

УДК 539.3]

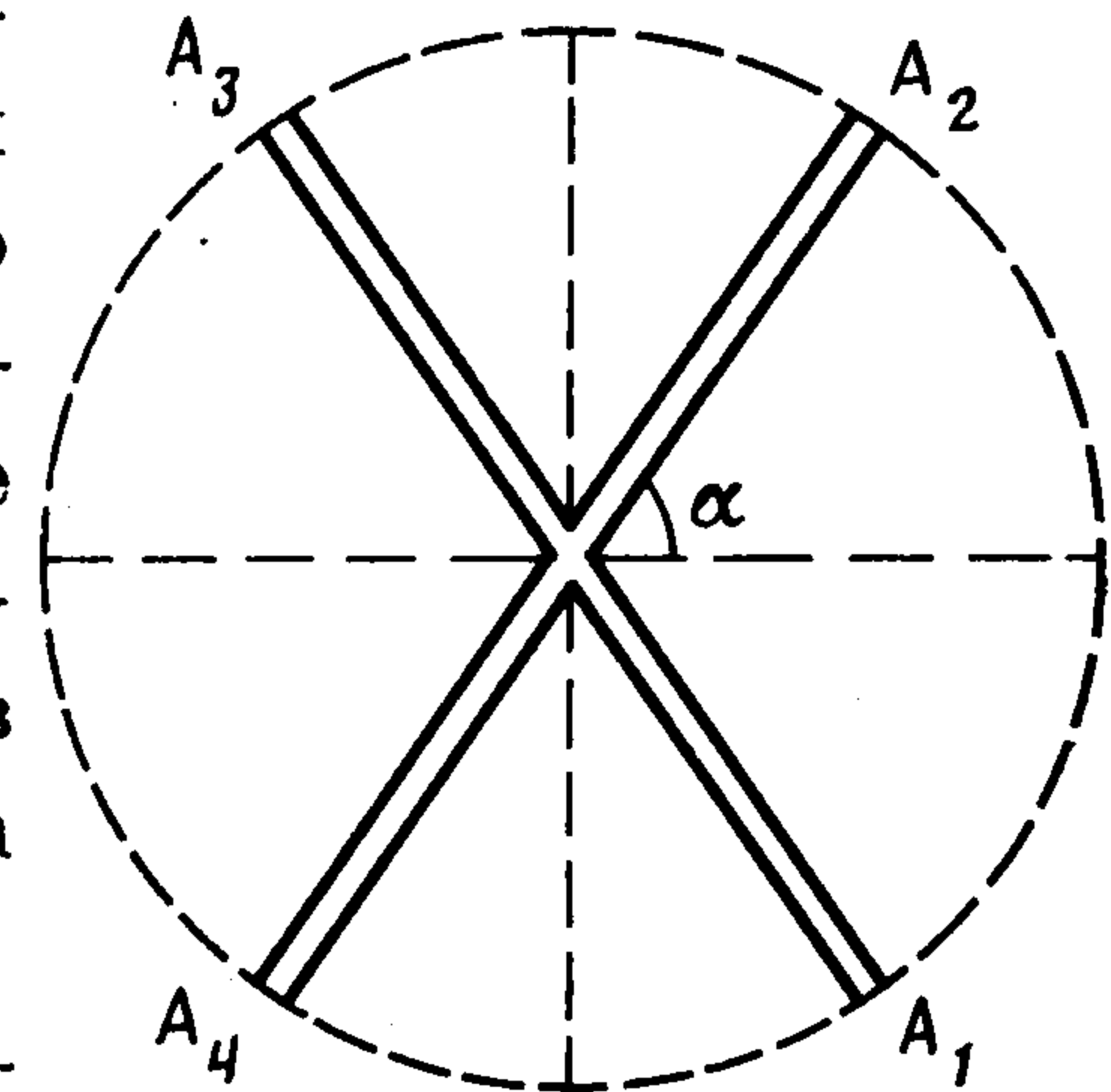
ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ РАЗРЕЗАМИ

Антипов Ю. А., Попов Г. Я.

Предлагается построение точного замкнутого решения задачи о концентрации напряжений в упругой плоскости возле двух прямолинейных разрезов одинаковой длины, пересекающихся посередине под произвольным углом; по берегам разрезов приложена произвольная разрывающая и сдвигающая нагрузка. Построение решения задачи основано на сведении ее к допускающей решение в квадратурах задаче Римана с матричным коэффициентом специальной структуры. Возможность решения такой задачи была указана в [1]. Это решение было построено сначала для случая, когда индекс $\kappa_e = 0$ отношения характеристических функций матричного коэффициента [2], а затем и при $\kappa_e \neq 0$ [3].

Предлагается отличающийся от изложенного в [3] прием решения задачи Римана для случаев $\kappa_e = 1$ и $\kappa_e = -1$. Решение сформулированной задачи, построенное в квадратурах, преобразовано к виду, удобному для численной реализации. Получены расчетные формулы для коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Постановка задачи о пересекающихся разрезах и ее расчленение на вспомогательные задачи. Рассматривается плоское напряженное состояние упругой плоскости с двумя разрезами одинаковой длины $2b$ (без ограничения общности считаем $b = 1$), пересекающимися посередине под произвольным углом 2α (задача T). Биссектрису большего угла между разрезами примем за горизонтальную ось симметрии (фиг. 1). Положительное направление изменения угла θ , как обычно, — против часовой стрелки. К берегам разрезов OA_n приложена положительная нагрузка $\sigma_\theta = f_n(r)$, $\tau_{r\theta} = h_n(r)$ ($n = 1, 2, 3, 4$).



Фиг. 1

Разобьем задачу T на симметричную и антисимметричную относительно горизонтальной оси симметрии, а затем каждую из полученных задач еще на две: симметричную и антисимметричную относительно вертикальной оси симметрии. Тогда решение задачи T есть сумма решений четырех задач T_{kj} ($k = 1, 2; j = 1, 2$), каждая из которых формулируется следующим образом.

Бесконечный клин ($0 < r < \infty$, $\alpha - \pi/2 < \theta < \alpha$) имеет разрез ($0 < r < 1$, $\theta = \pm 0$) (фиг. 2), к берегам которого приложена нагрузка

