

УДК 532.5

## О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Махмудов А. А., Терентьев Е. Д.

Изучается устойчивость движения по наклонной плоскости слоя несжимаемой жидкости со свободной поверхностью под действием силы тяжести при больших числах Рейнольдса и Фруда. Указываются амплитуды возмущений, которые приводят к нелинейной задаче. Дается постановка задач с начальными данными, а также граничных задач с условиями на подвижной стенке. Показано, что в поле течения в поперечном направлении возникают четыре характерные области, последовательно переходящие одна в другую. Отмечено, что предложенная схема позволяет изучать отрывные движения с рециркуляционными зонами. Построенная схема течения во многом напоминает схему течения около пластины, на которой развивается пограничный слой с самоиндуцированным давлением [1—4].

1. Пусть по наклонной плоскости, составляющей угол  $\theta$  с горизонталью, под действием силы тяжести, направленной вертикально вниз, стекает слой несжимаемой вязкой жидкости. Невозмущенное движение будем считать установившимся со скоростью, параллельной наклонной плоскости. В качестве размерных величин выберем параметры невозмущенного движения:  $U_0$  — скорость свободной границы,  $H_0$  — высоту слоя жидкости,  $\rho_0$  — плотность жидкости; используя их, введем безразмерные зависимые и независимые переменные. Будем пользоваться декартовой системой координат с осью  $x'$ , направленной вдоль наклонной плоскости, и осью  $y'$  — в глубь жидкости; отсчет координаты  $y'$  будем вести от свободной поверхности. В качестве основных используем уравнения Навье — Стокса; описанный переход к безразмерному виду приводит к двум параметрам: числу Рейнольдса  $R = \frac{2}{3} V_0 H_0 / \nu_0$ , где  $\nu_0$  — коэффициент кинематической вязкости, и числу Фруда  $F = U_0 / \sqrt{H_0 g_0}$ , где  $g_0$  — ускорение свободного падения.

На наклонной плоскости при  $y' = 1$  зададим условия прилипания

$$(1.1) \quad u = u_w, \quad v = v_w$$

где  $u$  и  $v$  — составляющие вектора скорости вдоль осей  $x'$  и  $y'$ ;  $u_w$  и  $v_w$  — составляющие скорости поверхности плоскости. Хотя основная часть наклонной плоскости неподвижна и непроницаема и на ней  $u_w = v_w = 0$ , тем не менее небольшую часть наклонной плоскости может занимать вибратор, из нее может производиться вдув, либо отсос жидкости, тогда  $u_w^2 + v_w^2 \neq 0$ .

На возмущенной свободной поверхности  $y' = \eta$  зададим равенство нормальных и касательных напряжений, которые для рассматриваемых ниже приближений можно записать как

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'} = 0, \quad S_T = \frac{\sigma_0}{\rho_0 H_0 U_0^2}$$

$$-p + \frac{4}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y'} + S_T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x'^2} = 0$$

и кинематическое условие

$$(1.3) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t'} + u \frac{\partial \eta}{\partial x'} = v$$

В формулах (1.2) и (1.3)  $t'$  — время,  $p$  — давление,  $\sigma_0$  — размерный коэффициент поверхностного натяжения. Безразмерные параметры  $R$  и  $S_T$  можно связать, используя угол наклона  $\theta$  и новый безразмерный параметр  $\gamma$ , определяемый лишь размерными параметрами жидкости

$$(1.4) \quad S_T = 4 \cdot 3^{-5/3} \gamma R^{-5/3} \sin^{-1/3} \theta, \quad \gamma = \sigma_0 (\rho_0 g_0 \nu_0^{4/3})^{-1}$$

В рассматриваемых ниже приближениях  $R \rightarrow \infty$ , согласно (1.4),  $S_T \rightarrow 0$ , и поэтому влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь. Но член с  $S_T$  в (1.2) будет оставлен, чтобы обсудить случай с  $S_T \sim \sim 1$  при  $R \rightarrow \infty$  и провести формальный параметрический анализ задачи. Величина  $\gamma$  тогда должна иметь порядок  $R^{5/3} \sin^{1/3} \theta$ . Для ртути, например,  $S_T = 8/15$  при  $\theta = 10^\circ$  и  $R = 820$ .

