

УДК 532.5

О ЗАДАЧАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

Бородич Ф. М.

В линеаризованной постановке рассматривается начальная (сверхзвуковая) стадия взаимодействия (проникание и удар) затупленных тел с акустической средой (сжимаемой жидкостью). Считается, что граница области взаимодействия тела со средой движется со скоростью, превышающей скорость звука в среде. Выводятся явные формулы для скорости частиц среды и давления в каждой точке границы области взаимодействия. Показано, что общее решение линеаризованной задачи для сверхзвуковой стадии проникания затупленных тел, даваемое явной формулой [1—3], имеющей вид двойного интеграла, можно преобразовать таким образом, чтобы привести формулу к однократному интегралу для произвольного тела, проникающего в жидкость с произвольной скоростью. Ранее при помощи такого сведения аналитически исследовались только задачи о проникании с постоянной скоростью тел вращения, ограниченных поверхностями второго порядка (конус [3, 4], параболоид [4, 5], эллипсоид и гиперболоид [4]). Получено точное выражение для закона движения по инерции тела произвольной формы после его соприкосновения с жидкостью.

1. Постановка задачи. Пусть жесткое затупленное тело проникает со скоростью $V(t)$ в невесомую акустическую среду, занимающую полупространство $z \geq 0$. Считается, что угол между касательной плоскостью к телу в точках, вступающих во взаимодействие со средой, и плоскостью $z = 0$ мал на всем рассматриваемом интервале T времени. Граничные условия с поверхности тела сносятся на плоскость $z = 0$. Движение тела принимается направленным перпендикулярно плоскости $z = 0$. Считается, что $V(t) \ll a$, $t \in [0, T]$, где a — скорость звука в среде.

Начало декартовой системы координат берем в точке первоначального касания тела со средой. Ось z направлена в глубь среды, а оси x и y — по первоначально свободной поверхности.

Движение частиц среды считается потенциальным, т. е. скорости частиц среды \mathbf{v} и давление p определяются через потенциал $\Phi(x, t)$ по формулам [1—3]

$$(1.1) \quad \mathbf{v}(x, t) = \text{grad } \Phi(x, t), \quad p(x, t) = -\rho \partial \Phi(x, t) / \partial t, \quad x \in R_+^3$$

где ρ — плотность среды, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — вектор точек полупространства.

Потенциал Φ — обобщенное, кусочно-гладкое решение волнового уравнения в R^4 , т. е. он всюду непрерывный и всюду гладкий, за исключением регулярных гиперповерхностей S_k , разбивающих R^4 на конечное число подобластей. С каждой из сторон особой поверхности S_k частные производные от Φ имеют единственный односторонний предел. Вне S_k потенциал Φ удовлетворяет уравнению

$$(1.2) \quad \square \Phi(x, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in R_+^3, \quad t \in (0, T]; \quad \square \equiv \\ \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

а на S_k выполнены условия правильного (в смысле Соболева) сильного разрыва [6—8]

$$(1.3) \quad \langle \mathbf{L}, \mathbf{v} \rangle = 0; \quad \mathbf{L} \equiv \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}$$

$$[L_4 a^2 \cos(\mathbf{v}, x_i) + L_i \cos(\mathbf{v}, t)] = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad x_1 = x, \\ x_2 = y, \quad x_3 = z$$

Здесь и далее квадратные скобки означают скачок величины при переходе через S_k , а угловые — скалярное произведение; \mathbf{v} — единичный вектор нормали к S_k в R^4 .

Определим область возмущения Ω в R^4 как множество точек, до которых дошло возмущение, вызванное погружением тела. Тогда

$$(1.4) \quad \Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in R^4 \setminus \Omega$$

так как в начальный момент среда покоилась.