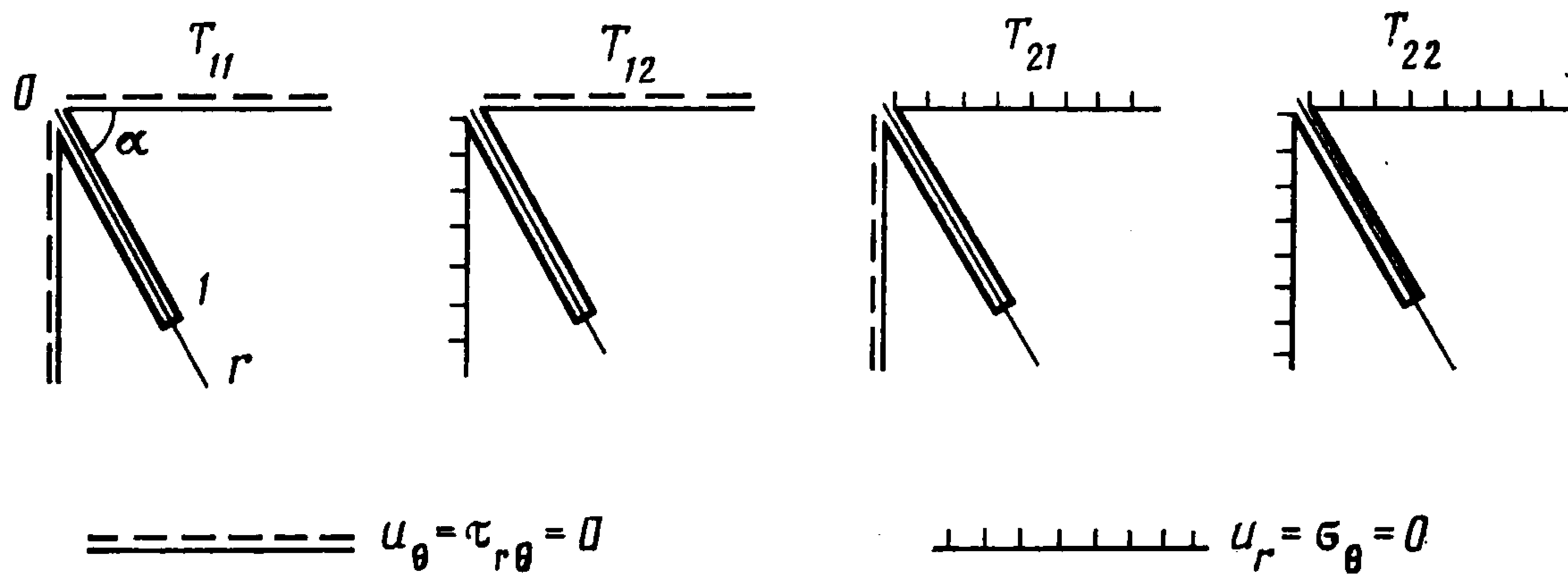
$$\sigma_\theta(r, \pm 0) = f_{kj}(r), \quad \tau_{r\theta}(r, \pm 0) = h_{kj}(r) \quad (0 < r < 1)$$

$$f_{kj} = [f_1 - (-1)^k f_2 + (-1)^{k+j} f_3 - (-1)^j f_4]/4$$

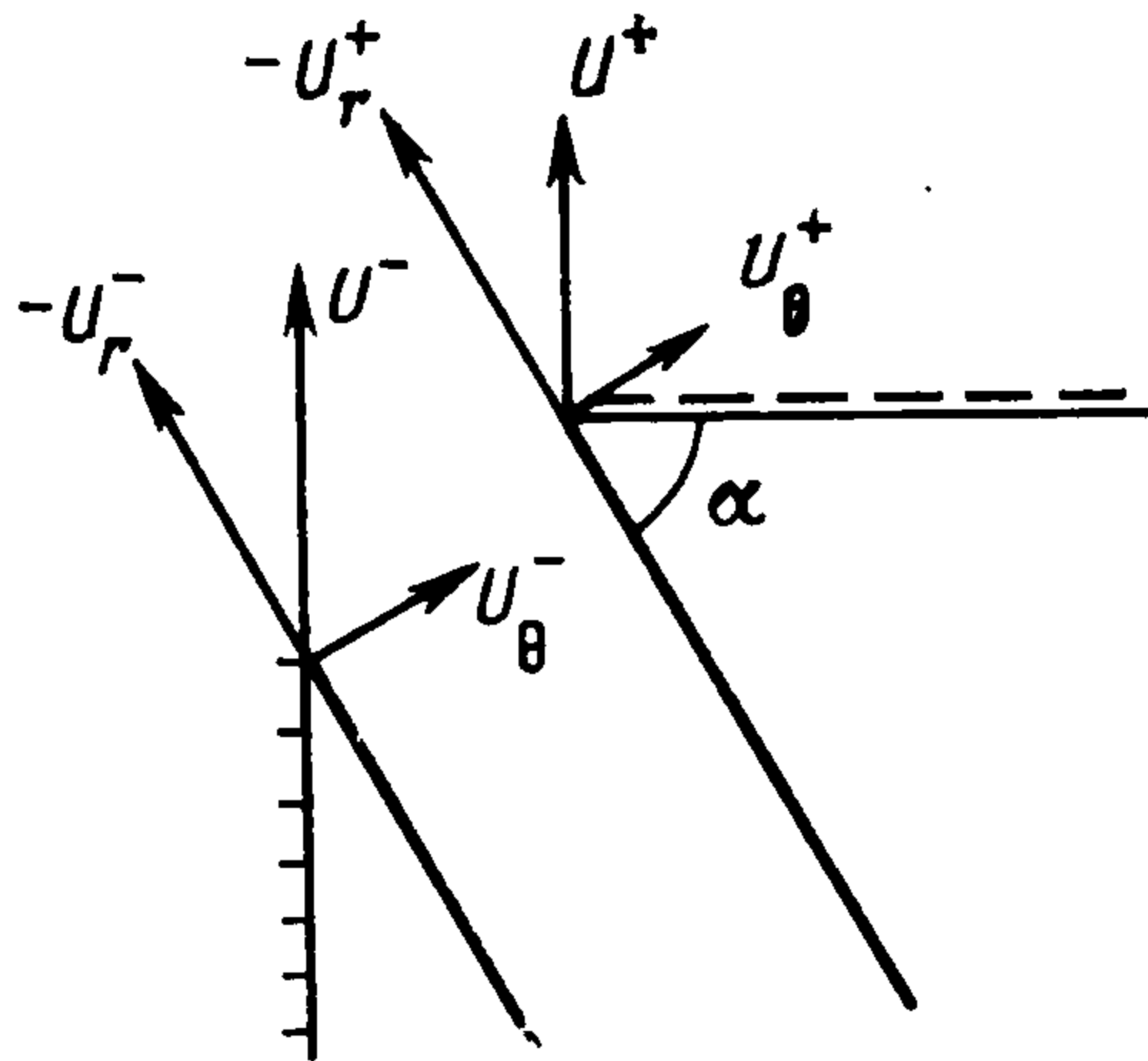
$$h_{kj} = [h_1 + (-1)^k h_2 + (-1)^{k+j} h_3 + (-1)^j h_4]/4$$

На грани клина $\theta = \alpha$ выполнено k -е, а на грани $\theta = \alpha - \pi/2$ — j -е краевое условие из следующей совокупности ($0 < r < \infty$):

$$1) u_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad 2) u_r = \sigma_\theta = 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Например, для задачи T_{12} на грани $\theta = \alpha$ должно выполняться условие 1), а на грани $\theta = \alpha - \pi/2$ — условие 2).

При $0 < r < \infty$ имеют место соотношения

$$(1.1) \quad \sigma_{\theta}|_{\theta=-0} = \sigma_{\theta}|_{\theta=+0}, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=-0} = \tau_{r\theta}|_{\theta=+0} \\ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \Big|_{\theta=-0} - \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \Big|_{\theta=+0} = \chi_1(r), \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{\theta=-0} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{\theta=+0} = \chi_2(r)$$

Функции χ_1, χ_2 равны нулю при $1 < r < \infty$ и неизвестны при $0 \leq r \leq 1$.

