

УДК 539.3

К НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Елисеев В. В.

Рассматриваются общие уравнения нелинейной динамики упругих стержней с учетом растяжения, поперечного сдвига, эксцентриситета, инерции вращения, а также начальных напряжений. Строится теория второго порядка для моделей типа Тимошенко и классической. Дается вариационная постановка линеаризованной задачи. Рассматриваются эффекты растяжения и сдвига в задаче об устойчивости сжатой стойки.

1. Геометрия и кинематика. Стержень считается ниже деформируемой материальной линией, частицы которой — твердые тела [1]. Вводится лагранжева координата s , $0 \leq s \leq l$; обычно это дуговая координата в отсчетной конфигурации. Движение стержня определяется зависимостью от времени радиуса-вектора $\mathbf{r}(s, t)$ и тензора поворота $\mathbf{P}(s, t)$ для каждой частицы. Внутренние взаимодействия задаются векторами силы $\mathbf{Q}(s, t)$ и момента $\mathbf{M}(s, t)$, с которыми частица с координатой $s + 0$ действует на соседку $s - 0$ (при замене направления отсчета s на противоположное \mathbf{Q} и \mathbf{M} меняют знак).

Для задания угловой ориентации с каждой частицей связывают по некоторому правилу ортогональную тройку \mathbf{e}_k ; часто принимают, например, $\mathbf{e}_{30} = \mathbf{r}'_0$ ($(\dots)' = \partial/\partial s$; нулевым индексом отмечаются величины в отсчетной конфигурации). По определению тензора поворота, $\mathbf{e}_k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{k0}$, $\mathbf{P} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_{k0}$. Здесь и далее используется язык прямого тензорного исчисления [2]. Соотношениями $\mathbf{e}'_k = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_k$, $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}'_k$ вводится вектор кривизны и крутки стержня. Как будет показано ниже, мерами деформации служат векторы

$$(1.1) \quad \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}' - \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}'_0, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}_0$$

Справедливо равенство $\mathbf{P}' = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{P}$; оно показывает, что $\boldsymbol{\kappa}$ определяется лишь неравномерностью распределения поворотов и не зависит от способа задания \mathbf{e}_k .

В классической модели Кирхгофа — Клебша принимают $\boldsymbol{\Gamma} = 0$, что интерпретируется как отсутствие растяжения и поперечного сдвига. Нелинейная динамика для этого случая рассматривалась в [3].

Для каждой частицы вводятся векторы скорости $\mathbf{v}(s, t)$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(s, t)$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \quad ((\dots)' = \partial/\partial t)$$

Из равенств $(\mathbf{r}')' = (\mathbf{r}')'$, $(\mathbf{P}')' = (\mathbf{P}')'$ следует

$$\mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\Gamma}' - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}$$

При варьировании актуальной конфигурации для каждой частицы задаются векторы трансляции $\delta \mathbf{r}$ и малого поворота $\delta \mathbf{o}$. В отличие от $\delta \mathbf{r}$, $\delta \mathbf{o}$ не является вариацией вектора, а лишь обозначает сопутствующий вектор для антисимметричного тензора $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E} ((\dots))^T$ — символ транспонирования, \mathbf{E} — единичный тензор), так что $\delta \mathbf{P} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{P}$.

Для вариаций получим

$$(1.2) \quad \delta \mathbf{r}' - \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \delta \Gamma - \delta \boldsymbol{\omega} \times \Gamma = \mathbf{e}_k \delta \Gamma_k$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}' = \delta \boldsymbol{\kappa} - \delta \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_k \delta \boldsymbol{\kappa}_k$$

($\Gamma_k = \Gamma \cdot \mathbf{e}_k$ — компоненты в базисе \mathbf{e}_k).

