

УДК 532.516

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА
ПРИ ПОМОЩИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ НАВЬЕ — СТОКСА**

Баутин С. П.

В виде специальных рядов строятся решения полной системы Навье—Стокса для вязкой теплопроводной сжимаемой сплошной среды. Нулевое слагаемое ряда передает какое-либо точное решение исходной системы (например, все параметры среды — постоянные). Последующие слагаемые ряда рекуррентно определяются при решении линейризованной системы Навье — Стокса — однородной для первого слагаемого и неоднородной для всех остальных. Полученные представления используются для приближенного решения некоторых начально-краевых задач: рассмотрен процесс стабилизации одномерного течения между двумя неподвижными стенками при заданном на них постоянном тепловом потоке, построен аналог течения Пуазейля.

1. Рассматривается система уравнений Навье — Стокса [1]

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \\
 & \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \left\| \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|^T \right) + \operatorname{Eu}_1 c_1^2 \nabla \rho + \operatorname{Eu}_2 b_1 \nabla T = \\
 & = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[(\operatorname{div} \mathbf{V}) \left(\nabla \mu' - \frac{2}{3} \nabla \mu \right) + \nabla \mu \left(\left\| \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right\| + \left\| \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|^T \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V} \right] \\
 & \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) + \operatorname{Eu}_2 \theta_1 b_1 T \operatorname{div} \mathbf{V} = \\
 & = \frac{1}{\operatorname{Pr}_1 \operatorname{Re}} (\kappa \Delta T + \nabla \kappa \cdot \nabla T) + \frac{\theta_1}{\operatorname{Re}} \left\{ \mu' (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{3} \mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} \\
 & \operatorname{Eu}_1 = \frac{c_1^{*2}}{u_0^2}, \quad \operatorname{Eu}_2 = \frac{b_1^* T_0}{\rho_0 u_0^2}, \quad \operatorname{Re} = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu^*} \\
 & \theta_1 = \frac{u_0^2}{c_v^* T_0}, \quad \operatorname{Pr}_1 = \frac{\mu^* c_v^*}{\kappa^*}
 \end{aligned}$$

являющаяся дифференциальной формой законов сохранения массы, импульса и энергии для течений вязкой теплопроводной сжимаемой сплошной среды. Здесь t — время, x_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — пространственные координаты, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, ρ — плотность, v_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — декартовы проекции вектора \mathbf{V} скорости среды, T — температура, μ, μ' — коэффициенты динамической и объемной вязкости (первый и второй коэффициенты вязкости), κ — коэффициент теплопроводности, $\| \partial v_\alpha / \partial x_\beta \|$ — матрица Якоби, $\| \partial v_\alpha / \partial x_\beta \|^T$ — транспонированная матрица Якоби, $\Delta, \operatorname{div}, \nabla$ — обозначения операторов Лапласа, дивергенции и градиента; точкой обозначено скалярное произведение; векторы рассматриваются как векторы-строки, и произведение вектора на матрицу вычисляется по обычному правилу умножения матриц.

При выводе системы (1.1) предполагалось, что внешние массовые силы и внешние тепловые источники или стоки отсутствуют; в качестве независимых термодинамических параметров выбраны ρ , T ; уравнения состояния, коэффициенты вязкости и теплопроводности считаются заданными функциями

$$(1.2) \quad \mu = \mu(\rho, T), \quad \mu' = \mu'(\rho, T), \quad \kappa = \kappa(\rho, T)$$

$$(1.3) \quad p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T)$$

где p — давление, e — внутренняя энергия. Тогда

$$c_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b_1 = \frac{\partial p}{\partial T}, \quad c_v = \frac{\partial e}{\partial T}, \quad p - \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} = b_1 T$$

В системе (1.1) при помощи положительных постоянных L , ρ_0 , u_0 , T_0 стандартным образом сделан переход к безразмерным переменным, звездочкой помечены размерные значения функций при $\rho = \rho_0$, $T = T_0$. Поскольку решения системы (1.1) будут строиться в виде ряда, то функции (1.2), (1.3) предполагаются аналитическими в окрестности точки ($\rho = 1$, $T = 1$) и положительными в самой этой точке.

В случае термодинамически совершенного газа с уравнениями состояния

$$(1.4) \quad p = R\rho T, \quad e = c_{v0}T, \quad R, c_{v0} = \text{const} > 0$$

$Eu_1 = Eu_2 = 1/(\gamma M^2)$, $M^2 = u_0^2/(RT_0\gamma)$ — квадрат числа Маха; $\gamma = 1 + R/c_{v0} > 1$ — показатель адиабаты газа; $\theta_1 = \gamma(\gamma - 1)M^2$; $Pr_1 = Pr/\gamma$, $Pr = c_{v0}\mu^*\gamma/\kappa^*$ — число Прандтля. Если при помощи заданных ρ_0 , T_0 в качестве масштаба скорости выбрать $u_0 = [c_1^{*2} + b_1^{*2}T_0/(\rho_0^2 c_v^*)]^{1/2}$, то $Eu_1 + Eu_2^2\theta_1 = 1$. Для термодинамически совершенного газа это соответствует тому, что за масштаб скорости выбрана скорость звука $u_0 = (RT_0\gamma)^{1/2}$, и тогда $M = 1$.

В данной работе решения системы (1.1) строятся в виде рядов

$$(1.5) \quad U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t, \mathbf{x}) \varepsilon^k, \quad U = \{\rho, v_1, v_2, v_3, T\}$$

по степеням новой независимой переменной ε , которая априори не несет конкретного физического смысла. Вектор U представим в виде (1.5), если U_0 — какое-либо точное решение системы (1.1), например передающее однородную покоящуюся среду.

