Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 532.516

КОНИЧЕСКОЕ ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ, ИНДУЦИРУЕМОЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА ПЛОСКОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Никулин В. В.

В точной постановке решается задача о воздействии вращательных тангенциальных напряжений определенного вида на плоскую свободную поверхность вязкой жидкости. Изучается качественная структура течения, возникающего в жидкости. Доказывается существование решений. Приложение результатов к расчету апвеллинга, вызываемого ураганами вне зоны максимальных ветров, дает реальные численные значения. Рассматриваемое движение жидкости относится к классу автомодельных конических течений, различные виды которых исследовались в [1—7].

1. Постановка задачи. Рассматривается полупространство, заполненное вязкой несжимаемой жидкостью, ограниченное плоской свободной поверхностью. Сила тяжести отсутствует. Вводится сферическая система координат R, θ, φ с началом на свободной поверхности. Полярная ось $\theta = 0$ перпендикулярна поверхности и направлена внутрь жидкости. На свободной поверхности заданы касательные напряжения, имеющие только вращательную компоненту τ, которая изменяется по заданному закону: $\tau = \rho c^2/R^2$; ρ — плотность жидкости, c — постоянная. Течение стационарно и вращательно симметрично; u, w, v — компоненты скорости, соответствующие R, θ, φ. Характерные параметры задачи: ν — кинематическая вязкость жидкости и постоянная c; их размерности одинаковы. Анализ при помощи теории подобия [8] показывает, что задача автомодельна и ее решение можно искать в виде

$$u = \frac{c^2 J(x)}{\nu r}, \quad w = \frac{c^2 F(x)}{\nu r}, \quad v = \frac{c^2 \Omega(x)}{\nu r} \tag{1.1}$$

$$(x = \cos\theta, \ r = R\sin\theta)$$

Из уравнения неразрывности получается $J(x) = F'(x)\sin\theta$. После подстановки (1.1) и исключения $J(x)$ уравнения Навье — Стокса приводятся к виду [4]:

$$\begin{gathered} F^{\mathrm{IV}}(1-x^2) - 4xF''' + 2kFF''' + 6kF'F'' = -\frac{4k\Omega\Omega'}{(1-x^2)} \\ \Omega''(1-x^2) + 2kF\Omega' = 0 \\ -2n = 2kF^2 + 2k\Omega^2 + [2k(FF'' + F'^2) + F'''(1-x^2) - \\ - 2F''x](1-x^2); \ k = c^2/(2\nu^2) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь k — безразмерный параметр задачи; функция $n(x)$ связана с давлением соотношением $P/\rho = c^2 n(x)/r^2 + B$; B — постоянная. Первое уравнение (1.2) получается после исключения давления.

На свободной поверхности ($x = 0$) ставятся условия непротекания и задаются касательные напряжения. На оси симметрии требуется ограниченность вертикальной и вращательной компонент скорости, отсутствие источников или стоков. В результате получаем

$$F(0) = F''(0) = 0, \ \Omega(0) = -1 \tag{1.3}$$

$$F'(1) < \infty, \ F(1) = \Omega(1) = 0 \tag{1.4}$$

Следует заметить, что при выполнении условий (1.4) вертикальные ускорения при $x \to 1$ также ограничены.

Таким образом, задача свелась к решению системы первых двух уравнений (1.2) с краевыми условиями (1.3), (1.4). Данная система преобразуется к более удобному виду [4]. Первое уравнение интегрируем три раза. Получаем

(1.5) $$(1-x^2)F' + 2xF + kF^2 = -k\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x \frac{4\Omega\Omega'\,dx}{(1-x^2)} + S_0 + S_1x + S_2x^2$$

При помощи (1.3) из (1.5) находим

$$S_0 = F'(0),\quad S_1 = 0,\quad S_2 = \frac{1}{2}F'''(0) + k\,[F'(0)]^2 + F'(0)$$

Выражение для S_2 преобразуется методом, использованным [9] при исследовании турбулентных струй. Первое уравнение (1.2) умножаем на $(1-x^2)$ и интегрируем один раз. Получаем

(1.6) $$(1-x^2)^2F''' + k(1-x^2)[2F'^2 + 2FF''] + 4kxFF' - 2kF^2 = -2k\Omega^2 + S_3$$

