

УДК 539.3

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СЛОЖНОЙ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Бородачев Н. М.

Предлагается вариант метода возмущений, основанный на использовании вариационных формул и позволяющий получать асимптотические разложения (АР) для смешанных пространственных задач теории упругости со сложной линией раздела краевых условий. Применение метода Лайтхилла позволяет превращать эти разложения в равномерно пригодные. Отдельно рассматривается задача для упругого тела с разрезом (трещиной) и контактная задача теории упругости. Для тела с разрезом вариационная формула определяет вариацию перемещения поверхности разреза, вызванную вариацией формы контура разреза. Показана эффективность этой формулы при построении АР в задачах, связанных с возмущением формы контура разреза. Подробно рассматриваются случаи разрезов сложной формы в бесконечном теле, мало отличающихся от кругового разреза. Для пространственных контактных задач теории упругости со сложной формой площадки контакта указывается схема построения подобных АР.

Обзор применения методов возмущения к смешанным задачам теории упругости содержится в [1, 2]. Решения смешанных пространственных задач теории упругости со сложной линией раздела граничных условий, полученные при помощи других методов, изложены в [3—8]. Исследовалось [9] поведение решения краевой задачи для псевдодифференциального уравнения (в частности, теории трещин) при вариации области.

1. Рассмотрим линейно-упругое тело, занимающее односвязный объем V . Пусть O — поверхность, ограничивающая этот объем. В теле имеется плоский разрез, поверхности которого S . На части O_1 поверхности тела задано кинематическое, а на другой ее части O_2 — статическое краевое условие. Граничный контур разреза Γ — плоская кривая. Воспользуемся прямоугольной системой координат x_1, x_2, x_3 . Разрез расположен в плоскости $x_3 = 0$. Положительную ориентацию S^+ поверхности S будем связывать с предельным значением $x_3 = 0^+$, а отрицательную ориентацию S^- — с $x_3 = 0^-$. Поверхности разреза S^+ и S^- содержатся в O_2 , т. е. на поверхностях разреза задано статическое краевое условие.

Увеличим размер разреза путем перемещения контура Γ в близкое положение Γ_1 . В каждой точке $M \in \Gamma$ вариацию $\delta n(M)$ направим вдоль внешней нормали к кривой Γ . Потенциальная энергия системы Φ в данном случае представляет собой функционал над u и Γ , т. е. $\Phi = \Phi(u, \Gamma)$, где u — вектор перемещения. Вариация контура разреза δn вызовет вариацию функционала Φ , которую обозначим $\delta_n \Phi$. Можно показать, что

$$(1.1) \quad \delta_n \Phi = 0$$

Ограничимся рассмотрением случая нормального отрыва. Тогда, в подробной записи, условие стационарности (1.1) принимает вид

$$(1.2) \quad \int_{\Gamma} K_1^2(M) \delta n(M) ds = -\alpha \int_{S^+} \sigma_{33}(Q) \delta_n u_3(Q) dS$$

$$\alpha = 2\mu/(\pi(1-\nu)), \quad M \in \Gamma, \quad Q \in S^+$$

где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, K_1 — коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва. Здесь предполагается, что нагрузка приложена только к поверхностям разреза S^+ и S^- . На обеих поверхностях S^+ и S^- заданы одинаковые нормальные напряжения $\sigma_{33}(Q)$, а касательные напряжения $\sigma_{13}(Q) = \sigma_{23}(Q) = 0$.

Рассмотрим два состояния равновесия данного тела с разрезом, называемые далее первым и вторым. В первом состоянии к поверхностям S^+ и S^- приложены единичные сосредоточенные силы $\sigma_{33}^{(1)}(Q) = -\delta(Q, Q_1)$, а во втором состоянии — некоторое давление $p(Q)$, т. е. $\sigma_{33}^{(2)}(Q) = -p(Q)$. Здесь $\delta(Q, Q_1)$ — дельта-функция. Кроме того, рассмотрим суммарное состояние, для которого

$$\sigma_{33}(Q) = \sigma_{33}^{(1)}(Q) + \sigma_{33}^{(2)}(Q)$$

Применяя выражение (1.2) к этим состояниям и используя теорему о взаимности работ [10], получаем

$$(1.3) \quad \delta_n u_z^{(2)}(Q) = \alpha^{-1} \int_{\Gamma} K_1^{(1)}(M; Q) K_1^{(2)}(M) \delta n(M) ds$$

Здесь $K_1^{(1)}$ соответствует $\sigma_{33}^{(1)}$, а $K_1^{(2)}$ и $u_z^{(2)}$ соответствуют $\sigma_{33}^{(2)}$. Формула (1.3) выражает вариацию перемещения поверхности разреза S^+ , вызванную вариацией контура разреза. При этом предполагается, что на поверхностях разреза задано давление $p(Q)$.