В точках открытой области контакта тела со средой G , лежащей в плоскости $z = 0$, выполнено условие

$$(1.5) \quad \partial\Phi(x, y, 0, t)/\partial z = V(t), \quad (x, y) \in G(t), \quad t \in (0, T]$$

При $t \in (0, T]$ погружение имеет сверхзвуковой характер, если выполнено неравенство

$$(1.6) \quad \min_{(x, y) \in \partial G} \alpha(x, y, t) > a, \quad 0 < t \leq T$$

Скорость α движения границы ∂G области контакта в момент t_0 в точке $(x_0, y_0, 0)$ равна

$$(1.7) \quad \alpha_0 = V_0 |\text{grad } f(x_0, y_0)|^{-1}; \quad \alpha_0 = \alpha(x_0, y_0, t_0), \quad V_0 = V(t_0)$$

где f — функция, определяющая форму тела. Граница ∂G_0 области G_0 ($G_0 = G(t_0)$) определяется уравнением

$$(1.8) \quad f(x, y) = H(t_0), \quad (x, y) \in \partial G_0; \quad H(t) \equiv \int_0^t V(\xi) d\xi$$

В задаче проникания принимается, что $V(t)$ — известная функция времени. В задаче удара $V(t)$ находится из уравнения движения тела по инерции

$$(1.9) \quad m \frac{dV}{dt} = -P(t), \quad P(t) = \iint_{G(t)} p(x, y, 0, t) dx dy$$

где m — масса тела, P — сила его взаимодействия со средой.

Замечания. 1°. Из условий (1.1), (1.3) вытекает, что скачок вектора скорости направлен по нормали к поверхности разрыва S_k , а его величина пропорциональна скачку давления [7]

$$(1.10) \quad |[\mathbf{v}]| = [p]/(\rho a)$$

2°. Поверхности сильного разрыва S_k — характеристические для волнового уравнения [6, 8].

3°. Граница области контакта может поглощать энергию. Эта энергия интерпретировалась [8] как энергия, уносимая брызговыми струями, которые возникают в процессе проникания [9].

2. Давление и скорость на границе области контакта. Пусть точка $(x_0, y_0, 0) \in \partial G_0$. Тогда можно определить предельные значения давления p и вектора скорости \mathbf{v} при подходе к этой точке со стороны области контакта, равные (в рассматриваемых задачах) скачкам соответствующих величин.

Величины скачков скорости и давления в точках границы области контакта определяются выражениями

$$(2.1) \quad |[\mathbf{v}]| = V_0 \alpha_0 (\alpha_0^2 - a^2)^{-1/2}, \quad [p] = \rho V_0 \alpha_0 (\alpha_0^2 - a^2)^{-1/2}$$

Действительно граница $S_0 = S(t_0)$ сечения области Ω плоскостью $t = t_0$ распространяется со скоростью a (скорость измеряется по нормали к S_0). Косинус угла θ наклона S_0 к плоскости $z = 0$ определяется выражением $\cos \theta = (\alpha_0^2 - a^2)^{1/2}/\alpha_0$. Вектор $[v]$ направлен по нормали к S_0 , а его проекция на ось z в точке $(x_0, y_0, 0)$ равна V_0 . Отсюда, учитывая равенства $|[v]| = V_0/\cos \theta$ и (1.10), получаем (2.1).

3. Явный вид решения задачи проникания в сверхзвуковом случае. Известно (например, [1—4, 10, 11]), что решение задачи (1.2)—(1.5) имеет вид запаздывающего потенциала

$$(3.1) \quad \Phi_0 = \Phi(x_0, t_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(x, y, 0, t_0 - \frac{R_1}{a} \right) \right\} \frac{dx dy}{R_1}$$

$$R_1 = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{1/2}$$

Формула (3.1) дает явное решение задачи, так как функция в фигурных скобках известна на всей плоскости $z = 0$: если $(x, y) \in G(t_0 - R_1/a)$, то она равна $V(t_0 - R_1/a)$, в противном случае она равна нулю (см. условия (1.4) и (1.5)). Однако решение конкретных задач с использованием (3.1) весьма громоздко (см. [4]). Далее упростим формулу (3.1), преобразовав двукратный интеграл к однократному.

Введем «запаздывающее» время τ , $\tau > 0$. Отметим на поверхности $z = 0$ точки, возмущение которых в момент τ сказывается на движении точки x_0 в момент t_0 . Отмеченные точки образуют окружность O_τ с центром в точке (x_0, y_0) радиуса

$$(3.2) \quad l(\tau) = [a^2(t_0 - \tau)^2 - z_0^2]^{1/2}$$

Пусть $U(\tau) = O_\tau \cap G(\tau)$, $\varphi(\tau)$ — угловая мера множества $U(\tau)$, μ — множество точек τ , для которых $\varphi(\tau) > 0$.