Основное невозмущенное течение, подчиненное уравнениям Навье — Стокса, однородным условиям на плоскости (1.1) и условиям на свободной поверхности, можно описать как

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_s &= U(y') = 1 - y'^2, & v_s &= 0 \\ p_s &= R^{-1} P(y') = F^{-2} y' \cos \theta = 4/3 R^{-1} y' \operatorname{ctg} \theta \\ \eta &= 0, & U_0 &= 1/2 H_0^2 g_0 \sin \theta / \nu_0 \end{aligned}$$

Устойчивость решения (1.5) по линейному приближению была изучена в [5, 6]. Дальнейший анализ течений, близких к невозмущенному, опирался на нелинейную теорию. Так, в работах [7—10] были построены солитонные решения и учтено влияние трехмерности. Все эти работы проводились для невозмущенных течений с небольшими числами Рейнольдса и Фруда. Основная цель этой работы — изучение решений уравнений Навье — Стокса, удовлетворяющих условиям (1.1) — (1.3), с продольной скоростью, почти всюду представляющей собой возмущение  $U(y')$  при  $R \rightarrow \infty$  и  $\theta \neq 0$ . Решения эти удовлетворяют дополнительному требованию: при стремлении их амплитуды к нулю, обеспечивающем глобальную линеаризацию возмущений продольной скорости по отношению  $U(y')$  во всей области, в задаче с однородными условиями (1.1) присутствует решение, описывающее нейтральные колебания. Из последнего следует: найденная связь между  $k$  и  $\omega$  для нейтральных колебаний будет представлять собой асимптотику при  $R \rightarrow \infty$  одной из кривых нейтральной устойчивости для соответствующей задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда.

Проведем асимптотический анализ при  $R \rightarrow \infty$ , во многом аналогичный выполненному [1—3] при изучении стационарных отрывных течений в пограничном слое и затем распространенному [4] на нестационарные течения. Введем в рассмотрение основную область с поперечным размером  $y' = O(1)$ , которая занимает почти все течение кроме узких областей, примыкающих к поверхности наклонной плоскости и свободной поверхности. Характерный продольный размер  $\Delta x'$  в основной и во всех вводимых ниже областях будем считать одинаковым. Предположим, что он зависит от числа  $R$  как  $\Delta x' \sim R^{\alpha_x}$ , где  $\alpha_x$  — число. Характерное безразмерное время во всех областях также будем считать одинаковым и пропорциональным  $R^{\alpha_t}$ . Зависимости возмущений скорости и давления от числа Рейнольдса в разных областях будут различными.

В основной области запишем разложения в виде (используя нумерацию областей сверху от свободной поверхности, пометим искомые функции и поперечную координату в основной области индексом 3, а время

и продольную координату, неизменные во всех областях, пометать не будем)

$$(1.6) \quad t' = R^{\alpha_t} t, \quad x' = R^{\alpha_x} x, \quad y' = y_3$$

$$u = U(y_3) + R^{\alpha_u} u_{31} + \dots, \quad v = R^{\alpha_v} v_{31} + \dots$$

$$p = R^{-1} P(y_3) + R^{\alpha_p} p_{31}$$

Здесь и далее, если это специально не оговорено, величины с индексами  $lm$  — функции  $t, x, y_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4; m = 1, 2$ ). Для введенных в (1.6) показателей степеней  $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_p$  числа Рейнольдса из физических соображений можно ввести ограничения

$$(1.7) \quad \alpha_u < 0, \quad \alpha_v < 0, \quad \alpha_p < 0$$

Из экспериментов известно, что при увеличении числа  $R$  неустойчивы длинноволновые возмущения низкой частоты, поэтому предположим, что

$$(1.8) \quad \alpha_x > 0, \quad \alpha_t > 0$$

Подставим разложения (1.6) в систему уравнений Навье—Стокса. Сохраняя в уравнении неразрывности оба слагаемых, получим порядковое равенство и уравнение

$$(1.9) \quad \alpha_u - \alpha_x = \alpha_v, \quad \partial u_{31} / \partial x + \partial v_{31} / \partial y_3 = 0$$

При анализе проекций уравнения сохранения импульса сделаем два предположения:  $\alpha_x > \alpha_t$  и  $\alpha_x < 1$ . Первое предположение эквивалентно требованию квазистационарности возмущений с индексом 31, а второе исключает влияние вязких напряжений на формирование возмущений. В результате получим одно порядковое равенство (второе совпадает с (1.9)) и два уравнения

$$(1.10) \quad \alpha_v - \alpha_x = \alpha_p$$

$$U \frac{\partial u_{31}}{\partial x} + \frac{dU}{dy_3} v_{31} = 0, \quad U \frac{\partial v_{31}}{\partial x} = - \frac{\partial p_{31}}{\partial y_3}$$

Система трех уравнений (1.9), (1.10) может быть аналитически проинтегрирована, ее решение, удовлетворяющее условию затухания при  $x \rightarrow -\infty$ , имеет вид

$$(1.11) \quad u_{31} = \frac{dU}{dy_3} A_{31}, \quad v_{31} = -U \frac{\partial A_{31}}{\partial x}, \quad p_{31} = P_{31} + \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial x^2} \int_0^{y_3} U^2 dy$$

Здесь  $A_{31}$  и  $P_{31}$  — произвольные функции  $t, x$ , стремящиеся к нулю при  $x \rightarrow -\infty$ .