Из ограниченности $F'(1)$ следует: $(1-x)F'' \to 0$, $(1-x)^2F''' \to 0$ при $x \to 1$. (В противном случае функции F'' и $(1-x)F'''$ неинтегрируемы при $x=1$.) Рассмотрение (1.6) с учетом (1.3), (1.4) в точках $x=1$ и 0 дает

$$S_3 = 0,\quad F'''(0) + 2kF'^2(0) + 2k\Omega^2(0) = 0$$

Тогда выражение для S_2 принимает вид $S_2 = F'(0) - k\Omega^2(0)$. Преобразование тройного интеграла в правой части (1.5) к однократному [4] и подстановка выражений для S_0, S_1, S_2 приводят (1.5) к виду

(1.7) $$(1-x^2)F' + 2xF + kF^2 = -k\int\limits_0^x \frac{2(x-t)(1-xt)\Omega^2\,dt}{(1-t^2)^2} + (1+x^2)F'(0)$$

Из (1.7), (1.4) при $x \to 1$ следует

(1.8) $$F'(0) = k\int\limits_0^1 \frac{\Omega^2\,dt}{(1+t)^2}$$

Подставим это соотношение в (1.7) и сделаем замену $F(x) = (1-x^2)f(x)/k$. Тогда из (1.7) и второго уравнения (1.2) окончательно получаем систему

(1.9) $$f' + f^2 = k^2G(x)/(1-x^2)^2,\quad k = c^2/(2\nu^2)$$

$$\Omega'' + 2f\Omega' = 0$$

$$G(x) = (1-x)^2\int\limits_0^x \frac{(1+t^2)\Omega^2\,dt}{(1-t^2)^2} + (1+x^2)\int\limits_x^1 \frac{\Omega^2\,dt}{(1+t)^2}$$

Уравнения (1.9) решаем на отрезке [0, 1] с краевыми условиями

(1.10) $$f(0) = 0,\ \Omega'(0) = -1,\ \Omega(1) = 0$$

В работе доказывается существование решений системы (1.9) с условиями (1.10) в классе непрерывных на отрезке [0, 1] функций. Исследуется качественная структура решений. При этом прямой проверкой можно будет убедиться, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям (1.3), (1.4).

2. Структура решений. *Лемма* 1. $\Omega(x)$ — монотонно убывающая функция, $\Omega(x) \geqslant 0$.

Доказательство. Интегрирование второго уравнения (1.9) дает

$$\Omega'(x) = -E^2(0, x) < 0, \quad E(t, x) = \exp\left(-\int\limits_t^x f\,du\right)$$

Тогда при учете (1.10) получаем $\Omega \geqslant 0$.

Лемма 2. Справедливы соотношения

$$G(x) \geqslant 0,\ G(0) > 0,\ G'(0) = G'(1) = 0,\ G'''(x) > 0$$

Доказательство. Неравенство $G(x) \geqslant 0$ непосредственно следует из выражения для $G(x)$. В силу леммы 1 $\Omega(x) \not\equiv 0$. Тогда $G(0) > 0$. Равенства $G'(0) = G'(1) = 0$ проверяются дифференцированием $G(x)$ при учете условия $\Omega(1) = 0$. Так как $G'''(x) = -4\Omega\Omega'/(1 - x^2)$, то в силу леммы 1 $G''' > 0$.

Следствие 1. Справедливо неравенство $f(x) \geqslant 0$.

Доказательство. После умножения на интегрирующий множитель и выполнения интегрирования первое уравнение системы (1.9) приводится к виду

$$f(x) = k^2 \int\limits_0^x \frac{G(t)\,E(t, x)\,dt}{(1 - t^2)^2}$$

Так как $G(x) \geqslant 0$ (лемма 2), то $f(x) \geqslant 0$.

Следствие 2. На интервале $0 < x < 1$ выполнены неравенства

$$\Omega'' > 0,\ \Omega(0) < 1,\ \Psi(x) < \Omega(x) < \Omega(0)(1 - x)$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Omega(0) - x, & 0 \leqslant x \leqslant \Omega(0) \\ 0, & \Omega(0) \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Доказательство. Из доказательства следствия 1 и леммы 1 следует, что $f(x) > 0$, $\Omega' < 0$ на интервале $0 < x < 1$. Тогда из второго уравнения (1.9) получаем $\Omega'' > 0$. Остальные неравенства вытекают из последнего, граничных условий (1.10) и леммы 1.