В задачах T_{kj} ($k = 1, j = 2$ или $k = 2, j = 1$) должно быть выполнено дополнительное условие

$$(1.2) \quad \int_0^1 \chi_1(r) dr = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{k-1}{2} \pi \right) \int_0^1 \chi_2(r) dr$$

Докажем это условие при $k = 1$ (задача T_{12}). Обозначая $u_{\theta}^{\pm} = u_{\theta}|_{\theta=\pm 0}$, $u_r^{\pm} = u_r|_{\theta=\pm 0}$ при $r = 0$, имеем в силу (1.1)

$$(1.3) \quad \int_0^1 \chi_1(r) dr = u_{\theta}^+ - u_{\theta}^-, \quad \int_0^1 \chi_2(r) dr = u_r^+ - u_r^-$$

Далее, так как при $\theta = \pm 0$, $r = +0$ перемещения u^{\pm} в направлении $\theta = \alpha + \pi/2$ (фиг. 3) равны нулю, то

$$u^{\pm} \equiv u_{\theta}^{\pm} \cos \alpha - u_r^{\pm} \sin \alpha = 0$$

Сопоставляя последние соотношения с (1.3), приходим к требуемому условию (1.2). Аналогично оно доказывается при $k = 2$.

Пусть $L^{(n)}, N^{(n)}$ — коэффициенты интенсивности напряжений соответственно σ_{θ} и $\tau_{r\theta}$ в вершине A_n (фиг. 1) для задачи T , а L_{kj}, N_{kj} — коэффициенты интенсивности напряжений $\sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}$ для задач T_{kj} . Тогда

можно убедиться, что

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}, & N^{(1)} &= N_{11} + N_{12} + N_{21} + N_{22} \\ L^{(2)} &= L_{11} + L_{12} - L_{21} - L_{22}, & N^{(2)} &= -N_{11} - N_{12} + N_{21} + N_{22} \\ L^{(3)} &= L_{11} - L_{12} - L_{21} + L_{22}, & N^{(3)} &= N_{11} - N_{12} - N_{21} + N_{22} \\ L^{(4)} &= L_{11} - L_{12} + L_{21} - L_{22}, & N^{(4)} &= -N_{11} + N_{12} - N_{21} + N_{22} \end{aligned}$$

Из анализа характеристических уравнений задач T_{kj} установлено, что все сформулированные задачи из класса S [4] (его составляют задачи, для которых справедлив принцип Сен-Венана) и напряжения при $r \rightarrow \infty$ убывают не медленнее, чем r^{-1} . При $r \rightarrow 0$ напряжения могут возрастать, но не быстрее, чем $r^{-\delta}$ ($0 < \delta < 1$).

2. Решение задач T_{kk} . Получим сначала решение вспомогательных задач T_{kk} ($k = 1, 2$). Введем в рассмотрение векторы

$$(2.1) \quad \chi(r) = \|\chi_1(r), \chi_2(r)\|, \quad \psi(r) = \|\sigma_\theta(r, 0), \tau_{r\theta}(r, 0)\|$$

$$\chi_-^\circ(s) = \int_0^1 \chi(r) r^s dr, \quad \psi_-^\circ(s) = \int_0^1 \psi(r) r^s dr, \quad \psi_+^\circ(s) = \int_1^\infty \psi(r) r^s dr$$

Векторы $\chi_-^\circ(s)$ и $\psi_-^\circ(s)$ — аналитические функции при $\operatorname{Re} s > -\delta$, а $\psi_+^\circ(s)$ — при $\operatorname{Re} s < 0$. Пусть $L = L_\gamma^- \cup C_\gamma \cup L_\gamma^+$, $L_\gamma^\pm = \{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = -\gamma, \operatorname{Im} t \gtrless \pm |\gamma|\}$, $C_\gamma = \{t \in \mathbb{C}, |t| = |\gamma|, \operatorname{Re} t < 0\}$, $-\delta < \gamma < 0$. Контур L делит плоскость комплексного переменного \mathbb{C} на две области D^+ и $D^- \ni 0$. Положительным направлением на L считаем то, которое оставляет область D^+ слева. Так как $\psi(r) = O(r^{-1})$ при $r \rightarrow \infty$ и справедливо

$$\lim_{\gamma \rightarrow -0} \int_1^\infty \frac{1}{r} r^{\gamma+i\tau} dr = \lim_{\gamma \rightarrow -0} \left(\frac{-\gamma}{\gamma^2 + \tau^2} + \frac{i\tau}{\gamma^2 + \tau^2} \right) = \pi\delta(\tau) + \frac{i}{\tau}$$

($\delta(\tau)$ — дельта-функция), то вектор $\psi_+^\circ(s)$ аналитичен в области $D^+ \cup L$, а векторы $\chi_-^\circ(s)$ и $\psi_-^\circ(s)$ — в $D^- \cup L$. Следовательно, вектор $\varphi(s) = \|\varphi_1(s), \varphi_2(s)\|$, определяемый соотношениями

$$(2.2) \quad \varphi(s) = \psi_+^\circ(s), \quad s \in D^+; \quad \varphi(s) = \chi_-^\circ(s), \quad s \in D^-$$

является кусочно-аналитическим с линией скачков L .

Методом [5], основанным на интегральном преобразовании Меллина, задачи T_{kk} сводим к матричной задаче Римана (E — модуль упругости)

$$(2.3) \quad \varphi^-(t) = a \operatorname{ctg}(\pi t/2) G(t) \varphi^+(t) + g(t), \quad t \in L$$

$$a = 4/E, \quad g(t) = a \operatorname{ctg}(\pi t/2) G(t) \psi_-^\circ(t)$$

$$(2.4) \quad G(s) = \left\| \begin{array}{cc} b(s) + c(s)l(s) & c(s)m_-(s) \\ c(s)m_+(s) & b(s) - c(s)l(s) \end{array} \right\|$$

$$b(s) = 1/2 (-1)^{k+1} \operatorname{tg}(\pi s/2) [d_k^{-1}(s, \alpha) \cos 2\alpha s + d_k^{-1}(s, \pi/2 - \alpha) \cos(\pi - 2\alpha)s]$$

$$c(s) = 1/2 \operatorname{tg}(\pi s/2) [d_k^{-1}(s, \alpha) - d_k^{-1}(s, \pi/2 - \alpha)]$$

$$(2.5) \quad d_k(s, \alpha) = s \sin 2\alpha - (-1)^k \sin 2\alpha s \quad (k = 1, 2)$$

$$l(s) = -\cos 2\alpha, \quad m_\pm(s) = (\pm s + 1) \sin 2\alpha$$

Пусть

$$\Delta(s) = \lambda_1(s) \lambda_2(s), \quad \varepsilon(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_2(s)}, \quad f(s) = l^2(s) + m_+(s) m_-(s)$$

$$\kappa_\varepsilon = \operatorname{ind} \{\lambda_1(t) [\lambda_2(t)]^{-1}\}, \quad \kappa_\Delta = \operatorname{ind} [\lambda_1(t) \lambda_2(t)]$$

где $\lambda_1(s), \lambda_2(s)$ — характеристические функции (собственные числа) матрицы $G(s)$, тогда $\Delta(s)$ и $\varepsilon(s)$ — определитель и показатель $G(s)$ [2] и

$$\lambda_n(s) = b(s) - (-1)^n c(s) f^{1/2}(s) \quad (n = 1, 2)$$

Характеристические функции обладают следующими непосредственно проверяемыми свойствами:

$$1) \lambda_n(-0 + i\tau) \sim 1, \quad \tau \rightarrow \pm\infty$$

$$2) \lambda_n(\gamma) > 0, \quad \gamma \rightarrow -0$$

$$3) \lambda_n(t) > 0, \quad t \in L_\gamma^\pm \quad (t = i\tau, \quad |\gamma| < |\tau| < \infty)$$

