

УДК 532.516

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В КАНАЛАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Барашков Н. М., Спиридонов Ф. Ф.

Рассматривается течение невязкой жидкости в плоском или осесимметричном полубесконечном канале, одна стенка которого проницаема, а через другую производится отсос или вдув жидкости с постоянной по длине стенки интенсивностью, причем сама стенка движется по заданному закону. Течение предполагается вихревым

Получено уравнение для функции тока и подобрана такая связь между законом движения стенки и интенсивностью вдува (отсоса), при котором это уравнение имеет автомодельное решение. Найдено приближенное представление для автомодельного решения и оценено вязкое сопротивление при движении с большими числами Рейнольдса. Обсуждается процедура построения приближенного решения при медленно движущейся стенке.

Было построено [1] приближенное решение задачи о стационарном течении в каналах с проницаемыми стенками, справедливое во всем диапазоне изменения характерного числа Рейнольдса R . Показано, что в силу специфики задачи (отсутствие скольжения на стенке) профили компонент вектора скорости меняются незначительно при изменении R . Ниже предложенным ранее методом [1] получены автомодельные решения нестационарных задач в предельном случае $R \rightarrow \infty$.

1. Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в плоском ($\nu = 0$) или осесимметричном цилиндрическом ($\nu = 1$) канале с полушириной a , изменяющейся во времени t по закону $a = a(t)$. Через стенку канала по нормали к ней осуществляется интенсивный вдув или отсос с неизменной вдоль проницаемой стенки скоростью $q = q(t)$, такой, что характерное число Рейнольдса $R = |\rho q a / \mu| \rightarrow \infty$. Движение жидкости рассматривается в декартовой или цилиндрической системах координат (z, y) , где ось z совпадает с плоскостью (осью) симметрии течения, а y ей ортогональна.

Течение описывается следующей системой уравнений:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} + y^{\nu} v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\omega}{y^{\nu}} \right) = 0, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

где ω — завихренность, w, v — компоненты вектора скорости вдоль осей z и y соответственно, связанные с функцией тока ψ соотношениями

$$(1.2) \quad w = \frac{1}{y^{\nu}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{1}{y^{\nu}} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Граничные и начальные условия

$$(1.3) \quad \begin{aligned} y = 0, \quad v = 0; \quad y = a, \quad v = q + da/dt, \quad w = 0 \\ z = 0, \quad \partial w / \partial z = 0 = \partial v / \partial z \\ t = 0, \quad a = a_0, \quad q = q_0 \end{aligned}$$

Введем безразмерные переменные

$$z^{\circ} = z/a, \quad y^{\circ} = y/a, \quad w^{\circ} = w/q, \quad v^{\circ} = v/q$$

Тогда вместо уравнения (1.1) имеем

$$(1.4) \quad - \omega^{\circ} \frac{\partial}{\partial t} \frac{a}{q} + w^{\circ} \frac{\partial \omega^{\circ}}{\partial z^{\circ}} + y^{\circ \nu} v^{\circ} \frac{\partial}{\partial y^{\circ}} \frac{\omega^{\circ}}{y^{\circ \nu}} = 0$$

Будем искать автомодельные решения уравнения (1.4), что определяет необходимость выполнения соотношения

$$\partial (a/q)/\partial t = \alpha = \text{const}$$

накладывающего на законы изменения $a(t)$ и $q(t)$ связь следующего вида:

$$a(t) = q(t) (\alpha t + \beta)$$

Здесь β — постоянная, определяемая из начальных условий задачи.

Рассмотрим функцию тока вида

$$(1.5) \quad \psi^\circ = z^\circ F(\eta), \quad \eta = y^\circ{}^{1+\nu}$$

удовлетворяющую без потери общности граничным условиям (1.3).

Подстановка в (1.4) выражений для w° , v° и ω° , полученных при учете соотношения (1.5) по определяющим соотношениям типа (1.2), приводит к уравнению

$$(1.6) \quad (1 + \nu)^{-1} \alpha F'' - F'F'' + FF''' = 0$$

(штрих означает дифференцирование по переменной η).

Из граничных условий (1.3) можно получить следующие граничные условия для уравнения (1.6):

$$(1.7) \quad F(0) = F'(1) = 0, \quad F(1) = \pm(1 - \alpha)$$

В последнем выражении знак плюс соответствует отсосу жидкости из канала при $da/dt < 0$, минус — вдуву жидкости при $da/dt > 0$.

Перейдем в задаче (1.6), (1.7) к новой зависимой переменной $\varphi(\eta) = F(\eta)/F(1)$. Получим

$$(1.8) \quad \gamma \varphi'' - \varphi' \varphi'' + \varphi \varphi''' = 0, \quad \gamma = (1 + \nu)^{-1} \alpha / F(1)$$

$$(1.9) \quad \varphi(0) = \varphi'(1) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

2. Будем искать приближенное решение краевой задачи (1.8), (1.9) методом, предложенным в [1]. Поскольку искомое решение (из физических соображений) предполагается гладким, запишем его, учитывая условие симметрии осевой компоненты вектора скорости, в виде ряда

$$(2.1) \quad \varphi(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 + a_7(2\eta - 3\eta^3 + \eta^7) + \\ + a_9(3\eta - 4\eta^3 + \eta^9) + \dots$$

Выражение (2.1) удовлетворяет всем граничным условиям (1.9). Однако необходимы дополнительные условия для отыскания значений коэффициентов a_7 , a_9 , ...