2. Решение (1.11) получено из системы, в которую не входят вязкие напряжения, поэтому в задаче с однородными условиями на стенке с его помощью не удастся удовлетворить условиям прилипания. Далее, при  $y_3 \rightarrow 1$  нарушается асимптотическое разложение в функции  $u$ , поскольку главный член  $U(y_3) \rightarrow 0$ , а  $u_{31} \not\rightarrow 0$ . Это заставляет ввести новую пристеночную область, решение в которой, с одной стороны, должно удовлетворять условиям прилипания на стенке (1.1), а с другой переходить в решение в основной области.

Запишем функцию  $u$  из основной области 3 при  $y_3 \rightarrow 1$

$$(2.1) \quad u = 2(1 - y_3) - 2R^{\alpha_u} A_{13}(t, x) + \dots$$

Сравнение порядков первого и второго членов в (2.1) позволяет утверждать, что асимптотическое разложение по степеням  $R$  нарушается при

$1 - y_3 \sim R^{\alpha_u}$ . Исходя из этого и введем характерный поперечный масштаб в новой области и новую поперечную переменную

$$(2.2) \quad y_3 = 1 - R^{\alpha_u} y_4$$

Предварительный этап сращивания на уровне порядков позволяет записать вид асимптотических разложений в пристеночной области

$$(2.3) \quad u = R^{\alpha_u} u_{41} + \dots, \quad v = R^{\alpha_v + \alpha_u} v_{41} + \dots \\ p = R^{-1} P(y_3) + R^{\alpha_p} p_{41} + \dots$$

Полное сращивание на уровне функций приводит к предельным условиям при  $y_4 \rightarrow \infty$

$$(2.4) \quad u_{41} \rightarrow 2y_4 - 2A_{31} + \dots, \quad v_{41} \rightarrow -2y_4 \frac{\partial A_{31}}{\partial x} + \dots \\ p_{41} \rightarrow P_{31} + \frac{8}{15} \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial x^2} + \dots$$

Сделаем предположение о характере течения в пристеночной области. Во-первых, предположим, что течение нестационарно, т. е. наряду с конвективными членами сохраним член с производной по времени, а также, что течение формируется под действием сил давления и касательного вязкого напряжения. Последнее условие необходимо с математической точки зрения, поскольку оно позволяет сохранить в уравнении сохранения импульса вторую производную от  $u_{41}$  по  $y_4$ , что в свою очередь дает возможность удовлетворить условиям прилипания. В результате подстановки разложений (2.2) и (2.3) в систему уравнений Навье — Стокса получим три порядковых равенства и систему трех уравнений

$$(2.5) \quad \alpha_u - \alpha_t = 2\alpha_u - \alpha_x, \quad 2\alpha_u - \alpha_x = \alpha_p - \alpha_x \\ 2\alpha_u - \alpha_x = -\alpha_u - 1$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial u_{41}}{\partial x} + \frac{\partial v_{41}}{\partial y_4} = 0, \quad \frac{\partial p_{41}}{\partial y_4} = 0 \\ \frac{\partial u_{41}}{\partial t} + u_{41} \frac{\partial u_{41}}{\partial x} + v_{41} \frac{\partial u_{41}}{\partial y_4} = -\frac{\partial p_{41}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_{41}}{\partial y_4^2}$$

Объединяя порядковые равенства (1.7), (1.8) и (2.5) в систему и разрешая ее, получим

$$(2.7) \quad \alpha_x = 1/7, \quad \alpha_t = 3/7, \quad \alpha_u = -2/7, \quad \alpha_v = -3/7, \quad \alpha_p = -4/7$$

Из равенств (2.7) следует, что найденные показатели степеней удовлетворяют необходимым требованиям физического характера (1.7) и (1.8).