Из этих свойств следует, что $[\arg \lambda_n(t)]|_L = 0$, а значит, $\kappa_\varepsilon = \kappa_\Delta = 0$. Следовательно, решение задачи факторизации

$$(2.6) \quad G(T) = X^+(t) [X^-(t)]^{-1} = [X^-(t)]^{-1} X^+(t), \quad t \in L$$

определяется формулами [2]

$$(2.7) \quad \frac{X(s)}{\Lambda(s)} = \begin{vmatrix} c_+(s) & s_+(s) \\ s_-(s) & c_-(s) \end{vmatrix}, \quad \Lambda(s) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Delta^{1/2}(t)}{t-s} dt \right]$$

$$(2.8) \quad c_\pm(s) = \operatorname{ch} [f^{1/2}(s)\beta(s)] \pm l(s) f^{-1/2}(s) \operatorname{sh} [f^{1/2}(s)\beta(s)]$$

$$s_\pm(s) = m_\mp(s) f^{-1/2}(s) \operatorname{sh} [f^{1/2}(s)\beta(s)]$$

$$(2.9) \quad \beta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varepsilon(t)}{f^{1/2}(t)} \frac{dt}{t-s}$$

Используем представление

$$\operatorname{tg} \frac{\pi s}{2} = - \frac{K^+(s)}{K^-(s)}; \quad K^+(s) = \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(-s/2)}, \quad K^-(s) = \frac{\Gamma(1 + s/2)}{\Gamma(1/2 + s/2)}$$

где функции $K^\pm(s)$ аналитичны в областях D^\pm и не имеют там нулей, причем в силу разложения из [6] (с. 62) имеем

$$K^\pm(s) \sim (\mp s/2)^{1/2}, \quad s \rightarrow \infty, \quad s \in D^\pm \quad (|\arg s| < \pi)$$

На основании теоремы абелева типа [7] (с. 473) получаем $\varphi(s) = O(s^{-1/2})$, $s \rightarrow \infty$, $s \in D^\pm$ ($s \in L$). Подставим (2.6) в (2.3) и примем во внимание ограниченность канонической матрицы $X(s)$ на бесконечности. Последующее применение теоремы Лиувилля приводит к следующему решению задачи (2.3):

$$\varphi^+(s) = - \frac{K^+(s)}{aX^+(s)} \Omega^+(s), \quad s \in D^+; \quad \varphi^-(s) = \frac{K^-(s)}{X^-(s)} \Omega^-(s), \quad s \in D^-$$

$$\Omega(s) = \frac{a}{2\pi i} \int_L \frac{X^+(t)}{K^+(t)} \frac{\psi_-^\circ(t)}{t-s} dt$$

Определим теперь коэффициенты интенсивности напряжений $\sigma_\theta(r, 0)$, $\tau_{r\theta}(r, 0)$ в вершине разреза

$$(2.10) \quad K_1 = \lim_{r \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi(r-1)} \sigma_\theta(r, 0), \quad K_2 = \lim_{r \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi(r-1)} \tau_{r\theta}(r, 0)$$

Вследствие (2.1), (2.2) на основании теоремы абелева типа имеем

$$\varphi_n^+(s) \sim K_n (-2s)^{-1/2}, \quad s \rightarrow \infty, \quad |\arg(-s)| \leq \theta_0 < \pi/2$$

Учитывая, что

$$\varepsilon(i\tau) f^{-1/2}(i\tau) = O(e^{-p_0|\tau|}), \quad |\tau| \rightarrow \infty \quad (p_0 > 0)$$

для интеграла (2.9) получаем оценку

$$\beta(s) \sim -\frac{u}{s \sin 2\alpha}, \quad s \rightarrow \infty; \quad u = \frac{\sin 2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(i\tau) d\tau}{f^{1/2}(i\tau)}$$

и тогда с учетом (2.7) имеем

$$[X(s)]^{-1} \sim Q, \quad s \rightarrow \infty; \quad Q = \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix}$$

Если обозначить

$$v = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{a} \Omega(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X^+(t)}{K^+(t)} \psi_-^{\circ}(t) dt$$

то находим окончательно

$$(2.11) \quad K = Qv, \quad K = \|K_1, K_2\|$$

Эта формула определяет коэффициенты L_{kk} , N_{kk} для задач T_{kk} ($k = 1, 2$): $L_{kk} = K_1$, $N_{kk} = K_2$.

Детализируем формулы (2.11) для случая постоянной нагрузки, т. е. $\psi(r) \equiv \psi = \|\psi_1, \psi_2\|$. Имеем

$$\Omega(s) = \frac{a}{s+1} \left[\frac{X^+(t)\psi}{K^+(s)} - \frac{X^+(-1)\psi}{K^+(-1)} \right], \quad s \in D^+$$

$$K = -\sqrt{\pi} Q X^+(-1) \psi$$

Аналогичные формулы можно получить и для полиномиальной нагрузки.

Заметим, что при численной реализации удобно пользоваться следующими формулами:

$$\beta(s) = -\frac{s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(i\tau)}{f^{1/2}(i\tau)} \frac{d\tau}{\tau^2 + s^2}, \quad \Lambda(s) = \exp \left[-\frac{s}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln \Delta(i\tau)}{\tau^2 + s^2} d\tau \right]$$

($s \neq 0$), которые получаются из (2.9), (2.7) путем очевидных преобразований [2].

3. Решение задачи T_{12} . Рассмотрим теперь случай $k \neq j$. Пусть сначала $k = 1$, $j = 2$. Сохраняя те же обозначения (2.1), (2.2), что и при решении задач T_{kk} , приходим к матричной задаче Римана

$$(3.1) \quad \varphi^-(t) = -aiG(t)\varphi^+(t) + g(t), \quad t \in L$$

где $a = 4/E$, $g(t) = -aiG(t)\psi_-^{\circ}(t)$, $G(s)$ имеет вид (2.4), причем

$$b(s) = 1/2i [d_1^{-1}(s, \alpha) \cos 2\alpha s - d_2^{-1}(s, \pi/2 - \alpha) \cos (\pi - 2\alpha)s]$$

$$c(s) = 1/2i [d_1^{-1}(s, \alpha) - d_2^{-1}(s, \pi/2 - \alpha)]$$

$$l(s), m_{\pm}(s) \text{ и } d_k(s, \alpha) \text{ определяются в (2.5).}$$

Характеристические функции обладают следующими свойствами:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 1) \lambda_n(-0 + i\tau) &\sim \pm 1, \quad \tau \rightarrow \pm \infty \quad (n = 1, 2) \\ 2) \lambda_1(\gamma) &\sim i\pi(\eta\gamma)^{-1}, \quad \lambda_2(\gamma) \sim -i\pi\gamma/4, \quad \gamma \rightarrow -0 \\ \eta &= (2\alpha + \sin 2\alpha)(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) > 0 \quad (0 < \alpha < \pi/2) \\ 3) \lambda_n(t) &\leq 0, \quad t \in L_{\gamma^{\mp}} \quad (n = 1, 2) \end{aligned}$$

Отсюда $[\arg \lambda_1(t)]|_L = \pi$, $[\arg \lambda_2(t)]|_L = -\pi$, и поэтому

$$\kappa_\Delta = \text{ind} \{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\} = 0, \quad \kappa_\varepsilon = \text{ind} \{\lambda_1(t)[\lambda_2(t)]^{-1}\} = 1$$

