Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 539.3

ПОВЕДЕНИЕ ТОЛСТОЙ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Зеленин А. А., Зубов Л. М.

При помощи уравнений пространственной нелинейной теории упругости исследована задача об осесимметричном выпучивании и начальном послекритическом поведении кругового цилиндра из неогуковского материала, равномерно сжатого по боковой поверхности. Торцы цилиндра свободны, а боковая поверхность закреплена от поворота, но может свободно скользить в направлении оси цилиндра. Изучено ветвление форм равновесия цилиндра, возникающее при достижении критических значений параметра нагружения. Найдены асимптотические представления ответвляющихся решений при нагрузках, близких к критической. Обнаружено качественное отличие закритического поведения толстой плиты от поведения тонкой пластины.

1. Рассмотрим равновесие упругого кругового цилиндра $0 \leqslant r \leqslant a$, $-h \leqslant z \leqslant h$, нагруженного по боковой поверхности. Дифференциальные уравнения равновесия при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r\,\partial\theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{D}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы, r, θ, z — цилиндрические координаты в недеформированном состоянии тела, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы, касательные к координатным линиям. Предполагается, что на боковой поверхности цилиндра задано постоянное радиальное перемещение и отсутствуют касательные напряжения, а плоские грани тела свободны от напряжений. Это приводит к следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} = 0, \quad z = \pm h \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_r = (1 - \varepsilon)\, a, \quad r = a \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $2h$ — высота цилиндра, a — его радиус в недеформированном состоянии, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки деформированного тела, ε — параметр нагружения. Для несжимаемого неогуковского материала имеем [1, 2]

$$\mathbf{D} = 2c_1 \nabla \mathbf{R} + 2q\, (\nabla \mathbf{R}^T)^{-1} \tag{1.3}$$

$$\det (\nabla \mathbf{R}) = 1 \tag{1.4}$$

Здесь c_1 — постоянная материала, q — неизвестная функция координат, определяемая из уравнений равновесия и условия несжимаемости (1.4). Основное решение краевой задачи (1.1)—(1.4), описывающее докритическое состояние цилиндра, представляет собой однородную деформацию и задается соотношением

$$\mathbf{R}^\circ = \beta r \mathbf{e}_r + \beta^{-2} z \mathbf{e}_z, \quad q^\circ = -c_1 \beta^{-4}, \quad \beta = 1 - \varepsilon \tag{1.5}$$

Здесь и ниже индекс $^\circ$ относится к докритическому состоянию.

Будем отыскивать осесимметричные формы равновесия, близкие к основному решению, т. е. положим

$$\begin{gathered} \mathbf{R} = \mathbf{R}^\circ + u(r, z)\, \mathbf{e}_r + w(r, z)\, \mathbf{e}_z \\ q = c_1 [m + p(r, z)], \quad m = q^\circ c_1^{-1} \end{gathered} \tag{1.6}$$

При учете (1.5), (1.6) уравнение несжимаемости запишем в виде

$$\left[\left(\beta+\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(\beta^{-2}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial z}\right]\left(\beta+\frac{u}{r}\right)=1 \tag{1.7}$$

Используя соотношение

$$\nabla\cdot[J\,(\nabla\mathbf{R}^T)^{-1}]=0,\quad J=\det\,(\nabla\mathbf{R})$$

уравнение равновесия (1.1) для деформации вида (1.6) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{u}{r^2}+\left(\beta+\frac{u}{r}\right)\left[\frac{\partial p}{\partial r}\left(\beta^{-2}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.-\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial z}\right]\right\}\mathbf{e}_r+\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\right.\\ \left.+\left(\beta+\frac{u}{r}\right)\left[\frac{\partial p}{\partial z}\left(\beta+\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial r}\right]\right\}\mathbf{e}_z=0\end{gathered} \tag{1.8}$$

Граничные условия для функций u, w, p запишутся так:

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial u}{\partial z}-\left(\beta+\frac{u}{r}\right)(m+p)\frac{\partial w}{\partial r}\right]\mathbf{e}_r+\left[\beta^{-2}+\right.\\ \left.+\frac{\partial w}{\partial z}+\left(\beta+\frac{u}{r}\right)(m+p)\left(\beta+\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]\mathbf{e}_z=0,\quad z=\pm h\\ \frac{\partial w}{\partial r}-\left(\beta+\frac{u}{r}\right)(m+p)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=0,\quad r=a\end{gathered} \tag{1.9}$$