Лемма 3. Функция $G(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$G(0)(1 - x)^2 \leqslant G(x) \leqslant \Omega^2(0)(1 - x)^2$$

Доказательство. Так как $\Omega(x) \leqslant \Omega(0)(1 - x)$ (следствие 2), то

$$G(x) \leqslant (1 - x)^2 \int\limits_0^x \frac{(1 + t^2)\,\Omega^2(0)\,dt}{(1 + t)^2} + (1 + x^2) \int\limits_x^1 \frac{(1 - t)^2\,\Omega^2(0)\,dt}{(1 + t)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \Omega^2(0)(1 - x)^2$$

(использованы неравенства: $(1 + t^2) \leqslant (1 + t)^2$ для $t \geqslant 0$, $(1 + x^2) \leqslant (1 + t)^2$ для $t \geqslant x \geqslant 0$). Чтобы доказать левое неравенство, вводится функция $H(x) = G(x) - G(0)(1 - x)^2$. При учете леммы 2 получаем

$$H(0) = H(1) = 0,\ H'(0) > 0,\ H'(1) = 0,\ H'''(x) > 0$$

В силу данных условий функция H'' должна быть сначала отрицательной, а затем положительной. Тогда из графического построения при учете краевых условий для H и H' следует, что $H \geqslant 0$.

Следствие 3. Справедливо неравенство

$$G(x) \geqslant \Omega^3(0)(1 - x)^2/12$$

Доказательство. При учете следствия 2 получаем

$$G(0) \geqslant \int\limits_0^{\Omega(0)} \frac{(\Omega(0)-t)^2\,dt}{(1+t)^2} \geqslant \frac{\Omega^3(0)}{12}$$

Последнее при учете леммы 3 доказывает требуемое утверждение.

Лемма 4. Функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам: $0 \leqslant f(x) \leqslant k^2x$.

Доказательство. Из первого уравнения системы (1.9), леммы 3 и следствия 2 вытекает: $f'(x) \leqslant k^2\Omega^2(0) \leqslant k^2$. Отсюда $f(x) \leqslant k^2x$. Неравенство $f(x) \geqslant 0$ доказано в следствии 1.

На основании полученных утверждений определяется направление движения жидкости вблизи оси симметрии и свободной поверхности, исследуется асимптотическое (при $k \to \infty$) поведение решений.

Из определения радиальной скорости следует

$$\nu uR/c^2 = (1-x^2)f'/k - 2xf/k = kG(x)/(1-x^2) - (1-x^2)f^2/k - 2xf/k$$

Тогда $\nu uR/c^2 \to kG(0) > 0$ при $x \to 0$ (так как $f(0)=0$), $\nu uR/c^2 \to 2f/k < 0$ при $x \to 1$ (в силу лемм 2, 4). Таким образом, вдоль свободной поверхности жидкость течет от центра вращения, вблизи оси симметрии — движется по направлению к свободной поверхности.

При исследовании асимптотических свойств решений показывается, что вблизи свободной поверхности, при $k \to \infty$, образуется пограничный слой, даются оценки на величины функций.

Лемма 5. Справедливо неравенство

$$\Omega(0) > 1/(4k)^{1/2} \text{ при } k \geqslant 1$$

Доказательство. Из доказательства леммы 4 следует: $f \leqslant k^2\Omega^2(0)\,x$. Тогда

$$\Omega(0) = \int\limits_0^1 E^2(0,t)\,dt \geqslant \int\limits_0^1 \exp(-k^2\Omega^2(0)t^2)\,dt$$

или $z \geqslant (\pi^{1/4}/2^{1/2})\,k^{1/2}\mathrm{erf}^{1/2}(z)$, где $z = k\Omega(0)$, erf — интеграл ошибок. Из графического построения видно, что данное неравенство выполнено при всех $z \geqslant z_*$, где z_* — решение уравнения $z_* = (\pi^{1/4}/2^{1/2})\,k^{1/2}\,\mathrm{erf}^{1/2}(z_*)$. Последнее имеет единственное решение в силу монотонного убывания производной по z_* от правой части. Дифференцированием устанавливается, что $k(z_*)$, а следовательно, и $z_*(k)$ — монотонно возрастающие функции. Прямым вычислением можно убедиться, что $z_*(1) > 1/2$. Тогда

$$z_*(k) > (\pi^{1/4}/2^{1/2})\,k^{1/2}\,\mathrm{erf}^{1/2}(1/2) > k^{1/2}/2 \text{ при } k \geqslant 1$$

Так как $z > z_*$, то $z > k^{1/2}/2$ при $k \geqslant 1$, откуда следует утверждение леммы.