Ниже понадобится также выражение виртуальной работы для твердого тела. Радиус-вектор произвольной точки тела $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор полюса. При этом

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{R}'' = \mathbf{r}'' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

Работа сил инерции равна

$$(1.3) \quad -\int \mathbf{R}'' \cdot \delta \mathbf{R} dm = -m [(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon})' \cdot \delta \mathbf{r} + (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v}' + (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})') \cdot \delta \boldsymbol{\omega}]$$

$$m \boldsymbol{\varepsilon} = \int \mathbf{x} dm, \quad m \mathbf{J} = \int (x^2 \mathbf{E} - \mathbf{x} \mathbf{x}) dm$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{J} — вектор эксцентриситета и тензор инерции, m — масса тела.

Инерционные свойства стержня задаются функциями $\rho(s)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(s, t)$, $\mathbf{J}(s, t)$, причем

$$(1.4) \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{J}' = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega}$$

При вычислении работы сил инерции для элемента ds полагаем в (1.3) $m = \rho ds$.

2. Основное вариационное уравнение и его следствия. В основу механики упругих стержней положим вариационное уравнение Даламбера — Лагранжа [2, 4]. Для участка стержня $s_1 \leq s \leq s_2$ постулируем его в виде

$$(2.1) \quad \int_{s_1}^{s_2} \{[\mathbf{q} - \rho(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\varepsilon}'')] \cdot \delta \mathbf{r} + [m - \rho(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v}' + (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})')] \cdot \delta \boldsymbol{\omega} - \delta \Pi\} ds + (\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\omega})|_{s_1}^{s_2} = 0$$

где введены отнесенные к единице длины внешние сила \mathbf{q} и момент \mathbf{m} , а также энергия деформации Π . Поскольку уравнение (2.1) верно для произвольного промежутка, то

$$(2.2) \quad [\mathbf{Q}' + \mathbf{q} - \rho(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\varepsilon}'')] \cdot \delta \mathbf{r} + [\mathbf{M}' + \mathbf{m} - \rho(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v}' + (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})')] \cdot \delta \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}' + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}' = \delta \Pi$$

Выражение Π пока неизвестно, но можно утверждать, что на «жестких» смещениях, т. е. при $\delta \mathbf{r} = \text{const}$, $\delta \boldsymbol{\omega} = 0$ и $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, $\delta \boldsymbol{\omega} = \text{const}$, будет $\delta \Pi = 0$. Приходим к уравнениям

$$(2.3) \quad \mathbf{Q}' + \mathbf{q} = \rho(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\varepsilon}'')$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = \rho(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v}' + (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})')$$

выражающим баланс импульса и момента импульса.

Учитывая (2.3), а также (1.2), равенство (2.2) приводим к виду

$$(2.4) \quad \delta \Pi = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_k \delta \boldsymbol{\kappa}_k + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k \delta \Gamma_k$$

откуда следует, что Π — функция от $\boldsymbol{\kappa}_k$ и Γ_k , причем

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_k \partial \Pi / \partial \boldsymbol{\kappa}_k, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{e}_k \partial \Pi / \partial \Gamma_k$$

При малых деформациях можно ограничиться представлением

$$(2.5) \quad \Pi = Q_{k0}\Gamma_k + M_{k0}\chi_k + \frac{1}{2} (a_{kn}\chi_k\chi_n + b_{kn}\Gamma_k\Gamma_n + 2c_{kn}\chi_k\Gamma_n)$$

и тогда

$$(2.6) \quad M = P \cdot M_0 + a \cdot \chi + c \cdot \Gamma, \quad Q = P \cdot Q_0 + b \cdot \Gamma + \chi \cdot c$$

где Q_0 и M_0 — векторы сил и моментов в отсчетной конфигурации ($Q_0 = Q_{k0}e_{k0}$), а a, b, c — тензоры жесткости в виде $a = a_{kn}e_k e_n$ и т. д. Тензоры a и b симметричны, c — нет.