Введя безразмерные величины

$$r'=ra^{-1},\quad z'=za^{-1},\quad u'=ua^{-1},\quad w'=wa^{-1},\quad h'=ha^{-1}$$

из (1.7)—(1.9) приходим к следующей нелинейной краевой задаче относительно $u'(r',z')$, $w'(r',z')$, $p(r',z')$ (в дальнейшем штрихи опускаем):

$$l\,(x,D)\,\mathbf{v}\,(x)=\mathbf{f}\,(x,\mathbf{v}) \tag{1.10}$$

$$b\,(x,D)\,\mathbf{v}\,(x)=\mathbf{F}\,(x,\mathbf{v}),\quad z=\pm h,\quad r=1 \tag{1.11}$$

Здесь

$$x\equiv(r,z)\quad \mathbf{v}\equiv(u,w,p),\quad \mathbf{f}\equiv(f_1,f_2,f_3)$$
$$F\equiv(F_1,F_2),\quad l\,(x,D)\equiv(l_{ij}\,(x,D))_{i,j=1,2,3}$$
$$b\,(x,D)\equiv(b_{ij}\,(x,D))_{i=1,2;\,j=1,2,3}$$
$$l_{11}=\partial_1^2+r^{-1}\partial_1+\partial_2^2-r^{-2},\quad l_{12}=0$$
$$l_{13}=\beta^{-1}\partial_1,\quad l_{21}=0,\quad l_{22}=\partial_1^2+r^{-1}\partial_1+\partial_2^2$$
$$l_{23}=\beta^2\partial_2,\quad l_{31}=-\beta^{-1}(\partial_1+r^{-1}),\quad l_{32}=-\beta^2\partial_2,\quad l_{33}=0$$
$$f_1=(\beta+r^{-1}u)\,J\,(w,p)-\beta^{-2}r^{-1}u\partial_1 p$$
$$f_2=(\beta+r^{-1}u)\,J\,(p,u)-\beta r^{-1}u\partial_2 p$$
$$f_3=(\beta+r^{-1}u)\,J\,(u,w)+\beta r^{-1}u\,(\partial_2 w+\beta^{-3}\partial_1 u)$$
$$b_{11}=\partial_2,\quad b_{12}=\beta^{-3}\partial_1,\quad b_{13}=0,\quad b_{21}=-\beta^{-3}(\partial_1+r^{-1})$$
$$b_{22}=\partial_2,\quad b_{23}=\beta^2,\quad z=\pm h$$
$$b_{11}=1,\quad b_{12}=0,\quad b_{13}=0,\quad b_{21}=\beta^{-3}\partial_2$$
$$b_{22}=\partial_1,\quad b_{23}=0,\quad r=1$$
$$F_1=(\beta p-\beta^{-4}r^{-1}u+r^{-1}pu)\,\partial_1 w,\quad F_2=(-\beta p+$$
$$+\beta^{-4}r^{-1}u-r^{-1}pu)\,\partial_1 u-\beta r^{-1}pu,\quad z=\pm h$$
$$F_1=0,\quad F_2=(\beta p-\beta^{-4}r^{-1}u+r^{-1}pu)\,\partial_2 u,\quad r=1$$
$$\partial_1=\partial/\partial r,\quad \partial_2=\partial/\partial z,\quad J\,(u,v)=\partial_1 u\partial_2 v-\partial_2 u\partial_1 v$$

Дифференциальные выражения l и b в левой части (1.10), (1.11) являются линейными, а выражения f и F не содержат линейных составляющих. В качестве параметра в краевую задачу (1.10), (1.11) входит величина β.

2. Можно показать, что система (1.10) — эллиптическая по Дуглису — Ниренбергу, а граничные условия (1.11) являются дополнительными [3, 4], за исключением случая, когда β удовлетворяет уравнению

$$\beta^9 + \beta^6 + 3\beta^3 - 1 = 0$$

Как будет показано ниже, этот случай соответствует критическому значению параметра нагружения β для бесконечно длинного цилиндра. Поставим в соответствие левым частям уравнений (1.10), (1.11) линейный оператор $A\mathrm{v} \equiv (l\mathrm{v}, b\mathrm{v})$, который определим на банаховом пространстве

$$E_1 \equiv W_2^{\,2}(G) \oplus W_2^{\,2}(G) \oplus W_2^{\,1}(G); \quad G\colon\ (0 \leqslant r < 1,\ -h < z < h)$$

Тогда область значений этого оператора принадлежит банахову пространству

$$E_2 \equiv L_2(G) \oplus L_2(G) \oplus W_2^{\,1}(G) \oplus W_2^{\,1/2}(\Gamma) \oplus W_2^{\,1/2}(\Gamma);$$
$$\Gamma\colon (r = 1,\ z = \pm h)$$

Здесь $W_2^{\,2}(G)$, $W_2^{\,1}(G)$ — пространства Соболева, $L_2(G)$ — пространство Лебега, $W_2^{\,1/2}(\Gamma)$ — пространство Слободецкого; знаком $\oplus$ обозначена прямая сумма пространств.