Уравнения (2.6) представляют собой хорошо известную систему Прандтля для нестационарного несжимаемого пограничного слоя. Помимо предельных условий (2.4) ее решение необходимо подчинить условиям на твердой стенке — условиям (1.1), записанным в терминах пристеночной области

$$(2.8) \quad u_{41}(t, x, y_{4w}) = u_{41w}(t, x), \quad v_{41}(t, x, y_{4w}) = v_{41w}(t, x)$$

где  $y_{41} = y_{4w}(t, x)$  — уравнение поверхности твердой стенки, а также начальным условиям по времени

$$(2.9) \quad u_{41}(0, x, y_4) = u_{410}(x, y_4)$$

В классической постановке задачи для пограничного слоя давление  $p_{41}$  считается заданной функцией. Напротив, в предлагаемой постановке, аналогично работам [1—4], давление должно быть найдено в процессе ре-

шения задачи. Для этого, в отличие от классической постановки, имеются предельные условия (2.4), хотя лишь первое и третье из них будут независимыми. Что касается второго, то оно является следствием первого условия и уравнения неразрывности.

Однако задача для пристеночной области 4 не замкнута, поскольку в предельных условиях (2.4) имеются две произвольные функции  $P_{31}$ ,  $A_{31}$ . Аналогичная ситуация появляется при анализе течения Пуазейля в плоском канале [11]. Для установления связи между  $P_{31}$  и  $A_{31}$  необходимо рассмотрение областей, лежащих над основной и примыкающих к свободной поверхности.

3. После того как в п. 2 определены показатели степени числа Рейнольдса (2.7), для удобства введем малый параметр  $\varepsilon = R^{-1/2}$  и будем выражать через его степени порядки искомых функций и независимых переменных.

Учтем в искомым функциях в основной области (1.6) следующие члены разложений

$$(3.1) \quad u = v(y_3) + \varepsilon^2 u_{31} + \varepsilon^4 u_{32} + \dots, \quad v = \varepsilon^3 v_{31} + \varepsilon^5 v_{32} + \dots \\ p = \varepsilon^7 P(y_3) + \varepsilon^4 p_{31} + \varepsilon^6 p_{32} + \dots$$

Степени  $\varepsilon$  перед функциями с индексом 32 выбраны так,<sup>1</sup> чтобы система уравнений, которой эти функции подчинены, была неоднородной. Не приводя полных решений для вновь введенных функций из-за их громоздкости, ограничимся лишь асимптотиками этих функций при  $y_3 \rightarrow 0$

$$(3.2) \quad u_{32} = -(P_{31} + A_{31}^2) - y_3 \left( 2A_{32} + \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial x^2} - 2 \int_{-\infty}^x \frac{\partial A_{31}}{\partial t} dx_1 \right) + \dots \\ v_{32} = -\frac{\partial A_{32}}{\partial x} + y_3 \frac{\partial (P_{31} + A_{31}^2)}{\partial x} + \dots \\ p_{32} = P_{32} - y_3 \left( \frac{\partial^2 A_{32}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial x \partial t} \right) + \dots$$

где  $A_{32} = A_{32}(t, x)$ ,  $P_{32} = P_{32}(t, x)$  — произвольные функции.

Используя формулы (1.4), (1.9) и (3.2), запишем асимптотические разложения функций в основной области (3.1) при  $y_3 \rightarrow 0$

$$(3.3) \quad u = 1 - y_3^2 + 2\varepsilon^2 y_3 A_{31} - \varepsilon^4 (P_{31} + A_{31}^2) + \dots \\ v = -\varepsilon^3 \frac{\partial A_{31}}{\partial x} + \varepsilon^3 y_3^2 \frac{\partial A_{31}}{\partial x} - \varepsilon^5 \frac{\partial A_{32}}{\partial x} + \dots \\ p = \varepsilon^4 P_{31} + \varepsilon^4 y_3 \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial x^2} + \varepsilon^6 P_{32} + \dots$$

Попытка удовлетворить условиям на свободной поверхности (1.2), (1.3) при помощи (3.3) хотя и возможна, но сразу приводит к следствию:  $\eta \sim \varepsilon^2$ , т. е. эти условия удовлетворяются для таких  $y_3$ , при которых в функции  $u$  три последних члена становятся одного порядка. Удовлетворим условиям (1.2) и (1.3) более аккуратно, используя метод сращивания асимптотических разложений. Для этого введем новую область 2 с характерным поперечным размером  $\varepsilon^2$ , а зависимости от  $\varepsilon$  искомым функций выберем так, чтобы они обеспечивали сращивание на уровне порядков с (3.3)

$$(3.4) \quad u = 1 + \varepsilon^4 u_{21} + \dots, \quad v = \varepsilon^3 v_{21} + \dots \\ p = \varepsilon^4 p_{21} + \dots, \quad \eta = \varepsilon^2 \eta_{21}(t, x) + \dots, \quad y_3 = \varepsilon^2 y_2$$