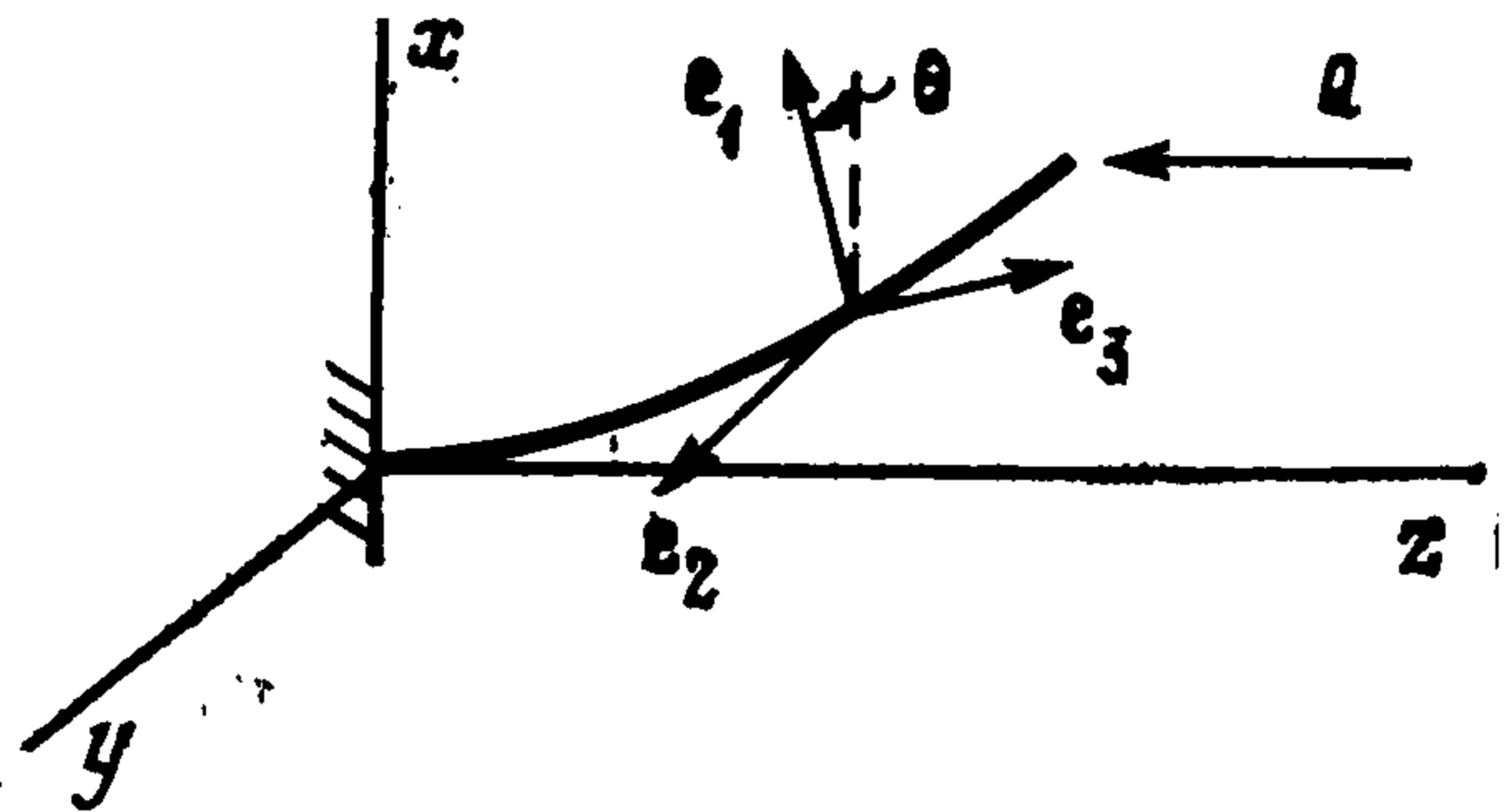
Уравнения (2.3), (2.6) вместе с формулами кинематики из п. 1 образуют полную систему в нелинейной динамике упругих стержней при учете растяжения и сдвига, эксцентриситета и инерции вращения, а также начальных напряжений. Для перехода к классической модели можно положить $\Gamma = 0$ и отказаться от уравнения для Q в (2.6).

