu^3 \left(\frac{m}{2} - 2n \right) - \right. \\ &- \mu^4 \frac{Pa_1}{\pi} + \mu^5 \left(\frac{m}{24} - \frac{2n}{3} \right) + \lambda^{-1} \left(\mu^2 (m - 4n) + \right. \\ &+ \left. \mu^4 \left(\frac{m}{6} - \frac{8n}{3} \right) \right) + \lambda^{-2} \left(\frac{Pa_0}{2\pi} + \mu \left(\frac{PWa_0 + m}{4} - n \right) - \right. \\ &- \mu^2 \frac{Pa_1}{\pi} + \mu^3 \left(\frac{3}{4} PWa_1 + \frac{11m}{48} - \frac{11n}{3} \right) + \lambda^{-3} \left(\frac{5n}{4} - \frac{m}{2} + \right. \\ &+ \left. \mu^2 \left(\frac{m}{12} - \frac{4n}{3} + \frac{3na_0}{4} \right) \right) + \lambda^{-4} \left(\frac{7Pa_1}{8\pi} + \mu \left(\frac{1}{8} PWa_0^2 - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{3}{16} PWa_1 - \frac{17m}{192} - \frac{223n}{192} + \frac{5a_0m}{16} + \frac{7a_0n}{16} \right) \right) + \\ &+ \lambda^{-5} \left(\frac{95n}{48} - \frac{5m}{48} - \frac{3a_0n}{8} \right) + O(\lambda^{-6}) \end{aligned}$$

$$q_0 = q_0(r) = \left(r \sqrt{\ln \frac{b}{r} \ln \frac{r}{a}} \right)^{-1}, \quad \mu = \mu(r) = \ln \frac{r}{\sqrt{ab}}$$

$$A = B + \frac{2k}{P}, \quad W = B + 2 \frac{m-n}{P}$$

Можно убедиться, что при $\beta = 0$ решение (1.8) совпадает с формулой (3.13) в [2], а при $R = \infty$ (1.9) совпадает с (1.8).

Для практического использования формул (1.8), (1.9) ниже даны значения $a_0(\alpha)$, $a_1(\alpha)$:

$12\alpha/\pi$	1	2	4	6	8	10	18
$-a_0$	498	56,1	4,98	0,876	0,207	$9,29 \cdot 10^{-2}$	$4,22 \cdot 10^{-2}$
a_1	667	34,7	1,30	0,122	0,0134	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$0,399 \cdot 10^{-3}$

2. Изложим модифицированный метод «малых λ » [1]. Разобьем (1.2), (1.3) на систему двух интегральных уравнений:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & - \int_{-1}^{\infty} \varphi_1(\xi) \left(l \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) + \frac{\pi B}{2} \right) d\xi = \\ & = \pi \lambda g_1(x) - \int_{-\infty}^{-1} \varphi_2(\xi) \left(l \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) + \frac{\pi B}{2} \right) d\xi \quad (-1 \leq x < \infty) \\ & \int_{-\infty}^1 \varphi_2(\xi) \left(l \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) + \frac{\pi B}{2} \right) d\xi = \\ & = -\pi \lambda g_2(x) - \int_1^{\infty} \varphi_1(\xi) \left(l \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) + \frac{\pi B}{2} \right) d\xi \quad (-\infty < x \leq 1) \end{aligned}$$

Здесь

$$l(t) = \int_0^{\infty} L(u, \alpha) \sin ut \, du$$

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x), \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad (|x| \leq 1)$$

Предположим, что

$$g_1(x) = O(e^{-\alpha_1 x}), \quad \varphi_1(x) = O(e^{-\beta_1 x}), \quad x \rightarrow +\infty$$

$$g_2(x) = O(e^{\alpha_2 x}), \quad \varphi_2(x) = O(e^{\beta_2 x}), \quad x \rightarrow -\infty$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — положительные постоянные. Введем обозначения

$$\varphi_1(x) = \psi_+\left(\frac{1+x}{\lambda}\right), \quad \varphi_2(x) = \psi_-\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)$$

$$g_1(x) = y_+\left(\frac{1+x}{\lambda}\right), \quad g_2(x) = y_-\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)$$