Ниже показывается, что при $k \to \infty$ на свободной поверхности образуется пограничный слой, толщина которого убывает не медленнее, чем $1/k^{1/4}$.

Учитывая следствие 3 и лемму 5, для $k \geqslant 1$ можно записать

$$f'(x) \geqslant \varkappa^2 - f^2,\quad \varkappa = k^{1/4}/(8\sqrt{6})$$

Вводится функция $\varphi(x)$ как решение уравнения

$$\varphi' = \varkappa^2 - \varphi^2,\ \varphi(0) = 0$$

Было показано [4, 5], что

$$f \geqslant \varphi \tag{2.1}$$

и $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция. Из уравнения для φ следует: $\varphi' < \varkappa^2$, $\varphi \leqslant \varkappa^2 x$. Отсюда

$$(2.2) \qquad \varphi' \geqslant \varkappa^2 - \varkappa^4 x^2$$

Обозначим $\delta = 1/(\sqrt{2}\varkappa) = 8\sqrt{3}/k^{1/4}$. Тогда для $x \leqslant \delta$ из (2.2) следует: $\varphi' \geqslant \varkappa^2/2$, $\varphi \geqslant (\varkappa^2/2)\,x$. В силу монотонного возрастания $\varphi(x)$ и неравенства (2.1)

$$(2.3) \qquad f(x) \geqslant \varkappa/(2\sqrt{2}) \quad \text{при} \quad x \geqslant \delta$$

Двукратное интегрирование второго уравнения (1.9) от δ до $x > \delta$ и подстановка в него (2.3) дает

$$(2.4) \qquad \Omega(x) = -\Omega'(\delta)\int_x^1 E^2(\delta, t)\,dt \leqslant -2\Omega'(\delta)\sqrt{e}\,\delta\zeta(x),$$

$$\zeta(x) = \exp(-(^1/_2)\,x\delta^{-1}) - \exp(-(^1/_2)\,\delta^{-1})$$

Согласно следствию 2, $\Omega'' > 0$. Тогда $-\Omega'(\delta) < \Omega(0)/\delta$. Отсюда и из (2.4) следует

$$\Omega(x)/\Omega(0) \leqslant 2\sqrt{e}\,\zeta(x)$$

Последнее неравенство устанавливает существование пограничного слоя, толщина которого стремится к нулю не медленнее, чем $\delta \sim 1/k^{1/4} \sim$ $\sim (\nu/c)^{1/2}$.

В лемме 5 получена нижняя оценка для $\Omega(0)$. Найдем верхнюю оценку. Так как $\Omega'' > 0$ (следствие 2), то $-\Omega'(\delta) < -\Omega'(0) = 1$ (условие 1.10). При учете этого из (2.4) следует

$$(2.5) \qquad \Omega(\delta) < 2\delta$$

Так как $\Omega'' > 0$, то $\Omega(0) < \Omega(\delta) + \delta$. Отсюда и из (2.5) получаем $\Omega(0) < 3\delta = 24\sqrt{3}/k^{1/4}$.

3. Существование решений. Пусть $C[0, 1]$ — пространство непрерывных на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функций с метрикой $\rho(f, g) = \max|f(x) - g(x)|$. Известно, что $C[0, 1]$ — полное нормированное (следовательно, локально выпуклое) пространство. Тогда для доказательства существования решений можно применить следствие из теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Теорема. Система (1.9) с граничными условиями (1.10) имеет на отрезке $[0, 1]$ хотя бы одно непрерывное решение.