Полное сращивание при  $y_2 \rightarrow \infty$  на уровне функций дает

$$(3.5) \quad u_{21} \rightarrow -y_2^2 - 2y_2 A_{31} - A_{31}^2 - P_{31}, \quad v_{21} \rightarrow -\frac{\partial A_{31}}{\partial x}, \quad p_{21} \rightarrow P_{31}$$

Подставляя разложения (3.4) в систему уравнений Навье—Стокса, получим

$$(3.6) \quad \frac{\partial v_{21}}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + v_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial y_2} = -\frac{\partial p_{21}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial y_2} = 0$$

Решение системы (3.6), удовлетворяющее условиям (3.5), легко находится

$$(3.7) \quad u_{21} = -y_2^2 - 2y_2 A_{31} - A_{31}^2 - P_{31}, \quad v_{21} = -\frac{\partial A_{31}}{\partial x}, \quad p_{21} = P_{31}$$

и полностью совпадает со своим предельным видом (3.5). Таким образом, введение новой области 2 не привело к новому результату, однако анализ в ней необходим ввиду отличия систем уравнений (1.9), (1.10) и (3.6).

Пользуясь (3.7), удовлетворим условиям (1.2) и (1.3), в результате имеем

$$(3.8) \quad \eta_{21} = -A_{31}, \quad P_{31} = -S_T \partial^2 A_{31} / \partial x^2$$

Последнее равенство в (3.8), задающее связь между  $A_{31}$  и  $P_{31}$ , позволяет замкнуть задачу для пристеночной области 4.

4. Система уравнений (3.6) не содержит второй производной по  $y_2$ , поэтому удовлетворить условиям на свободной поверхности и одновременно установить связь между  $P_{31}$  и  $A_{31}$  удалось только благодаря тому, что условие (1.3) в рассматриваемом приближении оказалось следствием первого условия (1.2) и аналитического вида решения (3.7). Для того чтобы в определяющих уравнениях сохранилась вторая производная, введем новую область 1 и еще ближе подойдем к свободной поверхности. Укажем более подробно вид разложений в новой области

$$(4.1) \quad u = 1 + \varepsilon^4 u_{11} + \varepsilon^6 u_{12} + \dots, \quad v = \varepsilon^3 v_{11} + \varepsilon^5 v_{12} + \dots \\ p = \varepsilon^4 p_{11} + \varepsilon^6 p_{12} + \dots, \quad y = -\varepsilon^2 A_{31} + \varepsilon^3 y_1, \quad \eta = -\varepsilon^2 A_{31} + \\ + \varepsilon^3 \eta_{12} + \varepsilon^4 \eta_{13} + \dots$$

Подстановка разложений (4.1) в уравнения Навье—Стокса приводит к системе

$$(4.2) \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial p_{11}}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial u_{11}}{\partial x} = -\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial y_1^2}$$

Ее решение, удовлетворяющее предельным условиям при  $y_1 \rightarrow \infty$

$$(4.3) \quad u_{11} \rightarrow -P_{31}, \quad v_{11} \rightarrow -\partial A_{31} / \partial x, \quad p_{11} \rightarrow P_{31}$$

и условиям на свободной поверхности, единственно и совпадает с этими предельными условиями.

Хотя в уравнениях (4.2) и присутствует вторая производная по  $y_1$ , предельные условия и условия на свободной поверхности не позволяют получить решение, отличное от предельного (4.3).

Для функций с индексом 12 получим неоднородную систему

$$(4.4) \quad \frac{\partial v_{12}}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial y_1^2} = -\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{4}{3}$$

Полная постановка задачи для системы (4.4) возможна лишь после построения членов более высокого порядка в разложениях (3.4). Не приводя громоздких вычислений, выпишем лишь наиболее важный результат  $\eta_{12} = 0$ .

Анализ, проведенный для функций следующих приближений, позволяет определить функцию  $\eta_{13}$  и найти связь между функциями  $A_{32}$  и  $P_{32}$ , введенными в (3.2)

$$(4.5) \quad P_{32} = -S_T \frac{\partial^2 A_{32}}{\partial x^2} + S_T \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial t \partial x} + A_{31} \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial x^2}$$

Соотношение, связывающее  $A_{32}$  и  $P_{32}$ , позволяет поставить задачу для области 4 в следующем приближении.

Этим показано, что введение новой области 1 приводит к уравнениям, порядок которых соответствует количеству условий на свободной поверхности.