Рассмотрим частный случай формулы (1.3). Пусть Γ — окружность радиуса a , описанная вокруг начала координат. С использованием цилиндрической системы координат r, θ, z формула (1.3) принимает вид

$$(1.4) \quad \delta_n u_z^{(2)}(r, \theta) = \frac{\pi(1-\nu)a}{2\mu} \int_0^{2\pi} K_1^{(1)}(\varphi; r, \theta) K_1^{(2)}(\varphi) \delta n(\varphi) d\varphi$$

где φ — полярный угол, соответствующий точке M . Пусть, далее, разрез находится в бесконечном теле. Тогда для плоского кругового разреза имеем [11]

$$K_1^{(1)}(\varphi; r, \theta) = \frac{(a^2 - r^2)^{1/2}}{\pi^2 a^{1/2} [a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)]}$$

Подставляя это выражение в формулу (1.4) и освобождаясь от индексов, указывающих номер состояния, окончательно получаем

$$(1.5) \quad \delta_n u_z(r, \theta) = \frac{(1-\nu)a^{1/2}(a^2 - r^2)^{1/2}}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi} \frac{K_1(\varphi) \delta n(\varphi) d\varphi}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} \quad (r < a)$$

Формула (1.5) позволяет определить вариацию перемещения поверхности S^+ плоского разреза в бесконечном упругом теле при переходе контура разреза Γ (Γ — окружность радиуса a) в близкое положение Γ_1 . Вариация контура разреза определяется величиной $\delta n(\varphi)$. Предполагается, что к поверхностям разреза приложена произвольная нормальная нагрузка $\sigma_z(r, \theta) = -p(r, \theta)$, для которой коэффициент интенсивности напряжений равен $K_1(\varphi)$; $K_1(\varphi)$ определяется для контура Γ .

Полученные вариационные формулы (1.3)–(1.5) могут найти применение при решении различных задач для тел с разрезом. В частности, эти формулы оказались эффективными при построении АР в задачах, связанных с возмущением формы контура разреза.

2. Пусть в бесконечном упругом теле имеется плоский разрез сложной формы. Граничный контур разреза Γ_1 мало отличается от окружности ра-

диуса a (контур Γ) и его уравнение в полярных координатах имеет вид

$$(2.1) \quad \rho = a [1 + \varepsilon f(\varphi)], \quad \varepsilon \ll 1$$

где $f(\varphi)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция. Таким образом рассматривается лишь малое возмущение контура кругового разреза. Решение возмущенной задачи будем искать в виде АР по малому параметру ε

$$(2.2) \quad u_z(r, \theta) = u_{z0}(r, \theta) + \varepsilon u_{z1}(r, \theta) + O(\varepsilon^2)$$

Здесь $u_{z0}(r, \theta)$ — решение невозмущенной задачи (для кругового разреза). Перемещение $u_{z0}(r, \theta)$ может быть найдено при помощи способа, предложенного в работе [12].

Для нахождения малой поправки εu_{z1} к величине u_{z0} можно воспользоваться формулой (1.5). Из (2.1) следует, что

$$(2.3) \quad \delta n(\varphi) = \varepsilon a f(\varphi), \quad \varepsilon \ll 1$$

Так как $\delta_n u_z = \varepsilon u_{z1}$, то, используя (1.5) и (2.3), будем иметь

$$(2.4) \quad u_{z1}(r, \theta) = \frac{(1-\nu) a^{3/2}}{\mu (a^2 - r^2)^{1/2}} U(r, \theta)$$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{10}(\varphi) f(\varphi) \frac{(a^2 - r^2) d\varphi}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} \quad (r < a)$$

где $K_{10}(\varphi)$ вычисляется от давления $p(r, \theta)$, приложенного к поверхностям кругового разреза.

Интеграл Пуассона $U(r, \theta)$ дает гармоническую функцию внутри круга $r < a$ для произвольной кусочно-непрерывной функции $K_{10}(\varphi) f(\varphi)$. Функция $U(r, \theta)$ ограничена при $r < a$ и непрерывно примыкает к граничным значениям в точках непрерывности функции $K_{10}(\varphi) f(\varphi)$. Обычно $K_{10}(\varphi)$ — непрерывная функция; следовательно, $f(\varphi)$ может быть кусочно-непрерывной функцией. Используя свойства интеграла Пуассона, можно получить ряд оценок для функции $U(r, \theta)$, а следовательно, и для $u_{z1}(r, \theta)$.