Доказательство. Пусть D — множество функций $f \in C[0, 1]$, удовлетворяющих неравенствам: $0 \leqslant f(x) \leqslant k^2 x$. Очевидно, D — непустое, замкнутое выпуклое множество. Введем отображение $Uf = g$:

$$(3.1) \qquad g' = k^2\frac{G(x)}{(1-x^2)^2} - g^2, \quad g(0) = 0$$

$$G(x) = (1-x)^2\int_0^x \frac{(1+t^2)\,\Omega^2\,dt}{(1-t^2)^2} + (1+x^2)\int_x^1 \frac{\Omega^2\,dt}{(1+t)^2}$$

Функция $\Omega(x)$ находится из соотношения

$$(3.2) \qquad \Omega(x) = \int_x^1 E^2(0, t)\,dt$$

При таком определении $\Omega(x)$ удовлетворяется второе уравнение в в (1.9) и граничные условия (1.10).

Согласно (3.2), $\forall f \in D$ справедливо неравенство $\Omega(x) \leqslant (1 - x)$. Тогда из выражения для $G(x)$ следует $0 \leqslant G(x) \leqslant (1 - x)^2$ (лемма 3) и $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4. Таким образом, $\forall f \in D$ и $g = Uf$ выполнено неравенство

$$0 \leqslant g \leqslant k^2 x \tag{3.3}$$

Из (3.3) и неравенства $G(x) \leqslant (1 - x)^2$ следует, что задача (3.1) имеет единственное и непрерывное на $[0, 1]$ решение. Следовательно, при учете (3.3) имеем $g \in D$, т. е. $U(D) \subset D$.

Отображение U непрерывно, так как $\Omega(x)$ аналитически выражается через f, $G(x)$ — через $\Omega(x)$, $g(x)$, как решение (3.1) непрерывно зависит от $G(x)$. Предкомпактность $U(D)$ в $C[0, 1]$ доказывается при помощи теоремы Арцелла [10]. Равномерная ограниченность $U(D)$ вытекает из (3.3). Из (3.1), (3.3), неравенства на $G(x)$ следует равномерная ограниченность $g'(x)$. Отсюда вытекает, что множество $U(D)$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, отображение U и множество D удовлетворяют условиям следствия из теоремы Шаудера и, следовательно, существует неподвижная точка f отображения U.

4. Изложенные результаты можно применить к исследованию течения, возникающего в жидкости в случае, когда над ее поверхностью существует торнадоподобный вихрь [11—14] (примерами таких вихрей в природе являются ураганы, смерчи [11, 12], в лаборатории — их экспериментальные модели [13, 14]). Вращательная компонента скорости вне ядра вихря (вне области максимальных ветров [11]) приближенно описывается зависимостью $v = A/r$, A — постоянная, r — расстояние до оси вращения. Если течение турбулентно, то величина касательного напряжения на подстилающей поверхности в азимутальном направлении выражается соотношением [15, 16]: $\tau = c_1 \rho_1 v^2$, c_1 — постоянная, ρ_1 — плотность воздуха. Тогда для области вне ядра (в зонах B и C, согласно терминологии, используемой в [17]) $\tau \approx \rho c^2/r^2$, $c^2 = c_1 \rho_1 A^2/\rho$. Таким образом, рассматриваемые решения применимы только к области вне ядра вихря. Искривлением свободной поверхности пренебрегается. Например, для ураганов максимальная величина искривления не привышает 1 м, что много меньше всех характерных размеров и не превосходит даже высоты волн. Отметим, что вследствие существования радиального течения в пограничном слое воздушного вихря на поверхности жидкости могут возникнуть напряжения в радиальном направлении, нескомпенсированные искривлением свободной поверхности. В работе их действие не учитывается.

Сравнение сил инерции и Кориолиса показывает, что при скоростях течения жидкости 1 м/с первые превосходят вторые на расстояниях до 20 км от центра. Таким образом, в случае смерчей или лабораторных вихрей вклад рассматриваемого в работе инерционного механизма в возникновение движения жидкости будет доминирующим, а в случае ураганов может быть заметным.

С целью оценки влияния инерционного механизма выполнен расчет течения, индуцируемого вихрем с параметрами, близкими к параметрам среднего урагана. Используется схема последовательных приближений [4]. Полагаем $k = 1$ и 5 (турбулентное число Рейнольдса $c/\nu \approx 1{,}4$ и 3,2; такой порядок величины обычно используется в расчетах течений из рассматриваемого класса [4, 9]), $c_1 = 10^{-3}$ [16], $A = 10^6$ м^2/с, $\rho_1 = 1$ кг/м^3, $\rho = 10^3$ кг/м^3. Тогда $c = 10^3$ м^2/с. Величина A вычислена для среднего урагана [11] ($r_0 = 2 \cdot 10^4$ м — радиус максимальных ветров, $v_0 = 50$ м/с — скорость при $r = r_0$).