5. Проведенный выше анализ позволил изучить особенности одного из возможных видов асимптотических решений при  $R \rightarrow \infty$ . Все течение в поперечном направлении оказалось разбитым на четыре области. Если в первых трех областях в главном решение удалось построить в явном виде, что, по сути дела, было связано с линейностью определяющих уравнений, то в самой нижней области 4 система определяющих уравнений (2.6) оказалась нелинейной и ее решение необходимо строить численно. Условия сращивания (2.4) совместно со вторым равенством (3.8), отражающим влияние свободной поверхности, позволили замкнуть задачу для системы (2.6) и рассмотреть решение только для области 4. Из решения этой задачи определяется функция  $A_{31}$ , а через нее и точный вид решений во всех верхних областях.

Следует выделить две характерные группы задач для системы (2.6). К первой группе отнесем задачи, в которых заданы начальные условия (2.9) при  $t = 0$  и условия на стенке (2.8) при  $t > 0$ . Выбирая различные комбинации функций  $u_{410}$ ,  $u_w$ ,  $v_w$ , можно рассмотреть физические задачи, имеющие прямые аналоги с задачами пограничного слоя с самоиндуцированным давлением на плоской пластине. Такими являются задачи о вдуве либо отсосе, о развитии вихревых образований, о гармоническом вибраторе и его запуске [12]. Во всех задачах первой группы для всех  $x$  сохраняется условие (3.8) и на поверхности раздела — свободной поверхности — никаких вынуждающих условий не задается.

Ко второй группе отнесем такие задачи, в которых возмущающие силы приложены к поверхности раздела  $y' = \eta$ . Например, на части этой поверхности, уже не свободной, приложено внешнее давление [6]. В таких задачах следует отказаться от второго условия (1.2) на этой части поверхности, что приводит, как следствие, к отказу от соотношения (3.8) с заменой его на

$$P_{31} = -S_T \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial x^2} + P_S$$

где  $P_S(t, x)$  — внешнее давление.

Обратимся к области 4, сделаем дополнительное упрощающее предположение, позволяющее линеаризовать задачу по отношению к невозмущенному течению. Пусть функции с индексом 41 имеют вид

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u_{41} &= 2y_4 + \delta u_{41}' + \dots, & v_{41} &= \delta v_{41}' + \dots \\ p_{41} &= \delta p_{41}' + \dots, & \delta &\ll 1 \end{aligned}$$

Система для функций со штрихом следует из (2.6) и (5.1), она имеет вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \partial u_{41}' / \partial x - \partial v_{41}' / \partial y_4 &= 0, \quad \partial p_{41}' / \partial y_4 = 0 \\ \frac{\partial u_{41}'}{\partial t} + 2y_4 \frac{\partial u_{41}'}{\partial x} - 2v_{41}' &= -\frac{\partial p_{41}'}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_{41}'}{\partial y_4^2} \end{aligned}$$

Из предельных условий (2.4) с учетом (3.8) имеем

$$(5.3) \quad p_{41}' = 1/2 (S_T - 8/15) (\partial^2 u_{41}' / \partial x^2)_{y_4 \rightarrow \infty}$$

Как отмечалось выше, граничные условия на поверхности (2.8) и начальные условия (2.9) позволяют рассмотреть различные физические задачи. Остановимся на простейшей задаче о собственных колебаниях, положив

$$(5.4) \quad u_{41w} = 0, \quad v_{41w} = 0$$

Как это принято в теории устойчивости, решение задачи (5.2)–(5.4) будем искать в виде

$$(5.5) \quad \begin{aligned} u_{41}' &= -e^{ikx+i\omega t} df(y_4)/dy_4, \quad v_{41}' = e^{ikx+i\omega t} ikf(y_4) \\ p_{41}' &= e^{ikx+i\omega t} \end{aligned}$$

Подстановка (5.5) в систему (5.2) приводит к уравнению [4], которое после дифференцирования по  $y_4$  и введения новой независимой переменной  $z = -(3ik)^{1/3} y_4 + 3i\omega (3ik)^{-2/3}/2$  приводится к уравнению Эйри для функции  $d^2f/dz^2$ .