Рассмотрим все те точки на плоскости $z = 0$, возмущение которых в интервале времени от τ до $\tau + d\tau$ оказало влияние на поведение среды в точке x_0 в момент времени t_0 . Площадь множества этих точек определяется формулой (учитываем (3.2))

$$(3.3) \quad ds(\tau) = |l(\tau)\varphi(\tau)dl(\tau)| = a^2(t_0 - \tau)\varphi(\tau)d\tau$$

Имеем

$$R_1 = a(t_0 - \tau), \quad dx dy |_{(x, y) \in G(\tau)} = ds(\tau)$$

Подставив эти выражения в (3.1) и учитывая (1.5) и (3.3), получим

$$(3.4) \quad \Phi_0 = -\frac{a}{2\pi} \int_{\mu} V(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

Формула (3.4) для запаздывающего потенциала особенно проста в осесимметричном случае.

4. Сверхзвуковое проникание в жидкость тел вращения. В этом случае область $G(t)$ — круг переменного радиуса $r_*(t)$.

4.1. Автомодельные задачи. Известно, что если тело, форма поверхности которого описывается положительной, гладкой, однородной функцией степени d , проникает в акустическую среду со скоростью $V(t) = V(1)t^{d-1}$, $d \geq 1$, то задача автомодельна:

$$\Phi(x, t) = (t/t_1)^d \Phi(t_1 x/t, t_1)$$

Область $G(t)$ получается из области $G(t_1)$ преобразованием гомотетии, причем скорость движения границы области постоянна, а $r_*(t) = Mat$, где $M \equiv \alpha(x, y, t)/a = \text{const}$.

Рассмотрим вопрос об определении множества μ , входящего в (3.4).

В зависимости от значений величин r_0 , z_0 и M возможны различные случаи пересечения окружности O_τ с областью $G(\tau)$.

Случай 1. При $\tau = 0$ центр области $G(\tau)$ лежит вне круга радиуса $l_0 = l(0)$ с центром в точке с координатами $(r_0, 0)$, $r_0 = (x_0^2 + y_0^2)$, т. е. $r_0^2 + z_0^2 > a^2 t^2$. Тогда возможны следующие варианты.

1а. Граница круга $G(\tau)$ не пересекает окружность O_τ . Тогда волна в точку x_0 не пришла и скорость $v(x_0, t_0)$ равна нулю.

1б. Круг $G(\tau)$ растет, в момент τ_- касается окружности O_τ и имеет с ней пересечение до момента τ_+ , а затем отстает от нее. Тогда множество μ — интервал (τ_-, τ_+) . При этом из теоремы косинусов имеем

$$(4.1) \quad \varphi = 2 \arccos \frac{r_0^2 + l^2(\tau) - r_*^2(\tau)}{2r_0 l(\tau)}, \quad r_0 - r_*(\tau_\mp) = l(\tau_\mp)$$

1в. Круг $G(\tau)$ растет, в момент τ_- начинает пересекать окружность O_τ , а с момента τ_+ полностью ее охватывает. Тогда получаем

$$(4.2) \quad \mu \equiv (\tau_-, \tau_k), \quad \tau_k = t_0 - z_0/a$$

$$\varphi = \begin{cases} 2 \arccos \frac{r_0^2 + l^2(\tau) - r_*^2(\tau)}{2r_0 l(\tau)}, & \tau_- < \tau \leq \tau_+ \\ 2\pi, & \tau_+ \leq \tau < \tau_k \end{cases}$$

Величины τ_- и τ_+ найдем из условий

$$(4.3) \quad r_0 - r_*(\tau_\mp) = \pm l(\tau_\mp), \quad r_0 > l_0$$

Случай 2. При $\tau = 0$ центр области $G(\tau)$ лежит внутри окружности O_τ радиуса l_0 . Тогда возможны следующие варианты.

2а. Круг $G(\tau)$ растет, в момент τ_- касается окружности O_τ и имеет с ней пересечение до момента τ_+ , а затем отстает от нее. Тогда угол $\varphi(\tau)$ определяется по первой формуле (4.1), а множество μ — интервал (τ_-, τ_+) , где

$$(4.4) \quad r_0 \pm r_*(\tau_\mp) = l(\tau_\mp)$$

2б. Круг $G(\tau)$ растет, в момент τ_- начинает пересекать окружность O_τ , а с момента τ_+ полностью ее охватывает. Тогда множество μ и угол $\varphi(\tau)$ определяются формулами (4.2), величина τ_- — формулой (4.4) с верхними знаками, τ_+ — формулой (4.3) с нижними знаками.