В рамках изложенного «прямого подхода» [1] невозможно определить тензорные упругие модули a, b, c . Для их вычисления нужен анализ соответствующих трехмерных задач (как минимум задачи Сен-Венана) [5, 6]. Это же относится и к инерционным характеристикам стержня.

Как иллюстрацию рассмотрим прямой стержень, защемленный на конце $s = 0$ и сжатый мертвой силой Q на конце $s = l$ (фигура). В качестве отсчетной примем ненагруженную конфигурацию. Примем простейший вариант тензоров жесткости

$$a = \sum a_k e_k e_k, \quad b = \sum b_k e_k e_k, \quad c = 0$$

причем орты e_k совпадают в отсчетной конфигурации с ортами i, j, k декартовой системы x, y, z . Допустим, что деформация происходит в плоскости xz , тогда поворот задается одним углом θ . В положении равновесия $Q = -Qk, M' = Q \times r'$.



Используя далее геометрические формулы и соотношения упругости

$$e_1 = i \cos \theta - k \sin \theta, \quad e_2 = j, \quad e_3 = i \sin \theta + k \cos \theta$$

$$\chi = \theta' j = a^{-1} \cdot M, \quad \Gamma = r' - e_3 = b^{-1} \cdot Q$$

придем к уравнению

$$a_2 \theta'' + Q \sin \theta + \frac{1}{2} Q^2 (b_1^{-1} - b_3^{-1}) \sin 2\theta = 0$$

Граничные условия: $\theta(0) = \theta'(l) = 0$. После линеаризации, решая задачу на собственные значения, придем к уравнению для критической нагрузки

$$(2.7) \quad Q + Q^2/F = E; \quad E = \frac{\pi^2 a_2}{4l^2}, \quad F = \frac{b_1 b_3}{b_3 - b_1}$$

где E — «эйлерова» критическая нагрузка. Если $F > 0$, т. е. жесткость на растяжение b_3 больше жесткости на сдвиг b_1 , то уравнение (2.7) наряду с обычным положительным корнем имеет и отрицательный, что соответствует потере устойчивости при растяжении. Если же $b_3 < b_1$, то неустойчивость возможна лишь при сжатии, причем лишь в случае $4E \leq |F|$. Эти необычные эффекты известны для упрощенных моделей [7].

3. Наложение малой деформации на конечную. Пусть r, P, q, Q и т. д. получают малые приращения одного порядка: $r_1 = u, P_1 = \theta \times P, q_1, Q_1$ и т. д. Варьируя общие нелинейные уравнения, получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} Q_1' + q_1 &= \rho (u + \theta \times \varepsilon)'' \\ M_1' + u' \times Q + r' \times Q_1 + m_1 &= \rho [(\theta \times \varepsilon) \times v' + \varepsilon \times \\ &\times u'' + (J \cdot \theta' + \theta \times J \cdot \omega)'] \\ M_1 &= \theta \times M + a \cdot \theta' + c \cdot \gamma \quad (\gamma = u' - \theta \times r') \\ Q_1 &= \theta \times Q + b \cdot \gamma + \theta' \cdot c \end{aligned}$$

Например, последняя формула выводится так: из (2.6) следует

$$Q_1 = P_1 \cdot Q_0 + b_1 \cdot \Gamma + b \cdot \Gamma_1 + \kappa_1 \cdot c + \kappa \cdot c_1$$

Используя соотношения типа

$$b_1 = \theta \times b - b \times \theta, \quad \Gamma_1 = \gamma + \theta \times \Gamma, \quad \kappa_1 = \theta' + \theta \times \kappa$$

придем к выражению Q_1 из (3.1).