Выберем ветви логарифмов характеристических функций:

$$0 \leq \text{Im} \{\ln \lambda_n(t)\} \leq 2\pi, \quad t \in L$$

$$\text{Im} \{\ln \lambda_1(t)\} = \begin{cases} \pi, & t \in L_\gamma^- \\ 2\pi, & t \in L_\gamma^+ \end{cases}, \quad \text{Im} \{\ln \lambda_2(t)\} = \begin{cases} \pi, & t \in L_\gamma^- \\ 0, & t \in L_\gamma^+ \end{cases}$$

Тогда

$$(3.3) \quad \theta_\varepsilon(t) = \arg \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} = \begin{cases} 0, & t \in L_\gamma^- \\ 2\pi, & t \in L_\gamma^+ \end{cases}$$

$$0 \leq \theta_\varepsilon(t) \leq 2\pi, \quad t \in C_\gamma$$

Таким образом зафиксированы ветвь показателя $\varepsilon(t)$ и функции $\ln \Delta^{1/2}(t)$:

$$(3.4) \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} \right| + \frac{i}{2} \theta_\varepsilon(t), \quad t \in L$$

$$(3.5) \quad \ln \Delta^{1/2}(t) = \frac{1}{2} \ln |\lambda_1(t)\lambda_2(t)| + i\pi, \quad t \in L$$

Для конкретизации дальнейших промежуточных выкладок зафиксируем ветвь функции $f^{1/2}(s) = (b_1^2 - b_2^2 s^2)^{1/2}$, $b_1 = 1$, $b_2 = \sin 2\alpha$ (как и при решении задач T_{kk} , выбор ветви не влияет на конечные формулы, определяющие решение задачи). Построим разрез, соединяющий точки $s = b^\circ$, $s = -b^\circ$ ($b^\circ = b_1/b_2$) и проходящий через бесконечно удаленную точку, и зафиксируем изменение аргументов $-\pi \leq \theta_\pm \leq \pi$ ($\theta_\pm = \arg(b^\circ \pm s)$). Выбранная ветвь обладает следующим свойством:

$$(3.6) \quad f^{1/2}(s) \sim -ib_2 s \text{sgn}(\text{Im } s), \quad s \rightarrow \infty$$

Факторизация (2.6) матрицы $G(s)$ строится по формулам (2.7), (2.8) где в качестве $\beta(s)$ следует брать исчезающее при $s \rightarrow \infty$ решение краевой задачи

$$(3.7) \quad \beta^+(t) - \beta^-(t) = f^{-1/2}(t)\varepsilon(t), \quad t \in L$$

Так как $[\theta_\varepsilon(t)]|_L = 2\pi$ и точка контура, в которой показатель матрицы $\varepsilon(t)$ терпит разрыв, есть бесконечно удаленная точка, то выражение (2.9), определяющее решение задачи (3.7), преобразуем к виду (более удобному, чем (2.9) при анализе решения на бесконечности)

$$(3.8) \quad \beta(s) = \zeta_1(s) + \zeta_2(s) + \zeta_3(s)$$

$$\zeta_1(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\gamma^-} \frac{\varepsilon(t)}{f^{1/2}(t)} \frac{dt}{t-s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\gamma^+} \frac{\varepsilon(t) - \pi i}{f^{1/2}(t)} \frac{dt}{t-s}$$

$$\zeta_2(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\gamma} \frac{\varepsilon(t)}{f^{1/2}(t)} \frac{dt}{t-s}, \quad \zeta_3(s) = \frac{1}{2} \int_{L_\gamma^+} \frac{dt}{f^{1/2}(t)(t-s)}$$

Учитывая свойства 2) функций $\lambda_n(s)$, а также (3.3), (3.4), получаем

$$(3.9) \quad \varepsilon(i\tau) \sim \frac{1}{2} \ln [-4(\eta\tau^2)^{-1}], \quad \tau \rightarrow 0$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(i\tau) + \frac{1}{2}\pi i (\text{sgn } \tau + 1), \quad i\tau = t \in L_\gamma^\pm$$

$$(3.10) \quad \varepsilon_0(i\tau) = \frac{1}{2} \ln |\lambda_1(i\tau)/\lambda_2(i\tau)| \sim \frac{1}{2} e^{-k_0|\tau|}, \quad \tau \rightarrow \pm\infty \quad (k_0 > 0)$$

и тогда при помощи замены $t = i\tau$ приходим к выражению

$$(3.11) \quad \zeta_1(s) = -\frac{s}{\pi} \int_{|Y|}^{\infty} \frac{\varepsilon_0(i\tau)}{f^{1/2}(i\tau)} \frac{d\tau}{\tau^2 + s^2}$$

Полагая $t = |\gamma| e^{i\theta}$ в подынтегральном выражении для $\zeta_2(s)$ из (3.8) и используя формулу 2.2.5.23 из [8] для вычисления последнего интеграла (3.8), получим

$$(3.12) \quad \zeta_2(s) = -\frac{|\gamma|}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\varepsilon(|\gamma| e^{i\theta})}{f^{1/2}(|\gamma| e^{i\theta})} \frac{e^{i\theta} d\theta}{|\gamma| e^{i\theta} - s}$$

$$\zeta_3(s) = \frac{f^{-1/2}(s)}{2} \ln B(s) - \frac{1}{2} \int_0^{|\gamma|} \frac{f^{-1/2}(i\tau)}{\tau + is} d\tau$$

$$B(s) = \frac{b_1 [f^{1/2}(s) + b_1]}{isb_2 [f^{1/2}(s) - isb_2]}, \quad |\arg is| < \pi, \quad |\arg B(s)| < \pi$$

Пусть сначала $|s| > 0$. В равенствах (3.11), (3.12) совершим предельный переход $\gamma \rightarrow -0$ и получим

$$(3.13) \quad \beta(s) = \frac{f^{-1/2}(s)}{2} \ln B(s) - \frac{s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_0(i\tau)}{f^{1/2}(i\tau)} \frac{d\tau}{\tau^2 + s^2}$$

Определим теперь поведение на бесконечности канонической матрицы $X(s)$. Рассматривая отдельно случаи $\text{Im } s > 0$ и $\text{Im } s < 0$, принимая во внимание (3.6), поведение на бесконечности функции $\varepsilon_0(i\tau)$ (3.10), из равенства (3.13) находим

$$(3.14) \quad f^{1/2}(s)\beta(s) = -\text{sgn}(\text{Im } s)[\ln(is)^{1/2} + \kappa] + o(1)$$

$$s \rightarrow \infty, \quad |\arg is| < \pi$$

$$(3.15) \quad \kappa = \frac{1}{2} \ln \frac{2b_2}{b_1} + ib_2q, \quad q = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_0(i\tau) d\tau}{f^{1/2}(i\tau)}$$

Далее, в силу соотношения (3.5) и равенства

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt}{t-s} = \pm \pi i, \quad s \in D^{\pm}$$

получаем из (2.7)

$$(3.16) \quad \Lambda^{\pm}(s) = \pm i \exp \left[-\frac{s}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |\Delta(i\tau)|}{\tau^2 + s^2} d\tau \right], \quad s \in D^{\pm}$$

Отсюда находим $\Lambda^{\pm}(s) \sim \pm i$, $s \rightarrow \infty$, $s \in D^{\pm}$. Учитывая теперь (3.14) и (2.7), имеем

$$X^{\pm}(s) \sim \pm \frac{ie^{\kappa}}{2} (is)^{1/2} \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix}, \quad s \rightarrow \infty, \quad s \in D^{\pm}, \quad |\arg is| < \pi$$