Таким образом, формальное АР (2.2) построено. Приведем его анализ.

Функция $u_{z0}(r, \theta)$ при $r \rightarrow a - 0$ ведет себя как $O((a - r)^{1/2})$, а функция $u_{z1}(r, \theta)$ — как $O((a - r)^{-1/2})$. Предположение о малости возмущений нарушается вблизи критической точки $r = a$, где полученное решение не является равномерно пригодным. Путем применения метода Лайтхилла можно восстановить равномерную пригодность АР (2.2). Будем использовать слегка видоизмененный вариант этого метода, предложенный в [13].

3. Рассмотрим конкретные примеры построения равномерно пригодных АР.

Пусть к поверхностям разреза приложено равномерное давление, т. е.

$$(3.1) \quad p(r, \theta) = p = \text{const}$$

В этом случае, как известно [11]

$$(3.2) \quad K_{10}(\varphi) = \frac{2pa^{1/2}}{\pi}, \quad u_{z0}(r, \theta) = \frac{2(1-\nu)p}{\pi\mu} (a^2 - r^2)^{1/2}$$

Подставляя выражения (3.2) в (2.2) и (2.4), получаем

$$(3.3) \quad u_z(r, \theta) = \frac{2(1-\nu)p}{\pi\mu} \left[(a^2 - r^2)^{1/2} + \varepsilon \frac{a^2 F(r, \theta)}{(a^2 - r^2)^{1/2}} \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)(a^2 - r^2) d\varphi}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)}$$

Возмущенное перемещение, определяемое формулой (3.3), имеет особенность при $r \rightarrow a$. Следовательно, это решение не является равномерно пригодным вблизи критической точки $r = a$.

Источник неоднородности можно устранить при помощи метода Лайтхилла. Заменяем r слегка деформированной координатой r_0 . Положим

$$(3.4) \quad r = r_0 + \varepsilon \Psi(r_0, \theta)$$

и подставим в первую формулу (3.3). Очевидно, приближение первого порядка будет иметь особенность такого же порядка, как и нулевое приближение, если $\Psi(r_0, \theta) = r_0 F(r_0, \theta)$. Тогда выражение в квадратных скобках в (3.3) равно

$$[1 + \varepsilon F(r_0, \theta)] (a^2 - r_0^2)^{1/2}$$

Возвращаясь к переменной r , окончательно получаем равномерно пригодное разложение

$$(3.5) \quad u_z(r, \theta) = \frac{2(1-\nu)p}{\pi\mu} \{ [1 + 2\varepsilon F(r, \theta)] a^2 - r^2 \}^{1/2} + O(\varepsilon^2)$$

Формула (3.5) определяет перемещение поверхности S^+ разреза, граничный контур которого Γ_1 задается уравнением (2.1). Плоский разрез находится в бесконечном упругом теле; к поверхностям разреза приложено равномерное давление p . Функцию $F(r, \theta)$, входящую в (3.5) и зависящую от формы контура разреза Γ_1 , можно найти по формуле (3.3).

Чтобы проверить формулу (3.5), рассмотрим эталонную задачу, для которой известно точное решение. Пусть контур Γ_1 — эллипс с полуосями $(1 + \varepsilon)a$ и a . В этом случае уравнение (2.1) остается в силе, если $f(\varphi) = \cos^2 \varphi$. Подставляя это выражение в (3.3), находим

$$(3.6) \quad F(r, \theta) = (a^2 + r^2 \cos 2\theta)/(2a^2)$$

Переходя в (3.5) к прямоугольным координатам, получаем

$$u_z(x_1, x_2) = \frac{2(1-\nu)pa}{\pi\mu} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left\{1 - \frac{x_1^2}{[(1+\varepsilon)a]^2} - \frac{x_2^2}{a^2}\right\}^{1/2} + O(\varepsilon^2)$$

Такой же результат получается из известного точного решения [11].