Предположим, что искомые функции u, w, p принадлежат пространству $W_2^{\,3}(G)$. Тогда можно показать, что правые части уравнений (1.10), (1.11) принадлежат E_2. Это позволяет записать краевую задачу в операторном виде

$$A\mathrm{v} = \tau, \quad \tau \equiv (\mathrm{f}, \mathrm{F}) \tag{2.1}$$

Запишем необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (2.1), воспользовавшись результатами работ [4, 5]. В рассматриваемом случае после преобразований оно примет вид

$$\int_0^1\int_{-h}^{h} (f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + f_3\psi_3)\, r\,dr\,dz - \int_0^1 (F_1\psi_1 + F_2\psi_2)\, r\,dr\,\Big|_{z=-h}^{h} + \tag{2.2}$$
$$+ \int_{-h}^{h} [F_1(\partial_1\psi_1 - \beta^{-3}\partial_2\psi_2 + \beta^{-1}\psi_3) - F_2\psi_2]\, r\,dz\,\Big|_{r=0}^{1} = 0$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — собственные вектор-функции оператора A, образующие базис подпространства нулей этого оператора.

3. Для нахождения критических параметров нагружения, при которых возникает бифуркация равновесия цилиндра, рассмотрим линеаризованную задачу

$$A\mathrm{v} = 0 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) совпадает с уравнениями нейтрального равновесия для цилиндра, полученными в [2]. Будем искать собственные функции задачи (3.1) в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\, J_1(k_n r), \quad w = w_0(z) + \tag{3.2}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)\, J_0(k_n r), \quad p = p_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z)\, J_0(k_n r)$$

где k_n определяются из условия

$$J_1(k_n) = 0 \tag{3.3}$$

$J_0(k_n r)$, $J_1(k_n r)$ — функции Бесселя. Подставим (3.2) в левую часть уравнений (1.10) и решим их относительно u_n, w_n, p_n при $\mathrm{f} = 0$. В результате получим

$$\begin{gathered} u_n(z) = \beta_1 C_1 \operatorname{sh} \beta_2 z - \beta^3 C_2 \operatorname{sh} k_n z + \beta_1 C_3 \operatorname{ch} \beta_2 z - \\ - \beta^3 C_4 \operatorname{ch} k_n z, \quad w_n(z) = -\beta_1 C_1 \operatorname{ch} \beta_2 z + C_2 \operatorname{ch} k_n z - \\ - \beta_1 C_3 \operatorname{sh} \beta_2 z + C_4 \operatorname{sh} k_n z, \quad p_n(z) = C_1 \operatorname{sh} \beta_2 z + C_3 \operatorname{ch} \beta_2 z \\ w_0(z) = C_5 + \beta^2 C_6 z^2/2, \quad p_0(z) = C_7 + C_6 z \\ \beta_1 = \beta^5 (1 - \beta^6)^{-1} k_n^{-1}, \quad \beta_2 = \beta^{-3} k_n \end{gathered} \tag{3.4}$$

В (3.4) C_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ — постоянные интегрирования.

Подставляя выражения (3.2) в граничные условия (1.11) с нулевыми правыми частями, получаем с учетом (3.4) систему уравнений для определения C_i, из которой после преобразований находим, что $C_6 = C_7 = 0$, и образуем две системы для определения $C_1, \ldots, C_4$

$$\begin{gathered} (1 + \beta^6) C_1 \operatorname{sh} \beta_2 h - 2C_2 \operatorname{sh} k_n h = 0 \\ 2C_1 \operatorname{ch} \beta_2 h - \beta^{-3} (1 + \beta^6) C_2 \operatorname{ch} k_n h = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} (1 + \beta^6) C_3 \operatorname{ch} \beta_2 h - 2C_4 \operatorname{ch} k_n h = 0 \\ 2C_3 \operatorname{sh} \beta_2 h - \beta^{-3} (1 + \beta^6) C_4 \operatorname{sh} k_n h = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{3.6}$$

Постоянная C_5 остается неопределенной. Это связано с тем, что граничные условия допускают перемещение цилиндра как абсолютно твердого тела в направлении оси z.