Принимая во внимание равенство

$$(is)^{1/2} = e^{\mp i\pi/4} (\mp s)^{1/2}, \quad s \in D^{\pm}, \quad |\arg is| < \pi, \quad |\arg(\mp s)| < \pi/2$$

получаем окончательно при $s \rightarrow \infty$

$$(3.17) \quad X^{\pm}(s) \sim e^{\kappa \mp i\pi/4} \frac{(\mp s)^{1/2}}{\mp 2i} \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix}, \quad s \in D^{\pm}, \quad |\arg(\mp s)| < \pi/2$$

Определяя коэффициенты интенсивности напряжений $\sigma_{\theta}(r, 0)$ и $\tau_{r\theta}(r, 0)$ при помощи соотношений (2.10), имеем

$$\varphi_n^{+}(s) \sim K_n (-2s)^{-1/2}, \quad s \rightarrow \infty, \quad |\arg(-s)| \leq \theta_0 < \pi/2$$

$$\varphi_n^{-}(s) = O(s^{-1/2}), \quad s \rightarrow \infty, \quad |\arg s| \leq \theta_1 < \pi/2$$

и, следовательно, при $s \rightarrow \infty$

$$(3.18) \quad X^+(s)\varphi^+(s) \sim \frac{i}{2\sqrt{2}} e^{s-i\pi/4} (K_1 + iK_2) J, \quad s \in D^+ \setminus L$$

$$X^-(s)\varphi^-(s) = O(1)J, \quad s \in D^- \setminus L, \quad J = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Подставляем (2.6) в (3.1), учитываем (3.18) и применяем теорему Лиувилля. В результате при $|s| < \infty$ имеем следующие формулы для искомого решения задачи (3.1):

$$(3.19) \quad \varphi^+(s) = ia^{-1} [X^+(s)]^{-1} [CJ - \Omega^+(s)], \quad s \in D^+$$

$$\varphi^-(s) = [X^-(s)]^{-1} [CJ - \Omega^-(s)], \quad s \in D^-$$

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} \Omega_1(s) \\ \Omega_2(s) \end{pmatrix}, \quad \Omega(s) = -\frac{a}{2\pi} \int_L \frac{X^+(t)\psi_-^{\circ}(t)}{t-s} dt$$

(C — произвольная постоянная).

Удовлетворяя дополнительному условию (1.2) (при $k = 1$), которое с учетом обозначений (2.2) можно записать в виде

$$(3.20) \quad \varphi_1^-(0) = \varphi_2^-(0) \operatorname{tg} \alpha$$

из второго равенства в (3.19) находим

$$(3.21) \quad C = \frac{A_- \Omega_1^-(0) - A_+ \Omega_2^-(0) \operatorname{tg} \alpha}{A_- + iA_+ \operatorname{tg} \alpha}, \quad A_{\pm} = c_{\pm}(0) + \frac{s_{\pm}(0)}{(\operatorname{tg} \alpha)^{\pm 1}}$$

$$(3.22) \quad c_{\pm}(0) = \operatorname{ch} [b_1 \beta^-(0)] \pm l(0) b_1^{-1} \operatorname{sh} [b_1 \beta^-(0)]$$

$$s_{\pm}(0) = m_{\mp}(0) b_1^{-1} \operatorname{sh} [b_1 \beta^-(0)]$$

Вычислим $\beta^-(0)$ (формула (3.13) получена в предположении $|s| > 0$). Полагая в (3.11) $s = 0$, находим $\zeta_1(0) = 0$. Для получения $\zeta_2(0)$ примем во внимание (3.9) и формулу (3.12) представим в виде

$$(3.23) \quad \zeta_2(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[\frac{\varepsilon(|\gamma| e^{i\theta})}{f^{1/2}(|\gamma| e^{i\theta})} - \frac{1}{2b_1} \ln \frac{-4}{\eta \gamma^2 e^{2i\theta}} \right] d\theta - \\ - \frac{1}{4\pi b_1} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \ln \frac{-4}{\eta \gamma^2 e^{2i\theta}} d\theta, \quad \arg(-e^{-2i\theta}) \in [0, 2\pi]$$

Учитывая, что $\ln[-\exp(-2i\theta)] = 3\pi i - 2\theta i$, из (3.23) при $\gamma \rightarrow -0$ находим

$$\zeta_2(0) = -\frac{1}{4b_1} \left(\ln \frac{4}{\eta \gamma^2} + i\pi \right) + o(1)$$

Из последнего равенства (3.8) имеем

$$\zeta_3(0) = \frac{1}{2b_2} \int_{|\gamma|}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \sqrt{\tau^2 + (b_1/b_2)^2}} = \frac{1}{4b_1} \ln \frac{4b_1^2}{b_2^2 \gamma^2} + o(1), \quad \gamma \rightarrow -0$$

Таким образом приходим к соотношению

$$\lim_{\gamma \rightarrow -0} \beta^-(0) = (2b_1)^{-1} [\ln(b_1 \sqrt{\eta}/b_2) - i\pi/2]$$

а отсюда с учетом (3.22) получаем

$$(3.24) \quad 2c_{\pm}(0) = c_0 + c_0^{-1} \pm l(0) b_1^{-1} (c_0 - c_0^{-1})$$

$$2s_{\pm}(0) = m_{\mp}(0) b_1^{-1} (c_0 - c_0^{-1}), \quad c_0 = (1-i) \sqrt{b_1 \eta^{1/2} (2b_2)^{-1}}$$

Величины $\Omega_j^-(0)$, входящие в равенство (3.21), находятся при помощи теории вычетов. В частном случае, когда $\psi(r) \equiv \psi = \|\psi_1, \psi_2\|$, $\psi_j = \text{const}$, имеем

$$\begin{vmatrix} \Omega_1^-(0) \\ \Omega_2^-(0) \end{vmatrix} = ai\Lambda^+(-1) \begin{vmatrix} c_+(-1)\psi_1 + s_+(-1)\psi_2 \\ s_-(-1)\psi_1 + c_-(-1)\psi_2 \end{vmatrix}$$

Здесь $\Lambda^+(-1)$ определяется формулой (3.16), а $c_{\pm}(-1)$, $s_{\pm}(-1)$ — соотношениями (2.8) и (3.13).

Получим теперь расчетные формулы для коэффициентов интенсивности напряжений L_{12} , N_{12} . Сравнивая асимптотическое равенство (3.18) с вытекающим из (3.19) соотношением

$$X^+(s)\varphi^+(s) \sim a^{-1}iCJ, \quad s \rightarrow \infty, \quad s \in D^+ \setminus L$$

приходим к следующей формуле:

$$K_1 + iK_2 = 2\sqrt{2}a^{-1}e^{-\kappa+i\pi/4}C$$

где κ и C определены равенствами (3.15) и (3.21) соответственно. Таким образом найдены введенные в п. 1 коэффициенты интенсивности напряжений $L_{12} = K_1$, $N_{12} = K_2$.