Разрешая уравнения (4.1), (4.3) получаем

$$(4.5) \quad \tau_\mp = (Mr_0 - at_0 \mp \sqrt{D})/[a(M^2 - 1)], \quad r_0 > l_0$$

$$D = (Mr_0 - at_0)^2 - (M^2 - 1)(r_0^2 + z_0^2 - a^2 t_0^2)$$

При $r_0 < l_0$ выражение для τ_+ соответствует (4.5), для τ_- — (4.5) при формальной замене a на $-a$.

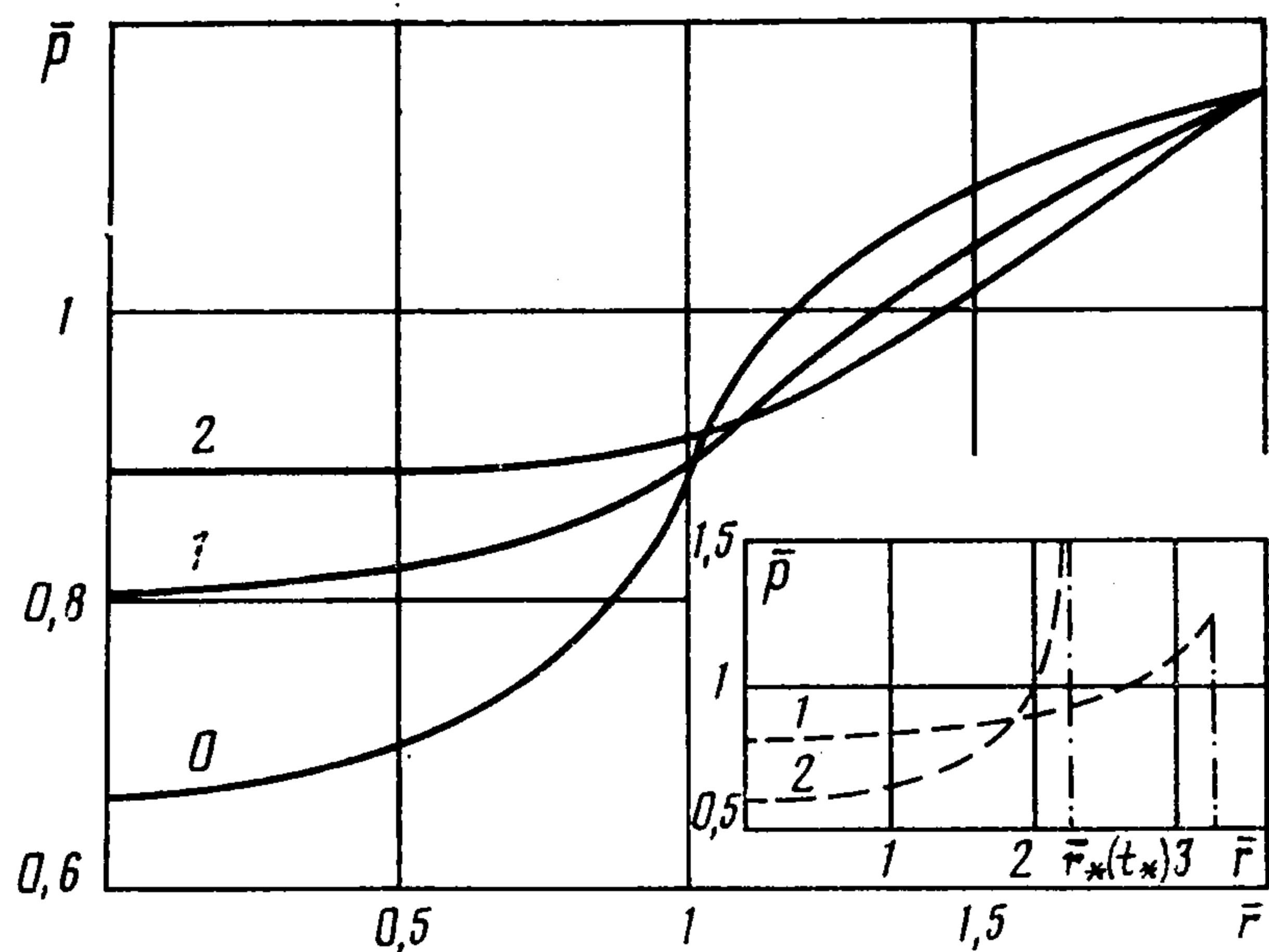
В случае $r_0 > l_0$, если $D < 0$, то реализуется вариант 1а, если $D \geq 0$ и $\tau_+ < \tau_* = r_0/(Ma)$, то вариант 1б, если $D \geq 0$ и $\tau_+ > \tau_*$, то вариант 1в.