Для каждого n, приравнивая определители систем (3.5), (3.6) нулю, приходим к трансцендентным уравнениям для определения собственных значений $\beta = \beta_0$ задачи (3.1), которые являются функциями от k_n, h

$$\beta^{-3} (1 + \beta^6)^2 \operatorname{th} \beta_2 h = 4 \operatorname{th} k_n h \tag{3.7}$$

$$\beta^{-3} (1 + \beta^6)^2 \operatorname{cth} \beta_2 h = 4 \operatorname{cth} k_n h \tag{3.8}$$

Если цилиндр рассматривать как толстую плиту со срединной поверхностью $z = 0$, то уравнение (3.7), полученное ранее [2], соответствует изгибным формам бифуркации равновесия плиты, когда w — четная функция, u, p — нечетные функции координаты z. Уравнение (3.8) отвечает формам равновесия цилиндра, симметричным относительно плоскости $z = 0$. Так как $\beta \leqslant 1$, то $\operatorname{th} k_n h / \operatorname{th} \beta_2 h < 1$, и следовательно, все корни уравнения (3.7) больше корней уравнения (3.8), за исключением общего корня $\beta = 1$. Таким образом, критическое значение параметра β находится из уравнения (3.7).

Заметим, что для сколь угодно толстой плиты ($k_n h \to \infty$) уравнение (3.7) приводится к виду

$$(\beta^3 - 1)(\beta^9 + \beta^6 + 3\beta^3 - 1) = 0 \tag{3.9}$$

Решая (3.9), получаем $\beta_\infty = 0{,}6661$, откуда следует, что сколь угодно толстая плита выпучивается при $\beta = \beta_\infty$. Критическое значение параметра $\beta = \beta_*$ является максимальным собственным значением из набора собственных чисел $\beta_0(k_n, h)$, где величина k_n определена в (3.3). Можно показать, что собственное значение β_0 всегда простое и принимает максимальное значение при $k_n = k_1 = 3{,}832$.

Ниже приведены критические значения β_*, полученные из (3.7), а также критические значения β_*', найденные согласно классической теории выпучивания пластин [6] для некоторых значений h

h	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\beta_*'\cdot 10^4$	9674	8695	7064	4780	1843
$\beta_*\cdot 10^4$	9669	8644	7484	6997	6809

Видно, что даже для достаточно толстой пластины ($h \approx 0{,}3$) значения β_*' и β_* близки.

4. Для построения новых форм равновесия используем теорию, изложенную в [7]. Пусть β_0 — собственное значение оператора A, λ — малый параметр ($|\lambda| < \varepsilon$). Тогда, полагая $\beta = \beta_0 + \lambda$, (2.1) можно записать в виде (A_0 — оператор A, в котором величина β заменена на собственное значение β_0)

$$A_0\mathbf{v} = \tau - A\mathbf{v} + A_0\mathbf{v} \equiv \eta(\mathbf{v}), \quad \eta(\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{t}, \mathbf{T}) \tag{4.1}$$

$$\mathbf{t} \equiv (f^1, f^2, f^3), \quad \mathbf{T} \equiv (F^1, F^2) \tag{4.2}$$

$$f^1 = f_1 - [\beta^{-1}]\,\partial_1 p, \quad f^2 = f_2 - [\beta^2]\,\partial_2 p$$

$$f^3 = \beta\beta_0^{-1} f_3 + [\beta^3]\beta_0^{-1}\partial_2 w$$

$$F^1 = F_1 - [\beta^{-3}]\,\partial_1 w, \quad F^2 = F_2 - [\beta^2]\,p + [\beta^{-3}]\,(\partial_1 u + r^{-1}u),$$

$$z = \pm h$$

$$F^1 = F_1 = 0, \quad F^2 = F_2 - [\beta^3]\,\partial_2 u, \quad r = 1$$

$$([\beta^k] = \beta^k - \beta_0^k)$$

Так же как в [7], обозначим: E_1^s — подпространство нулей оператора A_0 размерности s, $E_1^{\infty-s}$ — дополнение подпространства E_1^s, до E_1, A_0^* — сужение оператора A_0 на $E_1^{\infty-s}$. В отличие от A_0 оператор A_0^* будет иметь ограниченный обратный оператор $\Gamma_0 = (A_0^*)^{-1}$, который используем при построении малых решений уравнения (4.1).