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее условию ограниченности  $df/dz$  при  $y_4 \rightarrow \infty$  для  $1/2\pi > \arg k > -3/2\pi$ , имеет вид

$$d^2f/dz^2 = B \operatorname{Ai}(z)$$

где  $\operatorname{Ai}(z)$  — функция Эйри. Удовлетворяя условиям в точке  $y_4 = 0$  и при  $y_4 \rightarrow \infty$  получим, что постоянная  $B$  будет отлична от нуля только в том случае, если волновое число  $k$  и частота  $\omega$  связаны между собой

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \frac{d \operatorname{Ai}(\Omega)}{dz} \left[ \int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(z) dz \right]^{-1} &= \pm \frac{k_1^2}{60} \left( \frac{1}{2} ik_1 \right)^{1/3} \\ \Omega &= i\omega_1 (1/2 ik_1)^{-2/3}, \quad k = A_0 k_1, \quad \omega = B_0 \omega_1 \\ A_0 &= 15^{-3/7} 6^{-1/7} |S_T - 8/15|^{-3/7}, \quad B_0 = (2/3)^{1/2} A_0^{2/3} \end{aligned}$$

Знак плюс следует взять при  $S_T < 8/15$  и знак минус при  $S_T > 8/15$ . Уравнение (5.6) со знаком плюс связывает волновое число и частоту собственных колебаний в плоском течении Пуазейля, поведение его решений хорошо изучено [11]. Пользуясь результатами [11], заключаем, что для фиксированного значения  $k \neq 0$  уравнение (5.6) имеет счетное множество корней  $\omega_{1,n}(k)$ . При непрерывном изменении  $k$  корни  $\omega_{1,n}(k)$  образуют счетное множество траекторий. Если  $k$  выбрать меняющимся вдоль положительной части действительной оси, то все корни  $\omega_{1,n}(k)$ , начиная со второго, будут лежать во втором квадранте плоскости  $k$ . И только первый корень  $\omega_{1,1}(k)$  перейдет из второго квадранта в третий, пересекая действительную ось в точке  $\omega_{1,1}(k) = \omega_* = -4,981$  при  $k_* = 6,385$ . Значения  $k_*$  и  $\omega_*$  определяют нейтральные колебания для  $k < k_*$  возмущения будут затухать со временем, а для  $k > k_*$  возрастать по экспоненциальному закону пропорционально  $\exp(-t \operatorname{Im} \omega_{1,1}(k))$ . Пользуясь преобразованиями (1.6) с параметрами (2.7) и (5.6), можно

записать асимптотику кривой нейтральной устойчивости

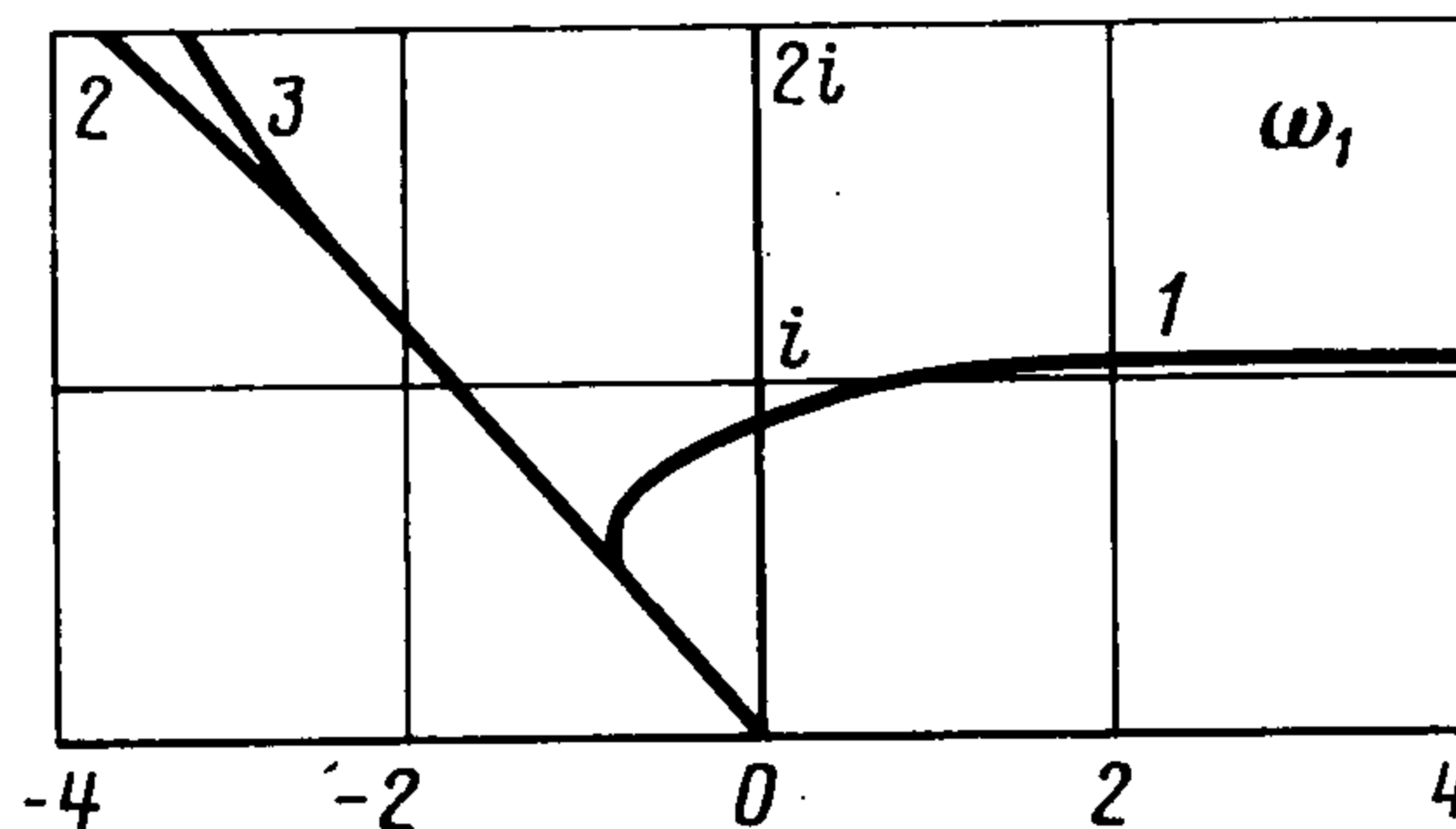
$$k_{*0} = 1,549R^{-1/2}H_0^{-1} (8/15 - S_T)^{-3/7}, \quad 8/15 < S_T$$