После очевидных замен переменных в формулах (2.1) приходим к системе

$$(2.2) \quad - \int_0^{\infty} \psi_{\pm}(\tau) \left(l(t-\tau) \pm \frac{\pi B}{2} \right) d\tau = \\ = \pi y_{\pm}(t) - \int_{2/\lambda}^{\infty} \psi_{\mp}(\tau) \left(l\left(t+\tau - \frac{2}{\lambda}\right) \pm \frac{\pi B}{2} \right) d\tau \quad (0 \leq t < \infty)$$

Можно показать, что при $t \rightarrow \infty$ функция $l(t)$ стремится к $(2\pi B)^{-1} \operatorname{sgn} t$ и следующий член в асимптотическом представлении экспоненциально убывает. Если же $t \rightarrow 0$, то $l(t) = O(t^{-1})$. С учетом сказанного и асимптотического поведения функций $\psi_{\pm}(t)$ на бесконечности можно утверждать, что интегралы в правых частях (2.2) при малых λ и $t > 0$ представляют собой экспоненциально малые слагаемые. Поэтому главный член асимптотики решения задачи при малых λ можно построить решив интегральные уравнения Винера—Хопфа [4] вида

$$(2.3) \quad - \int_0^{\infty} \psi(\tau) \left(l(t-\tau) \pm \frac{\pi B}{2} \right) d\tau = \pi e^{-\varepsilon t} \quad (0 \leq t < \infty)$$

Ниже такие решения получены при аппроксимации функции $L(u, \alpha)$ с учетом ее свойств [2] выражением $(u^2 + C^2)(u + \sqrt{u^2 + D^2})^{-1}$, где ε — комплексная, а C и D — вещественные постоянные.

Для знака плюс в ядре

$$(2.4) \quad \psi(t) = -z_1(t) \frac{\sqrt{D+\varepsilon}}{C+\varepsilon} + \varepsilon \frac{\sqrt{D^2-\varepsilon^2}}{C^2-\varepsilon^2} z_2(t, \varepsilon)$$

$$(-\min(D, C) < \operatorname{Re} \varepsilon)$$

$$(2.5) \quad z_1(t) = e^{-Dt} / \sqrt{\pi t} + \sqrt{D-C} e^{-Ct} \operatorname{erf} \sqrt{(D-C)t}$$

$$z_2(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t} \operatorname{erf} \sqrt{(D-\varepsilon)t} -$$

$$- (\sqrt{D-C} / \sqrt{D-\varepsilon}) e^{-Ct} \operatorname{erf} \sqrt{(D-C)t}$$

Для знака минус

$$(2.6) \quad \psi(t) = \kappa z_1(t) + \varepsilon \sqrt{D^2-\varepsilon^2} z_2(t, \varepsilon) \quad (0 < \operatorname{Re} \varepsilon)$$

Здесь κ — произвольная постоянная. Формулы (2.4), (2.6) легко переписываются для случаев $\varepsilon = C$, $\operatorname{Re} \varepsilon > D$ или $C > D$.

Можно показать [1], что следующие за главным членом асимптотики слагаемые экспоненциально малы при малых λ и поэтому для расчетов несущественны.

3. Справедливы представления [5, 6]

$$(3.1) \quad \operatorname{cth} \frac{u}{B} = \frac{B}{u} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{\delta_n^2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{\gamma_n^2}\right)^{-1}, \quad \gamma_n = B\pi n,$$

$$\delta_n = B\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$(3.2) \quad \operatorname{cth} \frac{u}{B} = \frac{B}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bu}{u^2 + \gamma_n^2}$$

Мероморфная функция $\operatorname{cth} B^{-1}u$ в полуплоскости $\operatorname{Im} u > 0$ комплексного переменного u имеет нули $\zeta_n = i\delta_n$ и полюсы $z_n = i\gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Из (3.2) вытекают тождества

$$(3.3) \quad \frac{1}{\zeta_m} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\zeta_m}{z_n^2 - \zeta_m^2} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Функция $L(u, \alpha)$ со сравнительно небольшой погрешностью может быть аппроксимирована $\operatorname{cth} B^{-1}u$ [2, 3]. При такой аппроксимации решение уравнения (2.3) при $\varepsilon = -i\eta$ ($\operatorname{Im}\eta > 0$) для знака плюс представляется следующим образом:

$$(3.4) \quad \psi(t) = -\frac{ie^{i\eta t}}{\operatorname{cth} B^{-1}\eta} - i \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\eta) e^{i\zeta_n t}$$

$$C_n(\eta) = \zeta_n (BN(\eta)N'(-\zeta_n)(\eta - \zeta_n))^{-1}$$

$$N(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{u}{z_n}\right)^{-1}$$

При правой части (2.3), равной $\pi e^{iz_m t}$, получим

$$(3.5) \quad \psi(t) = -i \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z_m) e^{i\zeta_n t}$$

Для знака минус решение уравнения (2.3) при $\varepsilon = -i\eta$ имеет вид (3.4) с дополнительным слагаемым $\kappa \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\zeta_n t} / N'(-\zeta_n)$, (κ — произвольная постоянная), соответствующим решением однородного интегрального уравнения.