Так как собственные значения рассматриваемой задачи всегда простые ($s = 1$), будем искать малые решения уравнения (4.1) в виде ряда:

$$\mathbf{v} = \xi\boldsymbol{\psi} + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{v}_{i0}\xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{v}_{ij}\lambda^i \tag{4.3}$$

$$\mathbf{v}_{ij} \equiv (u_{ij}(r, z),\ w_{ij}(r, z),\ p_{ij}(r, z))$$

Здесь ξ — формальный параметр, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — собственная вектор-функция оператора A_0, соответствующая собственному значению β_0. Разлагая в правой части (4.1) члены, содержащие β, в ряд по степеням λ, а выражения, содержащие u, w, p,— по формулам (4.3), получаем

$$\eta(\mathbf{v}) = \sum_{i+j\geqslant 1} \eta_{ij}\xi^i\lambda^j, \quad \eta_{ij} \equiv (\mathbf{t}_{ij}, \mathbf{T}_{ij}) \tag{4.4}$$

$$\mathbf{t}_{ij} \equiv (f_{ij}^1, f_{ij}^2, f_{ij}^3), \quad \mathbf{T}_{ij} \equiv (F_{ij}^1, F_{ij}^2)$$

где f_{ij}^k, F_{ij}^l — коэффициенты разложения функций f^k, F^l ($k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2$), определенных соотношениями (4.2).

Подставляя (4.3) в (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\xi^i\lambda^j$, при учете (4.4) получаем рекуррентную систему для нахождения $\mathbf{v}_{ij}$

$$A_0^*\mathbf{v}_{ij} = \eta_{ij} \tag{4.5}$$

из которой находим

$$\mathbf{v}_{01} = 0, \quad \mathbf{v}_{11} = \Gamma_0\eta_{11}, \quad \mathbf{v}_{20} = \Gamma_0\eta_{20}, \ \ldots$$

Для получения уравнения разветвления, из которого определяется величина ξ, подставим (4.3) в условие разрешимости (2.2) для уравнения (4.1). В результате получаем

$$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i0}\xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}\lambda^j = 0 \tag{4.6}$$

$$L_{ij} = \int_0^1 \int_{-h}^{h} (f_{ij}{}^1\psi_1 + f_{ij}{}^2\psi_2 + f_{ij}{}^3\psi_3)\, r\, dr\, dz -$$

$$- \int_0^1 (F_{ij}{}^1\psi_1 + F_{ij}{}^2\psi_2)\, r\, dr \Big|_{z=-h}^{h} - \int_{-h}^{h} F_{ij}{}^2\psi_2\, dz \Big|_{r=1}$$

В (4.6) учтено, что $F^1 = 0$ при $r = 1$.

5. Построим обратный оператор Γ_0. Для этого рассмотрим уравнение

$$A_0{}^*\mathbf{v} = (G_1, G_2, G_3, g_1, g_2) \tag{5.1}$$

Пусть правая часть уравнения (5.1) представима в виде рядов по ортогональным функциям $J_0(k_m r)$, $J_1(k_m r)$ (здесь и далее суммирование по m от 1 до ∞)

$$\begin{gathered} G_1 = \Sigma G_{1m}(z) J_1(k_m r), \quad G_2 = G_{20}(z) + \Sigma G_{2m}(z) J_0(k_m r), \\ G_3 = G_{30}(z) + \Sigma G_{3m}(z) J_0(k_m r) \\ g_1 = \Sigma g_{1m}(z) J_1(k_m r), \quad g_2 = g_{20}(z) + \Sigma g_{2m}(z) J_0(k_m r), \\ z = \pm h \\ g_1 = g_2 = 0, \quad r = 1 \end{gathered} \tag{5.2}$$

причем $G_{20}(z)$, $g_{20}(z)$ — четные функции, а k_m удовлетворяет условию $J_1(k_m) = 0$.

Будем искать решение уравнения (5.1) в виде

$$\begin{gathered} u = \Sigma u_m(z) J_1(k_m r), \quad w = w_0(z) + \\ + \Sigma w_m(z) J_0(k_m r), \quad p = p_0(z) + \Sigma p_m(z) J_0(k_m r) \end{gathered} \tag{5.3}$$