Рассмотрим теперь более сложную задачу, для которой точное решение неизвестно. Пусть граничный контур разреза задан уравнением (2.1), в котором

$$(3.7) \quad f(\varphi) = 1 + \cos n\varphi$$

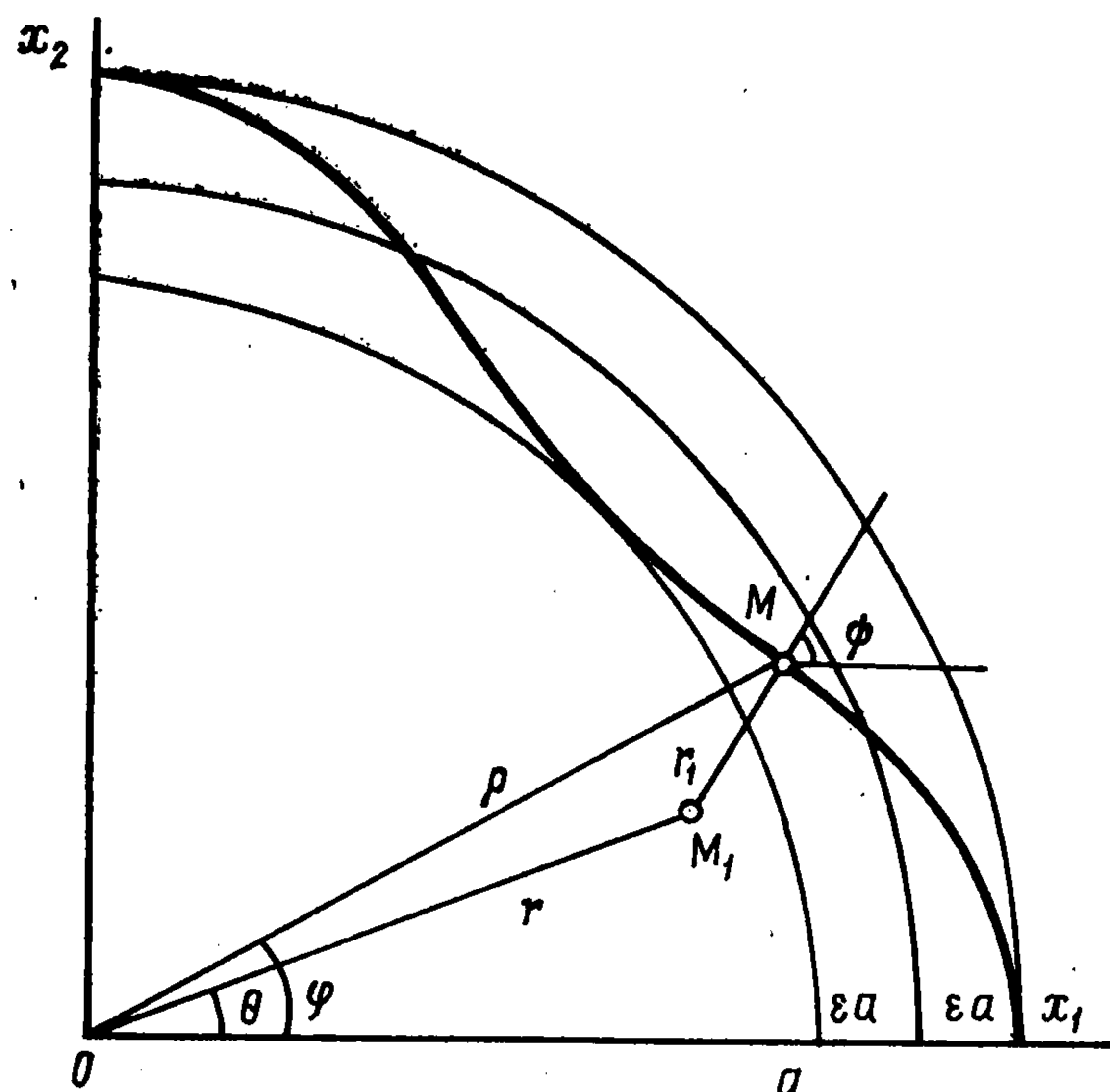
n — четное положительное число (рассматриваемый контур разреза при $n = 4$ показан на фигуре для первого квадранта, поскольку он симметричен относительно осей x_1 и x_2).

Подставляя выражение (3.7) во вторую формулу (3.3) и выполняя интегрирование, находим

$$(3.8) \quad F(r, \theta) = 1 + (r/a)^n \cos n\varphi$$

Таким образом, формулы (3.5) и (3.8) определяют перемещение поверхности S^+ разреза, когда его граничный контур задается уравнениями (2.1), (3.7) и к поверхностям разреза приложено равномерное давление.