При варьировании уравнения баланса моментов использовались равенства

$$\omega_1 = \theta' + \theta \times \omega, \quad (J \cdot \omega)_1 = J \cdot \theta' + \theta \times J \cdot \omega$$

Уравнения (3.1) являются уравнениями первого приближения в теории устойчивости упругих стержней. Они линейны; зависимость их коэффициентов от s и t определяется невозмущенным движением. При малой деформации от ненапряженного состояния покоя величины Q , M , v и ω будут равны нулю и (3.1) превратятся в уравнения линейной теории стержней.

4. Эффекты второго порядка. Считая неизвестные малыми величинами одного порядка η ($\eta \rightarrow 0$), сохраним во всех уравнениях члены порядка η^2 . Воспользуемся следующим общим представлением тензора поворота [2]:

$$(4.1) \quad P = E + e^* \times E \sin \theta + e^* \times E \times e^* (1 - \cos \theta)$$

где θ — угол поворота, а e^* — орт его оси. Считая $\theta = O(\eta)$ и вводя вектор $\theta = \theta e^*$, запишем (4.1) в виде

$$(4.2) \quad P = E + \theta \times E + 1/2 \theta \times E \times \theta + O(\eta^3)$$

Геометрические и кинематические соотношения при учете членов второго порядка будут такими:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} e_k &= e_{k0} + \theta \times e_{k0} + 1/2 \theta \times (\theta \times e_{k0}) + \dots, \quad \kappa = \theta' + \\ &+ 1/2 \theta \times \theta' + \dots \\ \Gamma &= \gamma - 1/2 \theta \times (\theta \times r_0') + \dots \quad (\gamma = u' - \theta \times r_0') \\ \omega &= \theta' + 1/2 \theta \times \theta' + \dots, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \theta \times \varepsilon_0 + 1/2 \theta \times (\theta \times \\ &\times \varepsilon_0) + \dots \\ J \cdot \omega &= (J_0 + \theta \times J_0 - 1/2 J_0 \times \theta) \cdot \theta' + \dots \quad (J_0 = J_{kn} e_k e_n) \end{aligned}$$

Уравнения баланса импульса и момента импульса и соотношения упругости примут вид

$$(4.4) \quad \begin{aligned} Q' + q &= \rho [u'' + \theta'' \times \varepsilon_0 + 1/2 (\theta \times (\theta \times \varepsilon_0))''] \\ M' + (r_0' + u') \times Q + m &= \rho [(\varepsilon_0 + \theta \times \varepsilon_0) \times u'' + (J_0 - \\ &- 1/2 J_0 \times \theta) \cdot \theta'' + (\theta \times J_0 \cdot \theta')] \\ M &= M_0 + a_0 \cdot \theta' + c_0 \cdot \gamma + \theta \times (M_0 + a_0 \cdot \theta' + c_0 \cdot \gamma + 1/2 \theta \times \\ &\times M_0) + [1/2 a_0 \times \theta' + c_0 \times (u' - 1/2 \theta \times r_0')] \cdot \theta \\ Q &= Q_0 + b_0 \cdot \gamma + \theta' \cdot c_0 + \theta \times (Q_0 + b_0 \cdot \gamma + \theta' \cdot c_0 + 1/2 \theta \times \\ &\times Q_0) - \theta \cdot [(u' - 1/2 \theta \times r_0') \times b_0 + 1/2 \theta' \times c_0] \end{aligned}$$

В отличие от точных уравнений (п. 2) здесь считаются известными все упругие и инерционные характеристики: вместо неизвестного «повернутого» тензора $a = a_{kn} e_k e_n$ стоит $a_0 = a_{kn} e_{k0} e_{n0}$ и т. д.