В случае $r_0 < l_0$, если $\tau_+ < \tau_*$, то реализуется вариант 2а, если $\tau_+ > \tau_*$, то вариант 2б.

4.2. *Определение потенциала скоростей на плоскости $z = 0$.* Вследствие произвольности функции f и условий задачи $r_*(\tau)$ может быть произвольной функцией, такой, что

$$(4.6) \quad r_*(\tau) > a$$

В зависимости от значений r_0 и вида закона изменения $r_*(\tau)$ возможны различные случаи пересечения O_τ с $G(\tau)$.



1) $r_0 > l_0 = at_0$. В этом случае возможны варианты 1а и 1в и будут справедливы формулы (4.2), (4.3). Вариант 1б не реализуется в силу условия (4.6).

2) $r_0 < l_0$. В этом случае возможен только вариант 2б и будут справедливы формулы (4.2), (4.3) с нижними знаками и (4.4) с верхними. Вариант 2а невозможен в силу условия (4.6).

Подставив выражение для φ из (4.2) и зависимости (4.3), (4.4) в формулу (3.4), получим

$$(4.7) \quad \Phi(r_0, 0, t_0) = -a \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\tau_-}^{\tau_+} V(\tau) \arccos \frac{K_+}{L} d\tau + \int_{\tau_+}^{t_0} V(\tau) d\tau \right\}$$

$$K_{\pm} = r_0^2 \pm a^2 (t_0 - \tau)^2 - r_*^2(\tau), \quad L = 2r_0 a (t_0 - \tau)$$

Учитывая (1.1), из (4.7) находим распределение давления в области $G(t_0)$

$$(4.8) \quad p(r_0, 0, t_0) = a\rho \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\tau_-}^{\tau_+} V(\tau) \frac{K_-}{(t_0 - \tau) \sqrt{L^2 - K_+^2}} d\tau + V(t_0) \right\}$$

Замечания. 1°. При $r_0 = 0$ из (4.4) получим $\tau_- = \tau_+$, тогда из (4.7) следует

$$(4.9) \quad \Phi(0, 0, t_0) = -a \int_{\tau_+}^{t_0} V(\tau) d\tau, \quad p(0, 0, t_0) = a\rho \left\{ V(t_0) - V(\tau_2) \frac{a}{a + r_*(\tau_+)} \right\}$$

Подынтегральное выражение в (4.8) при $r_0 = 0$ имеет особенность, поэтому при численном счете целесообразно воспользоваться выражением (4.9).

2°. Полученная ранее [12] методами интегральных преобразований формула для давления, аналогичная формуле (4.8), записана в [12] неверно.

В качестве примера на фигуре приведены сплошными линиями зависимости $\bar{p} = p(r_0, 0, t_0) / (\rho a V(t_0))$ от $\bar{r} = r_0 / (at_0)$ в автомодельных задачах при $M = 2$; k -я кривая соответствует степени автомодельности задачи $d = 1 + k/2$ ($k = 0, 1, 2$). В этих случаях $\tau_- = (r_0/a - t_0)/(M - 1)$ при $r_0 > l_0$ и $\tau_- = (t_0 - r_0/a)/(M + 1)$ при $r_0 < l_0$; $\tau_+ = (t_0 + r_0/a)/(M + 1)$.

Отметим, что при $r_0/(at_0) = M$ все кривые сходятся в одной точке $M/\sqrt{M^2 - 1}$. Этот результат — следствие формулы (2.1). В частном случае $d = 1$, он был получен ранее [3].