Подставляя (5.2) в (5.1) и приравнивая левую и правую части при одинаковых $J_0(k_m r)$, $J_1(k_m r)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения u_m, w_m, p_m, w_0, p_0 с граничными условиями при $z = \pm h$. Решением этой системы будет

$$\begin{aligned} u_m(z) &= C_{1m}\beta_3 \operatorname{sh}\beta_4 z + C_{2m}\beta_3 \operatorname{ch}\beta_4 z - \\ &- C_{3m}\beta_0{}^3 \operatorname{sh} k_m z - C_{4m}\beta_0{}^3 \operatorname{ch} k_m z + \int_0^z I_1{}^2(\tau, \beta_4) \operatorname{ch} k_m(z-\tau)\, d\tau + \\ &+ \beta_0^{-3} \int_0^z I_2{}^2(\tau, \beta_4) \operatorname{sh} k_m(z-\tau)\, d\tau + \beta_0^{-2} I_3{}'(z, \beta_4) \\ w_m(z) &= -C_{1m}\beta_3 \operatorname{ch}\beta_4 z - C_{2m}\beta_3 \operatorname{sh}\beta_4 z + C_{3m} \operatorname{ch} k_m z + \\ &+ C_{4m} \operatorname{sh} k_m z - \int_0^z I_1{}^1(\tau, \beta_4) \operatorname{ch} k_m(z-\tau)\, d\tau - \\ &- \beta_0^{-3} \int_0^z I_2{}^1(\tau, \beta_4) \operatorname{sh} k_m(z-\tau)\, d\tau - \beta_0^{-2} I_3{}^2(z, \beta_4) \\ p_m(z) &= C_{1m} \operatorname{sh}\beta_4 z + C_{2m} \operatorname{ch}\beta_4 z + \beta_0^{-2} I_1{}^1(z, \beta_4) + \\ &+ \beta_0^{-2} I_2{}^2(z, \beta_4) + k_m\beta_5\beta_0^{-7} I_3{}^1(z, \beta_4) + \beta_0^{-4} G_{3m}(z) \\ w_0(z) &= C_{10} - \beta_0^{-2} \int_0^z G_{30}(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$p_0(z) = \beta_0^{-2}\left[g_{20}(h) - \int_0^h G_{20}(\tau)\,d\tau + \int_0^z G_{20}(\tau)\,d\tau + \beta_0^{-2}G_{30}(z)\right]$$

$$C_{1m} = \beta_7\Delta_1^{-1}(2Q_m^+ \operatorname{sh} k_m h + \beta_8 R_m^- \operatorname{ch} k_m h)$$

$$C_{3m} = k_m^{-1}\Delta_1^{-1}(\beta_6 Q_m^+ \operatorname{sh}\beta_4 h + 2R_m^- \operatorname{ch}\beta_4 h)/2, \quad m \neq n$$

$$C_{1n} = 0, \quad C_{3n} = R_n^-/(4k_n \operatorname{sh} k_n h)$$

$$C_{2m} = \beta_7\Delta_2^{-1}(2Q_m^- \operatorname{ch} k_m h + \beta_8 R_m^+ \operatorname{sh} k_m h)$$

$$C_{4m} = k_m^{-1}\Delta_2^{-1}(\beta_6 Q_m^- \operatorname{ch}\beta_4 h + 2R_m^+ \operatorname{sh}\beta_4 h)/2$$

$$Q_m^\pm = Q_m(h) \pm Q_m(-h), \quad R_m^\pm = R_m(h) \pm R_m(-h)$$

$$Q_m(z) = g_{1m}(z) - 2\beta_5^{-1}[I_1^2(h, \beta_4) + I_2^1(h, \beta_4)] -$$

$$- 2k_m\beta_0^{-5}I_3^2(h, \beta_4) + \beta_6\beta_5^{-1}[I_1^2(h, k_m) + \beta_0^{-3}I_2^1(h, k_m)]$$

$$R_m(z) = g_{2m}(z) + \beta_6\beta_5^{-1}[I_1^1(h, \beta_4) + I_2^2(h, \beta_4)] +$$

$$+ k_m\beta_6\beta_0^{-5}I_3^1(h, \beta_4) - 2\beta_5^{-1}[\beta_0^3 I_1^1(h, k_m) + I_2^2(h, k_m)]$$

$$I_k^1(l, \alpha) = \int_0^l \operatorname{sh}\alpha(l - \sigma)\,G_{km}(\sigma)\,d\sigma$$

$$I_k^2(l, \alpha) = \int_0^l \operatorname{ch}\alpha(l - \sigma)\,G_{km}(\sigma)\,d\sigma$$

$$\Delta_1 = \Delta(\beta_4, k_m), \quad \Delta_2 = \Delta(k_m, \beta_4)$$

$$\Delta(\alpha, l) = 4 \operatorname{ch}\alpha h \operatorname{sh} lh - \beta_6\beta_8 \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch} lh$$

$$\beta_3 = k_m^{-1}\beta_0^5(1 - \beta_0^6)^{-1}, \quad \beta_4 = k_m\beta_0^{-3}, \quad \gamma_5 = 1 - \beta_0^6$$

$$\beta_6 = 1 + \beta_0^6, \quad \beta_7 = \beta_5\beta_0^{-2}/2, \quad \beta_8 = \beta_6\beta_0^{-3}$$

C_{10} — произвольная постоянная, n — номер корня уравнения (3.3), соответствующий значению β_0.