В примере из п. 2 (фигура) уравнения второго порядка таковы:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} Q_z &= b_3 (u_z' + \theta u_x' - 1/2 \theta^2) - b_1 \theta (u_x' - \theta) = -Q \\ Q_x &= b_3 \theta u_z' + b_1 (u_x' - \theta - \theta u_z') = 0 \\ M_y' + (1 + u_z') Q_x - u_x' Q_z &= 0 \end{aligned}$$

Для прямолинейной формы $u_x = \theta = 0$, $b_3 u_z' = -Q$. Линеаризуя (4.5) в окрестности этого состояния, приходим к тому же результату, что и в п. 2. Однако при этом использовано точное уравнение баланса моментов в (4.5), содержащее члены третьего порядка в выражении $\mathbf{r}' \times \mathbf{Q}$. Отбросив эти малые члены, после линеаризации получим

$$a_2 \theta'' + [Q + Q^2 b_1^{-1} (1 - b_1 b_3^{-1})^2] \theta = 0$$

что расходится с «точным» уравнением. Однако разница исчезает при $Q \ll b_3$. В этом случае $u_z' \ll 1$ и нелинейности будут малы, что и предполагается в теории второго порядка.

5. Модель с растяжением без поперечного сдвига. Для приложений этот вариант является едва ли не основным. В этом случае $\Gamma_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2$). Уравнение (2.4) примет вид

$$\delta \Pi = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_k \delta \kappa_k + Q \delta \Gamma \quad (Q = Q \cdot \mathbf{e}_3, \Gamma = \Gamma_3)$$

и в случае квадратичной аппроксимации Π получим

$$(5.1) \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{c} \Gamma, \quad Q = Q_0 + b \Gamma + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\kappa}$$

Упругие свойства здесь заданы тензором \mathbf{a} , вектором \mathbf{c} и скаляром b (жесткостью на растяжение).

Рассмотрим прямой стержень и построим для него теорию второго порядка. Удобно выделить составляющие векторов в плоскости xy , перпендикулярной оси стержня: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + u_z \mathbf{k}$, где $\mathbf{u}_\perp = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}$ и т. д. В общем случае $\Gamma_n = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{e}_{n0} \cdot \mathbf{r}_0'$. Для стержня с прямой осью $\mathbf{r}_0' = \mathbf{k}$, $\mathbf{r}' = \mathbf{k} + \mathbf{u}'$. Выражая \mathbf{e}_n согласно (4.3) и удерживая в равенствах $\Gamma = \Gamma_3$, $\Gamma_\alpha = 0$ члены второго порядка, получим

$$\Gamma = u_z' - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_\perp \times \mathbf{u}_\perp' - 1/2 \boldsymbol{\theta}_\perp^2 \quad (\boldsymbol{\theta}_\perp = |\boldsymbol{\theta}_\perp|)$$

$$\mathbf{u}_\perp' - \boldsymbol{\theta}_\perp \times \mathbf{k} (1 + u_z') + \boldsymbol{\theta}_z (\mathbf{u}_\perp' \times \mathbf{k} + 1/2 \boldsymbol{\theta}_\perp) = 0$$

Разрешая последнее уравнение относительно $\boldsymbol{\theta}_\perp$, приходим к равенствам

$$(5.2) \quad \boldsymbol{\theta}_\perp = (1 - u_z') \mathbf{k} \times \mathbf{u}_\perp' + 1/2 \boldsymbol{\theta}_z \mathbf{u}_\perp' \quad \Gamma = u_z' + 1/2 u_\perp'^2$$

Выражение $\boldsymbol{\kappa}$ из (4.3) теперь можно преобразовать к виду

$$(5.3) \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} \times [(1 - u_z') \mathbf{u}_\perp']' + \boldsymbol{\theta}_z' (\mathbf{k} + \mathbf{u}_\perp') + 1/2 \mathbf{u}_\perp' \times \mathbf{u}_\perp''$$