Получается следующий результат: если $k = 5$, $R = 2 \cdot 10^4$ и $2 \cdot 10^5$ м, глубина $h = 100$ м, то $w \approx 0{,}03$ и $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ см/с. При $h = 10^3$ м имеем $w \approx 0{,}3$ и $1{,}3 \cdot 10^{-2}$ см/с. На поверхности жидкости при тех же k и R имеем $v \approx 10$ и 2 см/с, $u \approx 6$ и 1,3 см/с.

Соответствующие величины при $k = 1$ примерно в 4 раза меньше для w и u и в 1,5 раза для v.

Значение w при $R = 2 \cdot 10^4$ м и $h = 100$ м имеет близкий порядок величины к значениям вертикальной скорости, вычисленной [17] для зоны B, а при $R = 10^5$ м — для зоны C. Расчет w при $h = 10^3$ м показывает, что меридиональная циркуляция, вызываемая вихрем, простирается на значительные глубины, а не ограничивается верхним слоем. Это согласуется с измерениями в следе тропического циклона, где изменения температуры в океане над фоновыми значениями прослеживаются, по крайней мере, до глубины 10^3 м [18].

Таким образом, в точной постановке исследовано вихревое течение, индуцируемое вращательными тангенциальными напряжениями на свободной поверхности вязкой жидкости. При расчете апвеллинга, вызываемого ураганом вне области максимальных ветров, получаются реальные численные значения. Для выполнения расчетов привлечено два феноменологических параметра (c_1 и k).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1944. Т. 43. С. 299—301.
2. *Squire H. B.* The round laminar jet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951. V. 4. No. 3. P. 321—329.
3. *Гольдштик М. А.* Одно парадоксальное решение уравнений Навье — Стокса // ПММ. 1980. Т. 24. Вып. 4. С. 610—621.
4. *Serrin J.* The swirling vortex // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1972. V. 271. No. 1214. P. 325—360.
5. *Никулин В. В.* Взаимодействие линейного вихря со свободной поверхностью // Динамика неоднородной жидкости (Динамика сплошной среды). Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР. 1979. Вып. 42. С. 31—42.
6. *Yih C.-S.*, *Wu F.*, *Garg A. K.*, *Leibovich S.* Conical vortices: A class of exact solutions of Navier — Stokes equations // Phys. Fluids. 1982. V. 25. No. 12. P. 2147—2158.
7. *Сапронов Ю. Т.* О возможной структуре циркуляции приповерхностных вод океана, инициированной тропическим циклоном «Тайфун-75». Л.: Гидрометеоиздат. 1978. Т. 2. С. 60—78.
8. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1977. 438 с.
9. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1981. 366 с.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир. 1969. 1071 с.
11. *Shea D. J.*, *Gray W. M.* The hurricane's inner core region: Symmetric and asymmetric structure // J. Atmosph. Sci. 1973. V. 30. No. 8. P. 1544—1564.
12. *Hoecker W. H.* Wind speed and air flow patterns in the Dallas tornado of 2 April, 1957 // Mon. Weather Rev. 1960. V. 88. No. 5. P. 167—180.
13. *Никулин В. В.* Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами // ПМТФ. 1980. № 1. С. 66—75.
14. *Анисимова Е. П.*, *Белов Ю. Н.*, *Сперанская А. А.*, *Шандин В. С.* Модель атмосферного вихря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 7. С. 768—772.
15. *Rott N.*, *Lewellen W. S.* Boundary layer and their interaction in rotating flows // Progress in Aeronautical Sciences. N. Y.: Pergamon Press. 1966. V. 7. C. 111—114.
16. *Хаин А. П.* Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеоиздат. 1984. 247 с.
17. *Сутырин Г. Г.*, *Хаин А. П.*, *Агренич Е. А.* Взаимодействие пограничных слоев океана и атмосферы в тропическом циклоне // Метеорология и гидрология. 1979. № 2. С. 45—56.
18. *Тунеголовец В. П.* Трансформация поля температуры океана после прохождения тропического циклона (на примере Тайфуна Тэсс (1975)) // Метеорология и гидрология. 1976. № 12. С. 60—66.

Новосибирск

Поступила в редакцию
6.V.1987