Одно из таких условий

$$(2.2) \quad \varphi(1) \varphi'''(1) + \gamma \varphi''(1) = 0$$

получается непосредственно из (1.8), (1.9) при $\eta = 1$.

Второе условие получим интегрируя уравнение (1.8) на интервале изменения η :

$$(2.3) \quad [\varphi \varphi'' - \varphi'^2 + \gamma \varphi']_0^1 = 0$$

Можно получить еще ряд условий. Однако ограничимся условиями (2.2), (2.3), определяя лишь a_7 , a_9 в выражении (2.1). Подстановка этого выражения в условия (2.2) и (2.3) приводит к соотношениям

$$(2.4) \quad a_7 = C + Da_9, \quad E^2 a_9^2 - 2Ga_9 - H = 0 \\ C = \frac{1}{8}(1 + \gamma)/(8 + \gamma), \quad D = -2(10 + \gamma)/(8 + \gamma) \\ E = -2(16 + \gamma)/(8 + \gamma), \quad G = 2(2176 + 408\gamma + 7\gamma^2 - \\ - \gamma^3)/(8 + \gamma)^2 \\ H = \frac{1}{64}(16895 + 33342\gamma + 7487\gamma^2 + 448\gamma^3)/(8 + \gamma)^2$$

На наиболее интересном для практических приложений интервале $0 \leq \gamma \leq 1$ справедливо соотношение $4G^2 \gg |E^2H|$, поэтому хорошей аппроксимацией наименьшего из корней второго уравнения (2.4) будет выражение

$$(2.5) \quad a_9 = -\frac{H}{2G} \left(1 - \frac{E^2H}{4G^2}\right)$$

Таким образом, соотношение (2.1), первое соотношение (2.4) и (2.5) определяют искомое решение задачи. Аналогичный анализ можно провести и при конечных значениях числа Рейнольдса.

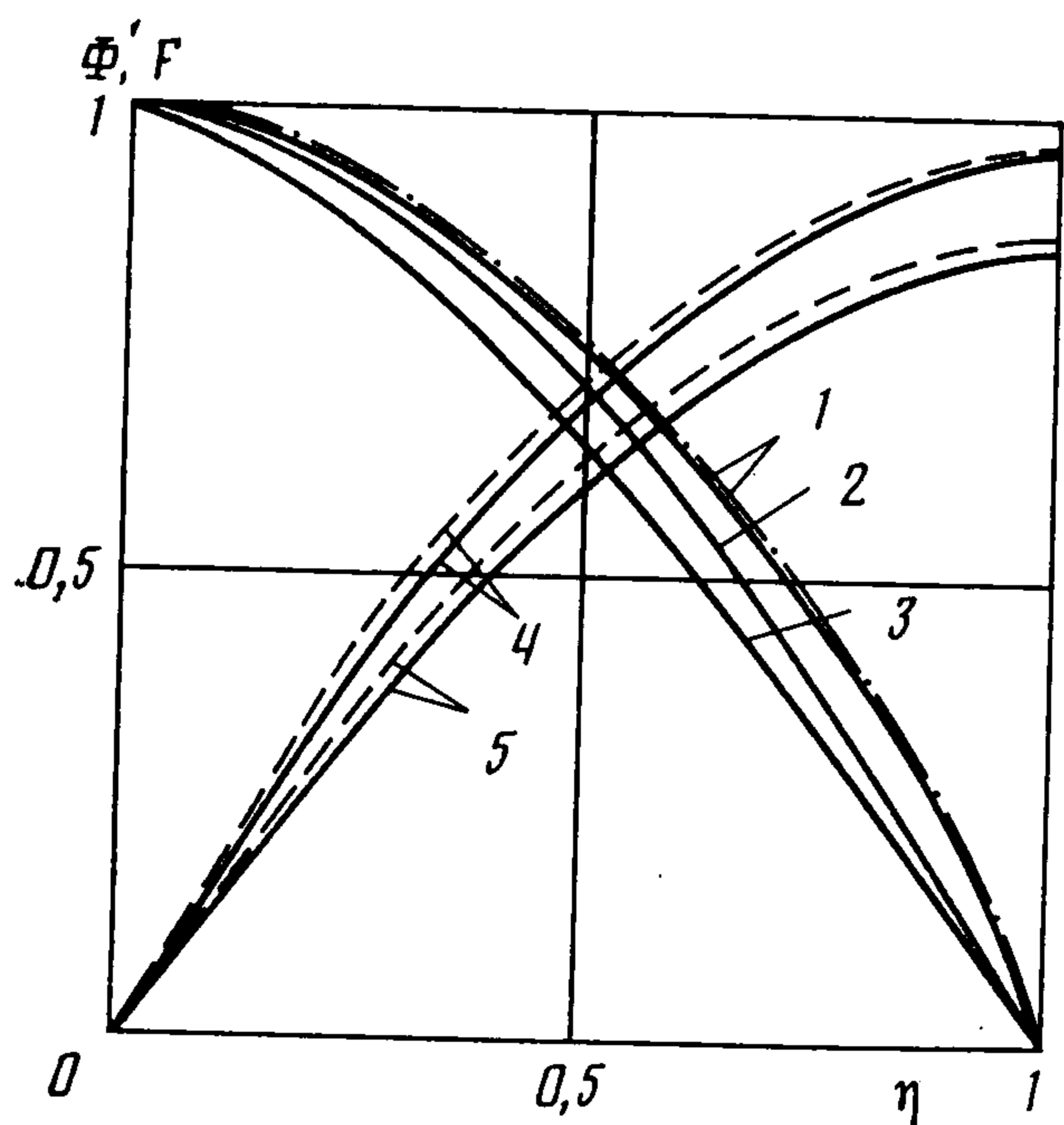
3. Сравним полученное приближенное решение при $\gamma = 0$ с точным предельным решением ($R \rightarrow \infty$)