4. Задача T_{21} . Сформулированная в п. 1 краевая задача теории упругости T_{21} сводится к матричной задаче Римана (3.1), причем

$$b(s) = {}^{1/2}i [d_1^{-1}(s, \pi/2 - \alpha)\cos(\pi - 2\alpha)s - d_2^{-1}(s, \alpha)\cos 2\alpha s]$$

$$c(s) = -{}^{1/2}i [d_1^{-1}(s, \pi/2 - \alpha) - d_2^{-1}(s, \alpha)]$$

а $l(s)$, $m_{\pm}(s)$ и $d_k(s, \alpha)$ определены в (2.5). Характеристические функции $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ обладают свойствами 1) и 3) из (3.2), а также следующим, аналогичным свойству 2) из (3.2):

$$(4.1) \quad \lambda_1(\gamma) \sim -i\pi\gamma/4, \quad \lambda_2(\gamma) \sim i\pi(\eta\gamma)^{-1}, \quad \gamma \rightarrow -0$$

$$\eta = (2\alpha - \sin 2\alpha)(\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha) > 0 \quad (0 < \alpha < \pi/2)$$

Таким образом

$$(4.2) \quad [\arg \lambda_1(t)]|_L = -\pi, \quad [\arg \lambda_2(t)]|_L = \pi;$$

$$\kappa_{\Delta} = 0, \quad \kappa_{\varepsilon} = -1$$

Зафиксируем ветви функций $\ln \lambda_n(t)$ ($n = 1, 2$) точно так же, как и в п. 3. Тогда формулы (3.4) и (3.5) останутся справедливыми. Однако в данном случае вследствие (4.2) в равенстве (3.3) меняются местами L_{γ}^- и L_{γ}^+ .

Решение задачи факторизации (2.6) матрицы $G(s)$ определяется формулами (2.7), (2.8), причем входящая в (2.8) функция $\beta(s)$, которая строится аналогично указанному в п. 3, отличается от (3.13) лишь знаком перед логарифмом и заменой b_2 на $-b_2$.

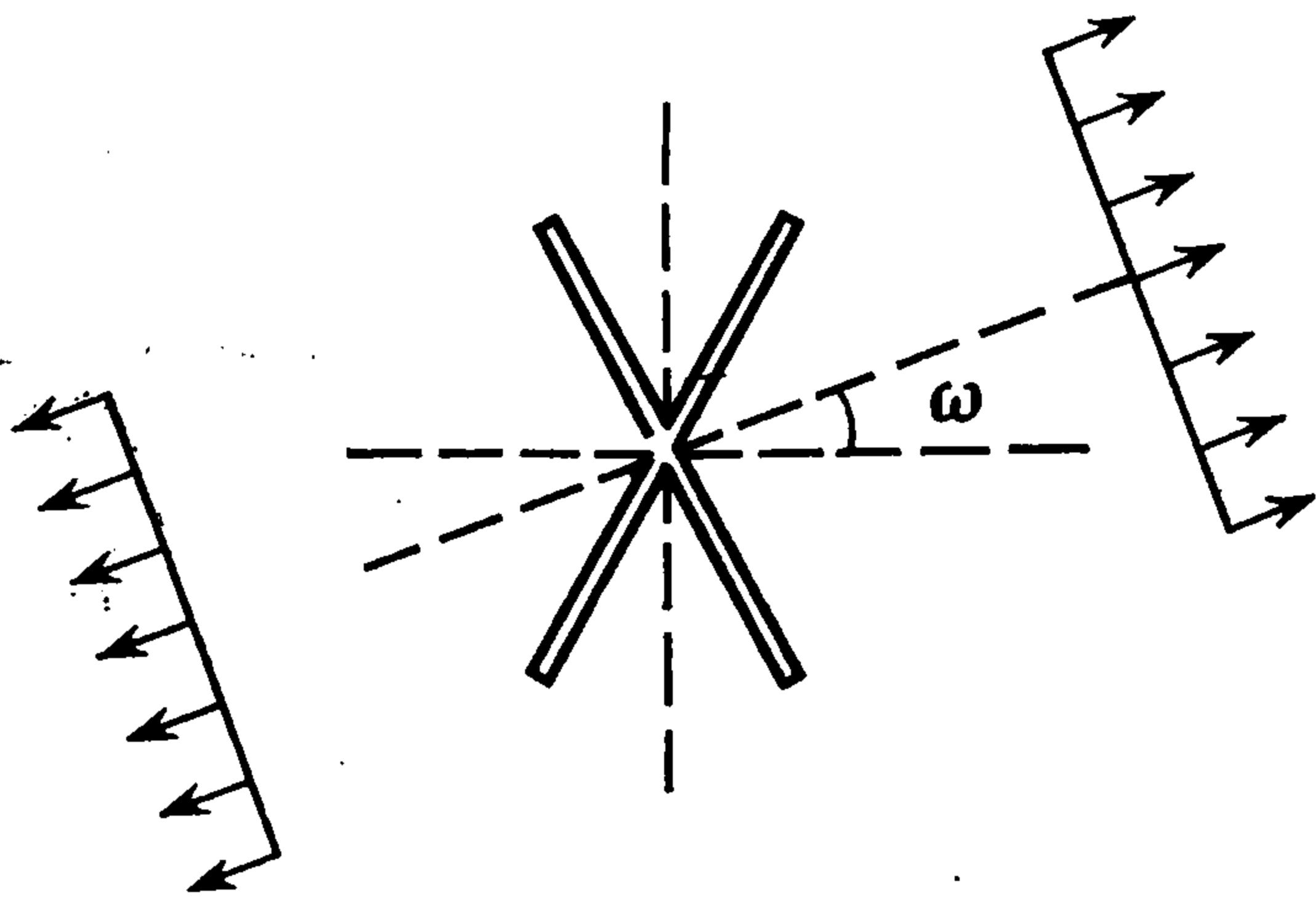
При $s \rightarrow \infty$ находим

$$f^{1/2}(s)\beta(s) = -\text{sgn}(\text{Im } s)[\ln(-is)^{1/2} + \kappa] + o(1),$$