6. Для нахождения коэффициентов L_{ij} уравнения разветвления (4.6) выпишем первые коэффициенты разложения правой части уравнения (4.1)

(6.1) $$f_{01}^1 = f_{01}^2 = f_{01}^3 = F_{01}^1 = F_{01}^2 = 0$$

(6.2) $$f_{11}^1 = \beta_0^{-2}\partial_1\psi_3, \quad f_{11}^2 = -2\beta_0\partial_2\psi_3, \quad f_{11}^3 = 3\beta_0\partial_2\psi_2$$

$$F_{11}^1 = 3\beta_0^{-4}\partial_1\psi_2, \quad F_{11}^2 = 3\beta_0^{-1}\partial_2\psi_2 - 2\beta_0\psi_3, \quad z = \pm h$$

$$F_{11}^1 = F_{11}^2 = 0, \quad r = 1$$

(6.3) $$f_{20}^1 = \beta_0\partial_2\psi_3\partial_1\psi_2 + \beta_0^{-2}\partial_1\psi_3\partial_1\psi_1$$

$$f_{20}^2 = \beta_0\partial_1\psi_3\partial_2\psi_1 + \beta_0^4\partial_2\psi_3\partial_2\psi_2$$

$$f_{20}^3 = \beta_0^{-2}r^{-1}\psi_1\partial_1\psi_1 - \beta_0^4\partial_2\psi_2\partial_2\psi_2 - \beta_0\partial_1\psi_2\partial_2\psi_1$$

$$F_{20}^1 = \beta_0\psi_3\partial_1\psi_2 + \beta_0^{-1}r^{-1}\psi_1\partial_2\psi_1, \quad F_{20}^2 = \beta_0^4\psi_3\partial_2\psi_2 +$$

$$+ \beta_0^{-4}r^{-1}\psi_1\partial_1\psi_1, \quad z = \pm h$$

$$F_{20}^1 = F_{20}^2 = 0, \quad r = 1$$

$$\psi_1 = C(A_n \operatorname{sh}\beta_9 z - \beta_0^3 B_n \operatorname{sh} k_n z)\,J_1(k_n r)$$

$$\psi_2 = C(-A_n \operatorname{ch}\beta_9 z + B_n \operatorname{ch} k_n z)\,J_0(k_n r), \quad \psi_3 =$$

$$= C \operatorname{sh}\beta_9 z J_0(k_n r)$$

$$\beta_9 = \beta_0^{-3}k_n, \quad A_n = \beta_0^5/(k_n\beta_5),$$

$$B_n = \beta_0\beta_6 \operatorname{sh}\beta_9 h/(2\beta_5 k_n \operatorname{sh} k_n h)$$

где C — произвольная фиксированная постоянная.

Из (6.1) следует, что $L_{01}=0$. Подставляя (6.2) в (4.7) для $i = 1$, $j = 1$, после несложных преобразований получаем выражение для L_{11}

$$L_{11} = {}^3/_2\beta_0^3\beta_5^{-1}[\beta_0^3\beta_6^{-1}k_n^{-1}(1 - 3\beta_0^6)\operatorname{sh} 2\beta_9 h + 2h] J_0^2(k_n) \tag{6.4}$$

Из (6.3) видно, что функции ψ_2, f_{20}^1, f_{20}^3, F_{20}^2 четные по z, а функции ψ_1, ψ_3, f_{20}^2, F_{20}^1 нечетные по z; отсюда следует, что $L_{20} = 0$. Выписывая выражения для f_{30}^k, F_{30}^l ($k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2$) и подставляя их в (4.6) для $i = 3$, $j = 0$, после приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} L_{30} = 2 \int_{-h}^{h}\int_0^1 \{(\psi_1\psi_3 + \beta_0 r p_{20})[J(\psi_1, \psi_2) + \beta_0^{-3}r^{-2}\psi_1^2] + \\ + \beta_0 r\psi_3[J(\psi_1, w_{20}) + J(u_{20}, \psi_2) - 2\beta_0^{-3}r^{-2}\psi_1 u_{20}]\}\, dr\, dz - \\ - 2\beta_0^{-4}\int_0^1 \psi_1(w_{20}\partial_1\psi_1 - u_{20}\partial_1\psi_2)\, dr \Big|_{z=-h}^{h} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Для определения $v_{20} \equiv (u_{20}, w_{20}, p_{20})$ используем обратный оператор Γ_0. Обозначим: $G_k = f_{20}^k$, $g_l = F_{20}^l$ ($k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2$); $u = u_{20}$, $w = w_{20}$, $p = p_{20}$, тогда $\mathbf{v}_{20}$ будет определяться из соотношений (5.3), (5.4), в которых в силу (6.3) будет