Внесем (3.4) в уравнение (2.3) со знаком плюс (для знака минус все делается аналогично), ядро которого представлено в виде ряда [5]

$$(3.6) \quad \int_0^{\infty} \operatorname{cth} B^{-1}u \sin(x-t)u \, du \pm \frac{\pi B}{2} =$$

$$= \frac{\pi B}{2} (\operatorname{sgn}(x-t) \pm 1) + \pi B \operatorname{sgn}(x-t) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|x-t|\gamma_n}$$

Воспользовавшись тождеством (3.3) и независимостью системы функций $\{e^{ixz_n}, n = 1, 2, \dots\}$ [1], придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$(3.7) \quad \frac{1}{\operatorname{cth} B^{-1}\eta(z_m - \eta)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(\eta)}{z_m - \zeta_n} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Если в правой части (2.3) стоит $\pi e^{iz_m t}$, то аналогично получим

$$(3.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{BN(z_m)C_n(z_m)}{\zeta_n [N^{-1}(-z_m)]'(z_j - \zeta_n)} = \delta_{mj} \quad (m, j = 1, 2, \dots)$$

где δ_{mj} — символ Кронекера. Как следует из (3.8), матрица $\{BC_n(z_m)N(z_m)(\zeta_n [N^{-1}(-z_m)]')^{-1}; n, m = 1, 2, \dots\}$ является правосторонней обратной к матрице $\{(z_j - \zeta_n)^{-1}; j, n = 1, 2, \dots\}$. Можно доказать [1], что она же является и левосторонней обратной. Таким образом, система (3.7) с сингулярной матрицей может быть эффективно решена.

В (1.4) $L(u, \alpha)$ — функция типа sth и представима в формах (3.1) и (3.2). Нули и полюсы ее — корни трансцендентных уравнений

$$\text{sh}u \pm \alpha^{-1} \sin \alpha u = 0$$

Несколько первых корней для некоторых α приведены на с. 58 в [7]. Асимптотика больших нулей и полюсов (нумерация, как на с. 216 в [1]) соответственно имеет вид

$$(3.9) \quad \zeta_{2n+1}^* \sim \left(\frac{1}{2\alpha} \ln n + \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{4\pi |\sin 2\alpha|}{\alpha} \right) + i \left(\frac{2\pi}{\alpha} n + \frac{3\pi}{4\alpha} \right)$$

$$z_{2n+1}^* \sim \left(\frac{1}{\alpha} \ln n + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{8\pi |\sin \alpha|}{\alpha} \right) + i \left(\frac{4\pi}{\alpha} n + \frac{3\pi}{2\alpha} \right)$$

Далее звездочки опускаем. Теперь к уравнениям (2.2) с функцией $L(u, \alpha)$ вида (1.4) можно применить результаты (3.3)–(3.8).

В случае наклонного штампа $y_+(t) \equiv 0$, $y_-(t) = -ke^{-t+2/\lambda}$. Поэтому будем искать решение системы (2.2) в виде

$$(3.10) \quad \psi_+(t) = i \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{i\zeta_n t} - iS \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\zeta_n t} / N'(-\zeta_n)$$

$$\psi_-(t) = -\frac{ike^{-t+2/\lambda}}{BN(i)N(-i)} + i \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{i\zeta_n t} - i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\zeta_n t}}{N'(-\zeta_n)}$$

$$(3.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\zeta_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n e^{i\zeta_n 2/\lambda}}{\zeta_n} - \frac{k}{BN(i)N(-i)} +$$

$$+ S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N'(-\zeta_n)\zeta_n} + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\zeta_n 2/\lambda}}{N'(-\zeta_n)\zeta_n} = 0$$

Подставив (3.10), (3.11) в (2.2) используя представление

$$l\left(t + \tau - \frac{2}{\lambda}\right) \pm \frac{\pi B}{2} = \pi B \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) + \pi B \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(t+\tau-2/\lambda)z_n}$$