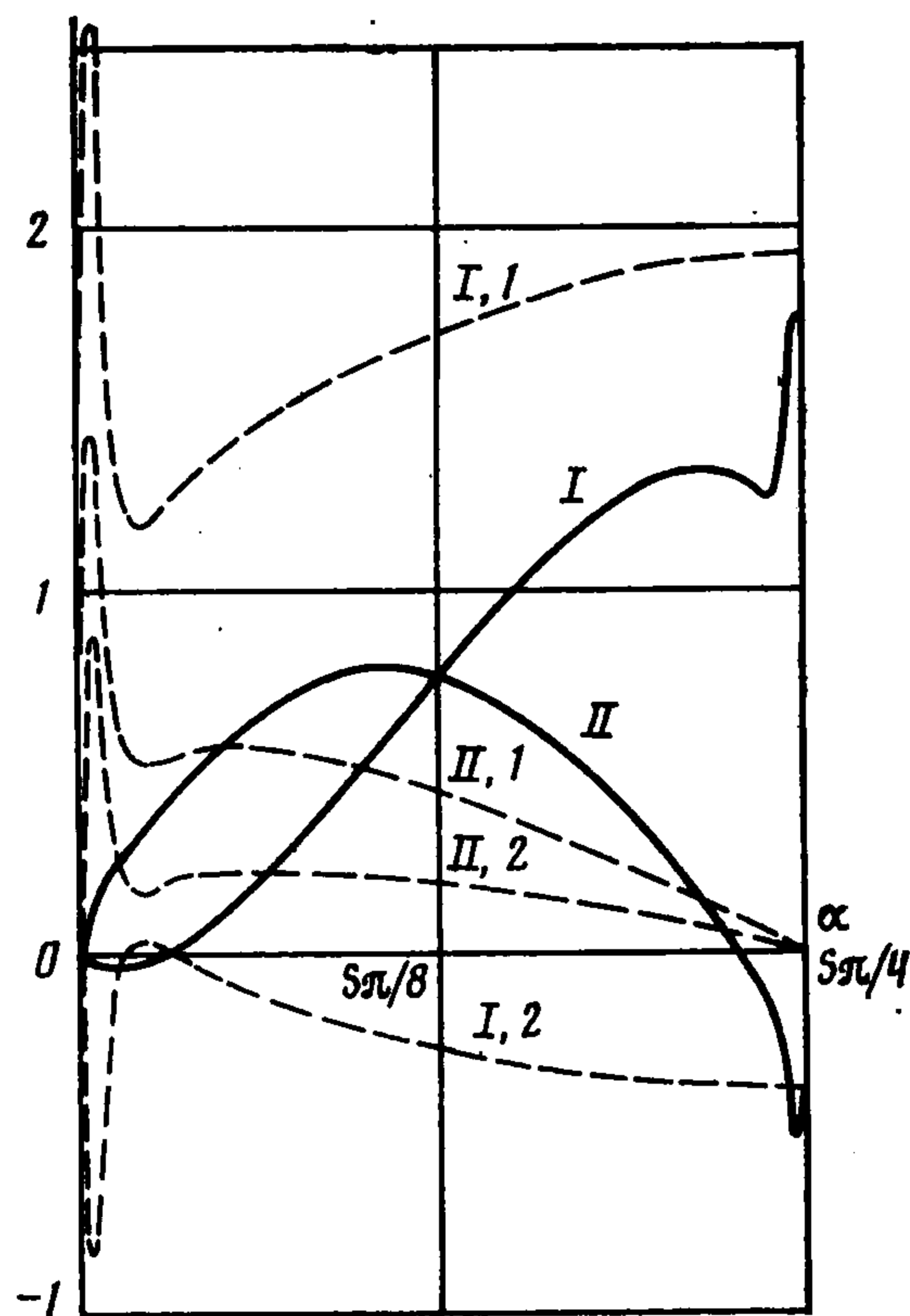
$$|\arg(-is)| < \pi$$

(для κ остается справедливой формула (3.15)).

Поведение на бесконечности канонической матрицы $X(s)$ определяется асимптотическим равенством, отличающимся от (3.17) заменой $\kappa \mp i\pi/4$ на $\kappa \pm i\pi/4$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Решение матричной задачи Римана (3.1), соответствующей задаче T_{21} , находится по формулам (3.19), причем входящая в (3.19) произвольная постоянная C фиксируется из условия (1.2) (при $k = 2$), которое можно записать в виде

$$(4.3) \quad \varphi_1^-(0) = -\varphi_2^-(0) \operatorname{ctg} \alpha$$

Принимая во внимание (3.20), (3.21), из условия (4.3) находим выражение для C , отличающееся от (3.21) заменой $\operatorname{tg} \alpha$ на $-\operatorname{ctg} \alpha$. При вычислении значения $\beta^-(0)$, входящего вследствие (3.22) в выражения для $c_{\pm}(0)$, $s_{\pm}(0)$, учитываем свойства (4.1). Аналогично п. 3 имеем

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta^-(0) = (2b_1)^{-1} [-\ln(b_1 \sqrt{\eta/b_2}) - i\pi/2]$$

Таким образом, $c_{\pm}(0)$, $s_{\pm}(0)$ определяются равенствами (3.24), причем

$$c_0 = (1 - i) \sqrt{b_2 (2b_1 \eta^{1/2})^{-1}}$$

Коэффициенты интенсивности L_{21} и N_{21} находятся по формуле

$$L_{21} + iN_{21} = 2\sqrt{2}a^{-1}e^{-\kappa - i\pi/4}C$$

По аналогичной схеме решена следующая плоская задача. В упругой плоскости имеются два тонких абсолютно жестких включения одинаковой длины, пересекающихся посередине под произвольным углом. В точке пересечения включений приложены под произвольным углом сила P и момент M . Эта задача сводится к трем отдельно решаемым матричным задачам Римана Z_j с коэффициентом вида (2.4), причем, если обозначить $\kappa_e^{(j)} = \operatorname{ind} \{\lambda_1^{(j)}(t) [\lambda_2^{(j)}(t)]^{-1}\}$, где $\lambda_n^{(j)}(t)$ ($n = 1, 2$) — собственные функции матричного коэффициента задачи Z_j , то $\kappa_e^{(1)} = 1$, $\kappa_e^{(2)} = -1$, $\kappa_e^{(3)} = 0$.

5. Равномерное растяжение на бесконечности плоскости с двумя пересекающимися разрезами. В качестве численного примера рассмотрена задача о растяжении упругой плоскости с двумя пересекающимися разрезами нагрузкой постоянной интенсивности p , приложенной на бесконечности под углом $\omega = 0$ или $\omega = \pi/4$ к горизонтальной оси симметрии (фиг. 4).

В случае $\omega = 0$

$$L^{(i)} = K_I, \quad N^{(i)} = (-1)^{i-1} K_{II} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

где K_I (K_{II}) — коэффициент интенсивности напряжений σ_θ ($\tau_{r\theta}$) в вершине A_i . На фиг. 5 сплошными линиями изображены зависимости K_I/p и K_{II}/p (кривые I и II) от величины угла α ($0 < \alpha < \pi/2$, $s = 2$). Заметим, что при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$ (случай одной трещины) $K_{II} = 0$, а $K_I = 0$ при $\alpha = 0$ и $K_I = \sqrt{\pi p}$ при $\alpha = \pi/2$. К этим предельным значениям коэффициенты K_I , K_{II} стремятся, когда $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \pi/2$ (K_{II} после достижения минимального значения $-0,52$ при $\alpha = 0,495\pi$ начинает расти и стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \pi/2$).

В случае $\omega = \pi/4$

$$L^{(i)} = L^{(i+2)} = K_{I,i}, \quad N_i = N^{(i+2)} = K_{II,i} \quad (i = 1, 2)$$

Зависимости $K_{I,i}/p$, $K_{II,i}/p$ ($i = 1, 2$) от величины α ($0 < \alpha < \pi/4$) изображены штрихпунктирными линиями на фиг. 5 ($s = 1$), причем

$$K_{I,i} |_{\alpha=\pi/4-\alpha_*} = K_{I,i} |_{\alpha=\pi/4+\alpha_*}, \quad K_{II,i} |_{\alpha=\pi/4-\alpha_*} = -K_{II,i} |_{\alpha=\pi/4+\alpha_*} \\ (0 < \alpha_* < \pi/4)$$

В предельном случае $\alpha = 0$

$$K_{I,1} = K_{I,2} = \sqrt{\pi} p/2, \quad K_{II,1} = K_{II,2} = -\sqrt{\pi} p/2$$

Рассмотрен также случай равномерного растяжения с поворотом на бесконечности плоскости с двумя пересекающимися разрезами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев Г. Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций // Учен. зап. Казан. ун-та. 1956. Т. 116. Кн. 4. С. 31—58.
2. Храпов А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 677—689.
3. Златин А. Н., Храпов А. А. Векторная задача Римана с ненулевым индексом показателя матрицы-коэффициента // Изв. Всесоюз. н.-и. ин-та гидротехн. им. Б. Е. Веденеева. 1985. Т. 181. С. 12—16.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
5. Храпов А. А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой форме // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1062—1069.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука. 1973. 294 с.
7. Doetsch G. Handbuch der Laplace-transformation. Bd. 1. Theorie der Laplace-transformation. Basel: Birkhäuser. 1950. 581 S.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981. 798 с.

Одесса

Поступила в редакцию
14.IV.1987