$$G_{20} = G_{30} = g_{20} = 0, \quad p_0 = 0, \quad w_0 = \text{const}$$

$$C_{1m} = C_{3m} = 0 \quad \text{для любого } m$$

Поскольку решение $w = \text{const}$ соответствует смещению цилиндра как твердого тела, можно положить $w_0 = 0$. По этой же причине аналогичное слагаемое отсутствует в ψ_2. Таким образом, приближенно уравнение разветвления (4.6) примет вид

$$L_{30}\xi^3 + L_{11}\xi\lambda \approx 0$$

Отсюда следует, что $\xi = \pm(\lambda\Lambda)^{1/2} + o(\lambda^{1/2})$ ($\Lambda = -L_{11}L_{30}^{-1}$), и решение (4.3) уравнения (4.1) запишется в форме

$$\mathbf{v} = \pm(\lambda\Lambda)^{1/2}\psi + \lambda\Lambda\mathbf{v}_{20} \pm (\lambda\Lambda)^{1/2}\lambda\mathbf{v}_{11} + o(\lambda)$$

В зависимости от знака выражения Λ в одной из полуокрестностей $(\beta_0 - \varepsilon, \beta_0)$ или $(\beta_0, \beta_0 + \varepsilon)$ будут возникать два новых решения, а в другой новых решений не будет.

Численное исследование коэффициентов L_{11}, L_{30} в (6.4), (6.5) показало, что L_{11} всегда больше нуля, а L_{30} может менять знак в зависимости от значения $k_n h$. Некоторые значения коэффициентов уравнения разветвления при $C = 1$ приведены ниже:

h	0,1	0,2	0,3	0,5
L_{11}	$2{,}45\cdot10^{-2}$	$6{,}49\cdot10^{-2}$	0,730	$4{,}18\cdot10^{2}$
L_{30}	$1{,}17\cdot10^{-5}$	$-8{,}89\cdot10^{-4}$	$-0{,}202$	$-2{,}28\cdot10^{5}$

В случае максимального собственного значения $L_{30} > 0$ при $h < 0{,}1135$ и $L_{30} < 0$ при $h > 0{,}114$. Отсюда следует, что для сравнительно тонких пластин ($h < 0{,}1135$) новые решения, отличные от тривиального, возникают только при нагрузках, превышающих минимальную критическую, что согласуется с результатами двумерной теории тонких пластин [8]. Для толстых плит новые решения, близкие к основному, возникают лишь при нагрузках, меньших критической (качественное отличие от поведения тонких пластин).

Аналогичное явление качественного изменения характера ветвления при увеличении толщины обнаружено [5] в задаче о закритическом поведении толстостенной трубы из сжимаемого полулинейного материала. Это дает основание заключить, что факт качественного различия закритического поведения толстостенных и тонкостенных конструкций не зависит от свойств материала. Вместе с тем ясно, что значение относительной толщины, при котором происходит качественное изменение бифуркационной картины, будет различным для разных материалов.

Отмеченные особенности поведения толстостенных упругих тел можно ожидать и в других задачах, например в неисследованной пока плоской задаче о закритическом поведении сжатого прямоугольного бруса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
2. *Зубов Л. М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при афинной начальной деформации // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 632—642.
3. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68. Вып. 3. С. 373—416.
4. *Львин С. Я.* Формула Грина и разрешимость эллиптических задач с граничными условиями любого порядка // Тр. НИИ математики Воронеж. ун-та. 1975. Вып. 17. С. 49—56.
5. *Зеленин А. А.*, *Зубов Л. М.* Ветвление решений статических задач нелинейной теории упругости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 275—282.
6. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1955. 568 с.
7. *Вайнберг М. М.*, *Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1969. 527 с.
8. *Ворович И. И.* О поведении круглой плиты после потери устойчивости // Учен. зап. Ростов. ун-та. 1955. Т. 32. Вып. 4. С. 55—60.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 29.VII.1987