$$\omega_{*0} = 0,2119R^{1/4} (g_0/H_0)^{1/2} \sin^{1/2}\theta (8/15 - S_T)^{-2/7}$$

Анализ корней уравнения (5.6) при изменении  $\omega_1$  вдоль действительной оси [11] позволяет указать корень  $\omega_1 = 0$ ,  $k_1 = -5,728$ , задающий асимптотическое решение, переходящее на нелинейной стадии в [стационарный отрыв.

Зависимости  $\omega_{1,n}(k)$  при изменении  $k$  вдоль действительной оси для

$$(5.7) \quad S_T > 8/15$$



приведены на фигуре. Среди них нет ни одной траектории, пересекающей действительную ось, поэтому течения при условии (5.7) оказываются устойчивыми. Среди корней в этом случае нет также и корня, задающего асимптотику стационарного отрыва.

Конечно, при увеличении  $R$ , согласно (1.4),  $S_T$  будет уменьшаться и в пределе  $R \rightarrow \infty$  сохранение неравенства (5.7) следует скорее рассматривать как формальный параметрический анализ задачи. Интересно отметить, что в пределе  $S_T \rightarrow \infty$  граничные условия на свободной поверхности совпадают с условиями на центральной линии тока для отыскания антисимметричных возмущений в плоском течении Пуазейля. А такие возмущения всегда устойчивы [13].

Исследование устойчивости рассматриваемой задачи на основе численного решения уравнения Орра — Зоммерфельда показывает, что увеличение параметра  $S_T$ , начиная с некоторого определенного значения, стабилизирует сдвиговое течение, приближая спектр возмущенной задачи к антисимметричной части спектра возмущенного течения Пуазейля<sup>1</sup>. Проведенный асимптотический анализ показывает, что аналогичная зависимость от параметра  $S_T$  наблюдается и в предельном возмущенном течении при  $R \rightarrow \infty$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53—57.
2. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate. II // Mathematika. 1969. V. 6. No. 31. P. 106—121.
3. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. A. 1969. V. 312. No. 1509. P. 181—206.
4. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007—1023.
5. Benjamin T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 554—574.
6. Yih C.-S. Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6. No. 3. P. 321—334.
7. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63—66.
8. Демехин Е. А., Демехин И. А., Шкадов В. Я. Солитоны в стекающих слоях вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 9—16.
9. Pumir A., Manneville P., Pomeau Y. On solitary waves running down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1983. V. 135. P. 27—50.
10. Benjamin T. B. The development of three-dimensional disturbances in an unstable film of liquid flowing down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 401—419.
11. Bogdanova E. V., Ryzhov O. S. Free and induced oscillations in Poiseuille flow // Q. J. Mech. Appl. Math. 1983. V. 36. Pt. 2. P. 271—287.
12. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264—272.
13. Orszag S. A. Accurate solution of the Orr — Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. P.t. 4. P. 689—703.

Москва

Поступила в редакцию  
17.IV.1987

<sup>1</sup> Беликов В. В., Епихин В. Е., Филянд Л. В. Исследование устойчивости течений с поверхностью раздела (капиллярные струи, слой жидкости) // Отчет НИИ механики МГУ. 1980. № 2450. 85 с.