$$(3.1) \quad \varphi(\eta) = \sin^{1/2} \pi \eta$$

Коэффициенты в приближенном решении (2.1) в этом случае имеют вид

$$(3.2) \quad a_7 = 0,05415, \quad a_9 = -0,01541$$

Первые производные выражений (3.1) и (2.1), (3.2) определяют соответствующие профили продольной компоненты вектора скорости в канале.



На фигуре представлены эти зависимости (штрихпунктирная и сплошная линии 1), а также аналогичные зависимости при значениях $\gamma = 0,5$ (кривая 2) и $\gamma = 1,0$ (кривая 3), $\Phi' = \varphi'/\varphi'(0)$. Видно, что при изменении параметра γ в широком диапазоне профиль скорости в канале меняется незначительно и мало отличается от стационарного.

Благодаря специфике задачи (отсутствие касательной компоненты вектора скорости на проницаемой стенке при любом значении числа Рейнольдса R), а также тому, что, как следует из результатов [1], при $\gamma = 0$ и $R \geq 100$ коэффициент трения на стенке

$$c_f = 2\tau_w/(\rho w_m^2), \quad \tau_w = \mu (\partial w/\partial y)_w$$

мало отличается от своего предельного значения при $R \rightarrow \infty$, в данном случае имеется возможность анализа изменения предельного значения c_f в зависимости от изменения γ . Здесь τ_w — напряжение трения на проницаемой стенке, w_m — средняя по поперечному сечению канала продольная скорость.

Определяя относительный коэффициент трения как $c_{fr} = c_f/c_{f0}$, где нулевым индексом обозначено значение c_f при $\gamma = 0$, нетрудно показать, что $c_{fr} = \varphi''(1)/\varphi_0''(1)$. Зависимость $c_{fr} = c_{fr}(\gamma)$, рассчитанная с использованием полученного решения, практически линейна: $c_{fr} = 1 - 0,32\gamma$. Предельное значение коэффициента трения изменяется более чем в 1,5 раза при изменении γ от нуля до единицы.

4. В заключение следует отметить, что при $\alpha = 0$ (1) можно получить простое приближенное решение краевой задачи (1.6), (1.7), воспользовавшись тем, что хотя малый параметр α и входит в граничные условия, но в уравнении он не является коэффициентом при старшей производной. Следовательно, решение должно вести себя регулярным образом при предельном переходе $\alpha \rightarrow 0$. Решение указанной задачи,

удовлетворяющее граничным условиям, можно искать в виде

$$(4.1) \quad F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin \frac{\pi}{2} (2k+1) \eta$$

Ограничиваясь в (4.1) первым членом ряда, подставляя функцию $F(\eta) = c_0 \sin \frac{1}{2}\pi\eta$ в уравнение (1.6) и применяя коллокацию в точке $\eta = 0$, формально удовлетворим этому уравнению. Из условия $F(1) = \pm(1 - \alpha)$ следует $c_0 = \pm(1 - \alpha)$. Таким образом, приближенное решение задачи при малых α имеет вид

$$(4.2) \quad F(\eta) = \pm(1 - \alpha) \sin \frac{1}{2}\pi\eta$$

При $\alpha = 0$ это решение тождественно совпадает с решением (3.1). Можно убедиться, что модуль невязки δ в уравнении (1.6) не превышает $\pi^2\alpha(1 + \nu)^{-1/4}$, т. е. при значении $\alpha = 0,01$ величина δ не превышает трех процентов. Для сравнения на фигуре показаны решения (2.1) и (4.2) сплошными и штриховыми линиями соответственно при значениях параметра $\alpha = 0,05$ (кривые 4) и $\alpha = 0,15$ (кривые 5). Видно, что решения различаются незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morduchow M.* On laminar flow through a channel or tube with injection: application of method of averages // *Quart. Appl. Math.* 1956. V. 14. No. 4. P. 361—368.

Бийск

Поступила в редакцию
21.VIII.1986