Ограничимся далее следующим простейшим вариантом:

$$\mathbf{M}_0 = 0, \quad Q_0 = 0, \quad \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{a} = a \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha + a_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad \mathbf{J} = J \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$$

По сравнению с тем, что обычно нужно для приложений, здесь лишь одно ограничение — равенство изгибных жесткостей. Соотношение упругости $\mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\kappa}$ запишется в форме

$$(5.4) \quad \begin{aligned} M_z &= a_3 \boldsymbol{\theta}_z' + (a - 1/2 a_3) \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\perp' \times \mathbf{u}_\perp'' \\ \mathbf{M}_\perp &= a \mathbf{k} \times [(1 - u_z') \mathbf{u}_\perp']' + a_3 \boldsymbol{\theta}_z' \mathbf{u}_\perp'' \end{aligned}$$

В выражении силы

$$(5.5) \quad \mathbf{Q} = Q_\perp + Q_z \mathbf{k} = \Lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha + Q \mathbf{e}_3$$

компоненты Λ_α — реакции связей, соотношения упругости для них не пишутся. Используя выражения Q и Γ из (5.1) и (5.2) и отбрасывая члены третьего порядка, из (5.5) получим

$$(5.6) \quad Q_z = b (u_z' + 1/2 u_\perp'^2) - \mathbf{u}_\perp' \cdot \mathbf{Q}_\perp$$

Уравнение баланса моментов (4.4) в данном случае сводится к равенствам

$$M_s' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\perp' \times \mathbf{Q}_\perp + m_z = \rho J (\theta_z'' - 1/2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\perp' \times \mathbf{u}_\perp'')$$

$$M_\perp' + \mathbf{k} (1 + u_z') \times \mathbf{Q}_\perp + \mathbf{u}_\perp' \times Q_z \mathbf{k} + \mathbf{m}_\perp = \rho J (\mathbf{u}_\perp' \theta_z')$$

Из последнего вытекает

$$(5.7) \quad \mathbf{Q}_\perp = -a(1 - u_z') [(1 - u_z') \mathbf{u}_\perp']'' + \mathbf{k} \times [a_3 (\theta_z' \mathbf{u}_\perp')' - \rho J (\mathbf{u}_\perp' \theta_z)'] + (1 - u_z') \mathbf{m}_\perp + bu_z' \mathbf{u}_\perp'$$

С допустимой погрешностью можно теперь переписать (5.6) в виде

$$(5.8) \quad Q_s = b(u_s' + 1/2 u_\perp'^2) + \mathbf{u}_\perp' \cdot (a \mathbf{u}_\perp''' + \mathbf{m}_\perp \times \mathbf{k})$$

Подстановка (5.8), (5.7) и (5.4) в уравнения баланса импульса и момента импульса приводит к системе

$$(5.9) \quad bu_s'' - \rho u_s'' + q_z = [1/2 bu_\perp'^2 + \mathbf{u}_\perp' \cdot (a \mathbf{u}_\perp''' + \mathbf{m}_\perp \times \mathbf{k})]'$$

$$a \mathbf{u}_\perp^{IV} + \rho \mathbf{u}_\perp'' - \mathbf{q}_\perp = \{a(u_z''' \mathbf{u}_\perp' + 2u_z'' \mathbf{u}_\perp'' + 2u_z' \mathbf{u}_\perp''') + \mathbf{k} \times [a(\theta_z' \mathbf{u}_\perp')' - \rho J (\mathbf{u}_\perp' \theta_z)'] + (1 - u_z') \mathbf{m}_\perp + bu_z' \mathbf{u}_\perp'\}'$$

$$a_3 \theta_s'' - \rho J \theta_s'' + m_z = 1/2 \mathbf{k} \times \mathbf{u}_\perp' \cdot (a_3 \mathbf{u}_\perp'' - \rho J \mathbf{u}_\perp'')' - \mathbf{u}_\perp' \cdot \mathbf{m}_\perp$$

В линейном приближении правые части исчезают, что означает разделение продольных, изгибных и крутильных деформаций. Члены второго порядка справа порождают слабое взаимодействие этих видов деформаций. Уравнения (5.9) можно использовать для анализа нелинейных волн [8].