4.3. *Определение потенциала и давления на оси z.* Окружность O_τ , построенная для точек на оси z, касается границы круга $G(\tau)$ одновременно во всех своих точках в момент τ_- , а затем полностью им охватывается. Тогда множество μ — интервал $(\tau_-, t_0 - z_0/a)$, а $\varphi \equiv 2\pi$. Из (3.4) получаем

$$(4.10) \quad \Phi(0, z_0, t_0) = -a \int_{\tau_-}^{t_0 - z_0/a} V(\tau) d\tau$$

Величину τ_- найдем из условия $r_*(\tau_-) = l(\tau_-)$ или, при учете (1.8) и (3.2), имеем $f(\sqrt{a^2(t_0 - \tau_-)^2 - z_0^2}) = H(\tau_-)$. Из (1.1) и (4.10) получаем

$$p(0, z_0, t_0) = a\rho \{V(t_0 - z_0/a) - V(\tau_-)\partial\tau_-/\partial t_0\}$$

$$\frac{\partial\tau_-}{\partial t_0} = \left\{1 - M(\tau_-) \left[1 - \left(\frac{z_0}{a(t_0 - \tau_-)}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{-1}, \quad M(\tau_-) = \alpha(r_*, \tau_-)$$

Определение потенциала вдоль оси вращения в аналогичной задаче (при постоянной скорости проникания) проводилось ранее [4], но при этом были допущены ошибки в вычислениях.

5. Удар пространственных тел об акустическую среду. Известно [13], что сила, действующая на тело произвольной формы, проникающее в акустическое полупространство с произвольной скоростью $V(t)$, равна

$$(5.1) \quad P(t) = P_1(t) + P_2(t), \quad P_1(t) = \rho a V(t) Q_0(t), \quad P_2(t) = \\ = \rho a V_1(t) Q_1(t)$$

где Q_0 — площадь области $G(t)$, Q_1 — площадь той области вне $G(t)$, частицы которой вовлечены в движение, V_1 — средняя скорость частиц на площади Q_1 .

При сверхзвуковом движении точек $\partial G(t)$ площадь $Q_1 = 0$. Если же $Q_1 \neq 0$, то в обычных условиях удара тела о жидкость $V_1 < 0$ [1]. Таким образом, $P_1(t) \geq P(t)$, при этом равенство соблюдается до тех пор, пока $\alpha(x, y, t) > a$.

Из (1.9) и (5.1) при $\alpha(x, y, t) > a$ имеем (учитывая, что $V^* = V dv/dH$, $v[H(t)] \equiv V(t)$)

$$m dv/dH = -\rho a Q_0(H)$$

Интегрируя это уравнение, получаем выражение для скорости тела и связь между временем t и глубиной погружения H

$$(5.2) \quad v(H) = V_0 - \rho a m^{-1} F(H); \quad F(H) = \int_0^H Q_0(h) dh, \quad V_0 = V(0) = v(0)$$

$$t = \int_0^H \frac{dh}{V_0 - \rho a m^{-1} F(h)}$$

Здесь $F(H)$ — объем тела под срезом на высоте H .

Формулы (5.2) дают закон движения по инерции затупленного тела произвольной формы после его удара со скоростью V_0 о поверхность акустического полупространства.

Найдем глубину H_* , на которой теряется сверхзвуковой характер движения границы области. Из (1.6)–(1.8) и первой формулы (5.2) получаем

$$(5.3) \quad \frac{V_0}{g(H_*)} = a \left\{1 + \frac{\rho}{m} \frac{F(H_*)}{g(H_*)}\right\}, \quad g = \max_{x \in \partial G(H)} |\text{grad } f|$$

В частности, если тело — эллиптический параболоид, т. е. $f(x, y) = Ax^2 + By^2$, $B > A > 0$, имеем

$$Q_0(h) = \frac{\pi h}{\sqrt{AB}}, \quad F(H) = \int_0^H Q_0(h) dh = \frac{\pi H^2}{2\sqrt{AB}}$$

Подставляя это выражение в (5.2) и интегрируя, получаем

$$(5.4) \quad t = \beta^{-1} \ln \left| \frac{1 + H\beta/(2V_0)}{1 - H\beta/(2V_0)} \right|, \quad \beta = \left(\frac{2\rho a V_0}{m \sqrt{AB}} \right)^{1/2}$$

Из (5.4) находим выражения

$$(5.5) \quad H(t) = 2V_0 \beta^{-1} (e^{\beta t} - 1) (e^{\beta t} + 1)^{-1}$$

$$V(t) = 4V_0 e^{\beta t} (e^{\beta t} + 1)^{-2}$$

$$P(t) = -4V_0 m \beta (e^{\beta t} - e^{2\beta t}) (e^{\beta t} + 1)^{-3}$$

дающие точное решение задачи удара эллиптического параболоида о поверхность акустического полупространства.