Наибольший практический интерес представляет выражение для ко-



ээффициента интенсивности напряжений. Чтобы получить это выражение, сначала необходимо найти асимптотическое представление для u_z вблизи граничного контура разреза. При этом понадобятся координаты r, θ точки M_1 , расположенной вблизи границы разреза на внутренней нормали к контуру разреза в точке M (фигура), с координатами ρ, φ . Можно показать, что

$$(3.9) \quad \operatorname{tg} \psi = (1 + 2\epsilon n \sin n\varphi / \sin 2\varphi) \operatorname{tg} \varphi + O(\epsilon^2)$$

$$r = (\rho - r_1) + O(\epsilon^2), \quad \theta = \varphi + \epsilon n a^{-1} r_1 \sin n\varphi + O(\epsilon^3),$$

$$r_1 \rightarrow 0$$

Здесь r_1 — расстояние между точками M и M_1 . Используя равенства (3.5), (3.8) и (3.9), находим асимптотические представления для перемещения и коэффициента интенсивности напряжений

$$(3.10) \quad u_z \approx 2(1 - \nu) \rho a^{1/2} (\pi \mu)^{-1} \{1 + 1/2 \epsilon [1 + (1 - n) \cos n\varphi] + O(\epsilon^2)\} (2r_1)^{1/2}, \quad r_1 \rightarrow 0$$

$$(3.11) \quad K_1 = 2\pi^{-1} \rho a^{1/2} \{1 + 1/2 \epsilon [1 + (1 - n) \cos n\varphi]\} + O(\epsilon^2)$$

Для контура разреза, показанного на фигуре, т. е. при $n = 4$, из формулы (3.11) следует, что в первом квадранте (фигура) K_1 достигает наибольшего значения при $\varphi = \pi/4$, а наименьшего — при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

В общем случае из формулы (3.11) видно, что наибольшее значение K_1 прямо пропорционально величине $(1 + 1/2 \epsilon n)$. Следовательно, $K_{1\max}$ растет с увеличением кривизны граничного контура разреза. Однако число n в формуле (3.11) не может быть весьма большим; его величина ограничивается требованием, чтобы поправка $1/2 \epsilon n$ была мала по сравнению с единицей.

4. Рассмотрим теперь случай, когда к поверхностям разреза приложены сосредоточенные силы. Пусть

$$(4.1) \quad p(r, \theta) = \frac{P}{2\pi r} \delta(r)$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция. В этом случае

$$(4.2) \quad K_{10}(\varphi) = \frac{P}{\pi^2 a^{3/2}}, \quad u_{z0}(r, \theta) = \frac{P(1 - \nu)}{\pi^2 \mu r} \arccos \frac{r}{a}.$$

На основании формул (2.2), (2.4) и (4.2) имеем

$$(4.3) \quad u_z(r, \theta) = \frac{P(1-\nu)}{\pi^2\mu} \left[\frac{1}{r} \arccos \frac{r}{a} + \varepsilon \frac{F(r, \theta)}{(a^2 - r^2)^{1/2}} + O(\varepsilon^2) \right]$$

где $F(r, \theta)$ определяется второй формулой (3.3). Решение (4.3) не является равномерно пригодным. Поэтому снова воспользуемся заменой переменной (3.4) и методом Лайтхилла. В результате найдем

$$(4.4) \quad r = r_0 [1 + \varepsilon F(r_0, \theta)]$$

$$u_z(r, \theta) = \frac{P(1-\nu)}{\pi^2\mu r} \arccos \frac{r}{[1 + \varepsilon F(r, \theta)] a} + O(\varepsilon^2)$$

Последнее выражение является равномерно пригодным. Особенность при $r = 0$ в формуле для u_z вызвана характером нагрузки, приложенной к поверхностям разреза. При $r \rightarrow 0$ вторая формула (4.4) дает результат, соответствующий действию сосредоточенной силы на границу упругого полупространства.

Формула (4.4) для u_z применима к плоскому разрезу, граничный контур Γ_1 которого дается уравнением (2.1).

В качестве примера рассмотрим случай, когда граничный контур разреза — эллипс с полуосями $(1 + \varepsilon) a$ и a . Для такого разреза функция $F(r, \theta)$ определяется формулой (3.6).