6. Вариационная постановка для линеаризованных уравнений. Рассматривается малая деформация при напряженной отсчетной конфигурации. Перемещение \mathbf{u} и поворот θ — малые величины одного порядка η , а силы и моменты представляются выражениями типа $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1$, где $\mathbf{Q}_1 = O(\eta)$. В вариационном уравнении принципа виртуальной работы удерживаются все члены второго порядка. Подставив в (2.5) выражения \mathbf{x} и Γ из (4.3), получим

$$(6.1) \quad \Pi = \mathbf{Q}_0 \cdot [\boldsymbol{\gamma} - \theta \times (\mathbf{u}' + 1/2 \mathbf{r}_0' \times \theta)] + \mathbf{M}_0 \cdot (\theta' + 1/2 \theta' \times \theta) + 1/2 (\theta' \cdot \mathbf{a} \cdot \theta' + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\gamma} + 2\theta' \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\gamma})$$

Вариация Π даст работу внутренних сил с обратным знаком. В работе же внешних сил необычным будет выражение работы моментов

$$(6.2) \quad \mathbf{M} \cdot \delta \theta = (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1) \cdot (\delta \theta + 1/2 \theta \times \delta \theta + \dots) = (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 + 1/2 \mathbf{M}_0 \times \theta) \cdot \delta \theta + \dots$$

(использованное здесь представление вектора малого поворота вытекает из (4.2) и напоминает $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$ из (4.3)).

Вариационное уравнение статики (в динамике добавятся неварьируемые силы инерции) запишется в виде

$$(6.3) \quad \int_0^l [(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + 1/2 \mathbf{m}_0 \times \theta) \cdot \delta \theta - \delta \Pi] ds + (\mathbf{Q}_0^* + \mathbf{Q}_1^*) \cdot \delta \mathbf{u} |_0^l + (\mathbf{M}_0^* + \mathbf{M}_1^* + 1/2 \mathbf{M}_0^* \times \theta) \cdot \delta \theta |_0^l = 0$$

Символом $(\dots)^*$ обозначены заданные нагрузки на концах.

Можно показать, что члены первого порядка $(\mathbf{q}_0 \cdot \delta \mathbf{u}$ и т. д.) в (6.3) взаимно уничтожаются. Оставшиеся члены образуют следующее вариаци-

вариационное уравнение:

$$(6.4) \quad \int_0^l [(\mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_1') \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{m}_1 + \mathbf{M}_1' + \mathbf{r}_0' \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{u}' \times \mathbf{Q}_0) \cdot \delta \theta] ds + \\ + (\mathbf{Q}_1^* - \mathbf{Q}_1) \cdot \delta \mathbf{u} |_0^l + (\mathbf{M}_1^* - \mathbf{M}_1) \cdot \delta \theta |_0^l = 0$$

где \mathbf{Q}_1 и \mathbf{M}_1 — выражения из (3.1).

Уравнения (6.4) и (3.1) равносильны. Конечно, назначение вариационной постановки не в выводе (3.1), а в построении приближенных методов (например, для задач устойчивости).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antman S. S.* The theory of rods // *Handbuch Physik*. В.: Springer. 1972. В. 6a/2. С. 641—703.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
3. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение. 1978. 222 с.
4. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 447 с.
5. *Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А.* К теории криволинейных стержней типа Тимошенко // *ПММ*. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 1015—1024.
6. *Елисеев В. В.* О построении уточненной модели упругой балки // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*. 1982. № 386. С. 106—116.
7. *Пановко Я. Г.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1985. 287 с.
8. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Нелинейные упругие волны в стержнях // *ПММ*. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 531—537.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.X.1987