Учитывая (1.6) и (5.3), время окончания сверхзвукового режима t_* ($\alpha(r, t_*) = a$) определяем из уравнения

$$V(t_*) - 2a \sqrt{H(t_*)} B = 0$$

Из (5.5) можно получить, что $V''(t_m) = 0$, где $t_m = \beta^{-1} \ln(2 + \sqrt{3})$. Отсюда имеем оценку сверху для максимальной силы сопротивления жидкости

$$\max_t P(t) \leq P_1(t_m) = mV_0 \beta \frac{20 + 12\sqrt{3}}{(3 + \sqrt{3})^3} \approx 0,965 \left(\frac{m \rho a V_0^3}{\sqrt{AB}} \right)^{1/2}$$

Заметим, что выражения, аналогичные (5.5), в задаче об ударе тела по поверхности изотропного упругого полупространства были получены в [14].

Из (4.7) и (5.5) найдем выражение для потенциала скоростей на плоскости $z = 0$ в случае удара по акустической среде параболоида вращения ($A = B$)

$$\Phi(r_0, 0, t_0) = -4V_0 a \left\{ \pi^{-1} \int_{\tau_-}^{\tau_+} \frac{e^{\beta \tau}}{(e^{\beta \tau} + 1)^2} \arccos \frac{K_+}{L} d\tau + \right.$$

$$\left. + \beta^{-1} [(e^{\beta \tau_+} + 1)^{-1} - (e^{\beta \tau_0} + 1)^{-1}] \right\}$$

$$r_*(t) = \left(\frac{2V_0}{\beta A} \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1} \right)^{1/2}$$

Величины τ_- и τ_+ определяются из выражений (4.3), (4.4).

Графики распределения давления $\bar{p} = p(r_0, 0, t_0)/(\rho a V_0)$ по области взаимодействия при $\rho = 1$ г/см³, $a = 1500$ м/с, $A = 0,1$ м⁻¹, $V_0 = 100$ м/с, $m = 100$ кг приведены на фигуре штриховыми линиями для $t_0 = t_*/2$ (кривая 1) и $t_0 = t_*$ (кривая 2).

Автор благодарит А. Г. Хованского за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). Л.: Судостроение. 1976. 199 с.
2. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев: Наук. думка. 1981. 159 с.
3. Сагомоян А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения жидкости. М.: Изд-во МГУ. 1970. 120 с.
4. Шамгунов Ш. Д. Удар произвольным тупым телом вращения по границе полупространства, занятого сжимаемой жидкостью // Материалы Всесоюз. симпозиума по распространению упругопластических волн в сплошных средах. Баку: Изд-во АН АзССР. 1966. С. 406—423.
5. Галанин А. В., Гусев В. А., Сайкин С. С. Вход параболического цилиндра и сегмента в сжимаемую жидкость // Нестационарное движение тел в жидкости. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. 1979. С. 15—25.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гостехиздат. 1953. 804 с.
7. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 232 с.
8. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 328 с.
9. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка. 1969. 215 с.
10. Филиппов И. Г., Егорычев О. А. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. М.: Машиностроение. 1977. 303 с.
11. Fulks W., Guenther R. B. Hyperbolic potential theory // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1972. V. 49. No. 2. P. 79—88.
12. Кубенко В. Д. Удар осесимметричного твердого тела о поверхность сжимаемой жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 9. С. 44—48.
13. Skalac R., Feit D. Impact on the surface of a compressible fluid // Trans. ASME. Ser. B. J. Engng for Industry. 1966. V. 88. No. 3. P. 325—331 = Удар о поверхность сжимаемой жидкости // Конструирование и технология машиностроения. 1966. Т. 88. № 3. С. 97—104.
14. Thompson J. C., Robinson E. R. An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and an elastic body // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. No. 4. P. 583—586.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1987