и обратив затем сингулярную матрицу так, как показано выше, приходим к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно новых неизвестных $x_n^{\pm} = D_n \pm E_n$:

$$(3.12) \quad X_{\pm} = \mp F X_{\pm} + Q_{\pm}$$

где $X_{\pm} = \{x_n^{\pm}\}$, $Q_{\pm} = \{q_n^{\pm}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — столбцы, а $F = \{f_{nm}\}$ ($n, m = 1, 2, \dots$) — матрица, причем

$$f_{nm} = \zeta_m N(\zeta_m) e^{i\zeta_m 2/\lambda} (\zeta_n N'(-\zeta_n) (\zeta_n + \zeta_m))^{-1}$$

$$q_n^{\pm} = (S + \kappa) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}}{N'(-\zeta_m)} \mp \frac{S}{N'(-\zeta_n)} -$$

$$- \frac{ik}{BN(i)N(-i)N'(-\zeta_n)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z_m + i)e^{2/\lambda} \pm (z_m - i)}{[N^{-1}(-z_n)]'(z_m - \zeta_n)(z_m^2 + 1)}$$

Системы (3.12) решаются с использованием дополнительного соотношения (3.11) для определения S . Можно доказать, что для этих систем применим метод последовательных приближений [1]. Аналогичная пара систем получается и в случае параболического штампа.

Наклонный штамп

1	0,484	1,687	1,718	0,926
	0,493	1,695	1,711	0,944
	0,492	1,681	1,718	0,921
2	0,294	3,509	0,808	0,821
	0,288	3,533	0,793	0,813
	0,281	3,514	0,798	0,815

Параболический штамп

1	0,401	1,943	1,236	0,401
	0,408	1,937	1,219	0,408
	0,413	1,935	1,223	0,413
2	0,137	6,121	0,199	0,137
	0,146	6,089	0,202	0,146
	0,129	6,103	0,213	0,129

В расчетах различных характеристик задачи по методам «больших» λ и «малых» λ использовались ограниченные решения [8] на одном конце области контакта ($r = b$) для наклонного и на обоих для параболического штампа. Условие равновесия штампа позволяет κ выразить через P . В методе «малых λ » для нахождения решения вначале пренебрегали интегралом в правой части уравнения (2.2) с нижним знаком, затем последовательно определяли $\psi_-(t)$ и $\psi_+(t)$ из уравнения (2.2) с верхним знаком. Как показывают оценки, большими можно считать $\lambda > \alpha^{-1}$.

В первых двух столбцах таблицы приведены соответственно величины

$$q(\sqrt{ab}) \frac{a}{P}, \quad \frac{1}{aP} \int_a^b q(r) r dr = \frac{H}{a}$$

В третьем и четвертом столбцах даны соответственно значения

$$-\frac{k}{P}, \quad \lim \left\{ q(r) \frac{a}{P} \ln \sqrt{\frac{r}{a}} \right\} \quad (r \rightarrow a)$$

для наклонного и mP^{-1} , nP^{-1} для параболического штампа. Все величины рассчитаны тремя изложенными выше методами. Цифра 1 слева отвечает случаю $\alpha = 0,5\pi$, $\lambda = 2$ а цифра 2 — $\alpha = 1,5\pi$, $\lambda = 1$. Значения постоянных C и D взяты из [2].

Таким образом, как и в статье [9], посвященной клину с заземленной нижней гранью, удалось установить смыкание асимптотических решений при больших и малых λ для клина, нижняя грань которого свободна от напряжений. Эффективным можно также считать метод сведения интегрального уравнения с символом типа sth к бесконечным системам второго рода, позволяющий проконтролировать точность асимптотических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука. 1974. 455 с.
2. Александров В. М. Контактные задачи упругого клина // Инж. журн. МТТ. 1967. № 2. С. 120—131.
3. Александров В. М. Контактные задачи для упругого плоского клина // Контактные задачи и их инженерные приложения. М.: НИИМАШ. 1969. С. 137—144.
4. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 279 с.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981. 798 с.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 736 с.
7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1963. 367 с.
8. Александров В. М., Копасенко В. В. Контактная задача для упругого клина с жестко заземленной гранью // Прикл. механика. 1968. Т. 4. Вып. 7. С. 75—82.
9. Александров В. М. К контактными задачам для упругого клина с одной заземленной гранью // Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21. № 2. С. 17—27.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1987