Чтобы определить перемещение u_z вблизи границы эллиптического разреза, перейдем от координат x_1, x_2, x_3 к координатам r_1, θ_1, ψ [14]. При $\theta_1 = \pi$ имеем

$$(4.5) \quad x_1 = \cos \psi (a_1 - a_2 r_1 \Pi_0)$$

$$x_2 = \sin \psi (a_2 - a_1 r_1 \Pi_0)$$

$$\Pi_0 = (a_1^2 \sin^2 \psi + a_2^2 \cos^2 \psi)^{-1/2}$$

$$K_1 = \frac{\mu}{1-\nu} \lim_{r_1 \rightarrow 0} \frac{u_z}{(2r_1)^{1/2}}$$

(ψ — параметрический угол эллипса). В рассматриваемом случае

$$a_1 = (1 + \varepsilon) a, \quad a_2 = a$$

$$\sin \psi = \sin \varphi (1 + \varepsilon \cos^2 \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

где φ — полярный угол, входящий в уравнение (2.1). Используя формулы (4.4), (3.6) и (4.5), находим

$$u_z \approx \frac{P(1-\nu)}{\pi^2\mu a^{3/2}} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} (\sin^2 \psi - 4 \cos^2 \psi) + O(\varepsilon^2) \right] (2r_1)^{1/2}, \quad r_1 \rightarrow 0$$

$$K_1(\psi) = \frac{P}{\pi^2 a^{3/2}} \left[1 - \frac{\varepsilon}{4} (3 + 5 \cos 2\psi) \right] + O(\varepsilon^2)$$

Как показывают рассмотренные выше примеры, формулы (2.2), (2.4) позволяют достаточно просто построить АР для перемещения поверхности разреза сложной формы в бесконечном теле, когда к поверхностям разреза приложены распределенные нагрузки или сосредоточенные силы. Используя метод Лайтхилла, это АР можно сделать равномерно пригодным и получить формулу для вычисления коэффициента интенсивности напряжений.

5. Рассмотрим теперь пространственную контактную задачу теории упругости. Пусть линейно-упругое тело занимает односвязный объем V . Поверхность O , ограничивающая этот объем, состоит из некоторой поверхности O_1 и плоской поверхности O_0 , уравнение которой $x_3 = 0$. В плоскую поверхность тела O_0 вдавливаются жесткий цилиндрический штамп произвольного сечения. Основание штампа имеет форму выпуклой поверхности. Плоская поверхность O_0 разбивается на две части: площад-

ку контакта O_1 и поверхность O_2 (O_2 считаем свободной от напряжений). На O_1 задано статическое краевое условие.

В данном случае контур площадки контакта Γ , наряду с тензором напряжений, вводится в число независимых элементов, характеризующих состояние упругого тела. Из вариации контура площадки контакта с использованием функционала принципа минимума дополнительной работы получено уравнение [15]

$$(5.1) \quad \int_{\Gamma} K_1^2(M) \delta n(M) ds = - \frac{2\mu}{\pi(1-\nu)} \iint_{O_3} u_3(Q) \delta_n \sigma_{33}(Q) dS$$

$$M \in \Gamma, \quad Q \in O_3$$

где K_1 — коэффициент интенсивности сжимающих напряжений, δn — вариация контура площадки контакта, $\delta_n \sigma_{33}$ — вариация напряжения σ_{33} на площадке контакта, вызванная вариацией δn .

Формула (5.1) для пространственной контактной задачи теории упругости играет ту же роль, что и формула (1.2) для тела с разрезом. Поэтому дальнейшее решение контактной задачи со сложной формой площадки контакта может быть выполнено по той же схеме, что и задачи со сложной формой плоского разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука. 1976. 493 с.
2. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672—683.
3. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. Киев: Наук. думка. 1982. 347 с.
4. Мартыненко М. Д. Некоторые пространственные задачи теории упругости // Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 78—85.
5. Моссаковский В. И., Моссаковская Л. Р. Прочность упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к круговой // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-е ДГУ. 1977. Вып. 22. С. 56—74.
6. Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С. Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наук. думка. 1985. 175 с.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1968. 246 с.
8. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука. 1982. 342 с.
9. Захаревич И. С. О вариации решений интегродифференциальных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 961—968.
10. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
11. Mechanics of fracture. V. 2. Kassir M. K., Sih G. C. Three-dimensional crack problems. Leyden: Noordhoff. 1975. 452 p.
12. Martin P. A. The discontinuity in the elastic displacement vector across a penny-shaped crack under arbitrary loads // J. Elast. 1982. V. 12. No. 2. P. 201—218.
13. Притуло М. Ф. Об определении равномерно точных решений дифференциальных уравнений методом возмущения координат // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 444—448.
14. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир. 1975. Т. 2. С. 83—203.
15. Бородачев Н. М. Применение принципа минимума дополнительной работы для контактных задач теории упругости // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 9. С. 116—120.