Для того чтобы получить систему уравнений для компонент вектора U_k ($k \geq 1$), предполагается, что U дополнительно зависит от ε , система (1.1) дифференцируется k раз по ε и ε берется равным нулю. В результате для компонент вектора U_k получается линейная система уравнений в частных производных с одинаковой главной частью при всех $k \geq 1$, однородная при $k = 1$ и неоднородная при $k \geq 2$. Коэффициенты главной части системы зависят от U_0 , неоднородности при $k \geq 2$ — многочлены от компонент векторов U_l , $0 \leq l \leq k - 1$ и от их производных по t , x_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Задание начальных и однотипных краевых условий для U_k однозначно порождает для системы (1.1) соответствующие, дополнительно зависящие от ε условия и наоборот. Система для U_1 совпадает с системой, получаемой при линеаризации исходной системы (1.1) на заданном решении U_0 [2]. Поэтому на ряд (1.5) можно смотреть как на решение, найденное в результате линеаризации полной системы Навье—Стокса с последующим построением всех высших приближений. Сходимость ряда

(1.5) необходимо устанавливать при рассмотрении конкретных начально-краевых задач.

Основная цель данной работы — эффективное построение коэффициентов ряда (1.5), с тем чтобы конечные отрезки ряда использовать для приближенного решения некоторых задач. Поэтому обоснование сходимости ряда дается в наиболее простой ситуации, когда возможно сведение этого обоснования к аналогу теоремы Коши—Ковалевской.

Пусть начальные слагаемые ряда U_k при $0 \leq k \leq k_0$ построены как решения соответствующих систем в виде аналитических в окрестности точки $(t = 0, x = x^0)$ функций и удовлетворяют при этом традиционным для системы Навье — Стокса [3] начально-краевым условиям. Построение остальных коэффициентов ряда — U_k при $k \geq k_0 + 1$ — осуществляется при решении задач Коши для соответствующих систем уравнений с аналитическими данными $U_k|_{\varphi=0}$, $Z_{k\varphi}|_{\varphi=0}$ на поверхности $\varphi = 0$. Здесь $Z = \{V, T\}$.

Предполагается, что относительно поверхности $\varphi = 0$ дифференциальные системы для U_k имеют тип Ковалевской, т. е. U_k однозначно определяются в виде аналитических функций, и ряды по степеням ε , составленные из заданных значений $U_k|_{\varphi=0}$, $Z_{k\varphi}|_{\varphi=0}$, сходятся при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Последнее предположение будет выполняться, если, например, данные на поверхности $\varphi = 0$ для U_k , $k \geq k_0 + 1$ брать нулевые. Это эквивалентно тому, что в качестве данных на поверхности $\varphi = 0$ для U и Z берутся конечные суммы

$$U|_{\varphi=0} = \left[\sum_{k=0}^{k_0} U_k(t, x) \varepsilon^k \right] |_{\varphi=0}$$

$$Z_{\varphi}|_{\varphi=0} = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{k=0}^{k_0} Z_k(t, x) \varepsilon^k \right] |_{\varphi=0}$$

Поверхность $\varphi = 0$ можно взять в виде $\varphi = x_1 - x_1(t, x_2, x_3)$ при условии, что $x_1^0 = x_1(0, x_2^0, x_3^0)$ и $\varphi = 0$ с заданными на ней значениями U , Z_{φ} не является контактной поверхностью.

При выполнении перечисленных условий ряд (1.5) сходится в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = x^0, \varepsilon = 0)$.

Доказательство сформулированного утверждения здесь не приводится, так как оно — частный случай доказанной в [4] теоремы: в системе (1.1) отсутствуют производные $\partial U / \partial \varepsilon$, поэтому поверхность $\varepsilon = 0$ формально есть характеристика. Условие того, что U_0 — какое-либо точное решение системы (1.1), совпадает с необходимым условием разрешимости соответствующей характеристической задачи Коши. Поверхность $\varphi = 0$ — это та поверхность, на которой ставятся дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения характеристической задачи Коши. Теорема из [4] обеспечивает локальную сходимость ряда (1.5). С уменьшением $|\varepsilon|$ область сходимости в пространстве (t, x) увеличивается и «дотягивается» до точек, в которых имеются особенности у функций U_k ($0 \leq k \leq k_0$), φ и компонент матрицы $S^{-1}|_{\varphi=0}$. Здесь $S = S(t, x)|_{\varphi=0}$ — матрица перед старшими по φ производными от U_k в соответствующих дифференциальных системах.

Величина ε характеризует отличие решения U от U_0 , однако U может удовлетворять другим, по сравнению с U_0 , краевым условиям. Сформулированное утверждение устанавливает связь между процедурой линеаризации с последующим построением высших приближений и процедурой построения решений гиперболических систем в виде характеристических рядов [4, 5]. При построении U_k ($k \geq k_0 + 1$) предложенным выше способом ряд (1.5) будет точно передавать локальное решение задачи Коши с данными на $\varphi = 0$, а решение традиционно поставленной для системы Навье — Стокса начально-краевой задачи ряд (1.5) будет передавать приближенно. Возможно,

что более тонкие оценки и учет конкретных начальных и краевых условий (как, например, в [3, 6]) уточнят область применимости представления (1.5). Однако еще раз подчеркнем основную цель данной работы — показать, что в некоторых ситуациях конструктивно определяются коэффициенты рядов, задающих точные решения системы (1.1). Конечные отрезки этих рядов используются для приближенного решения некоторых начально-краевых задач.

2. Далее берется решение $U_0 = \{1, 0, 0, 0, 1\}$, передающее однородную покоящуюся среду. Тогда при любых аналитических функциях (1.2), (1.3) для U_k ($k \geq 1$) получаются линейные системы с постоянными коэффициентами

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} V_k &= F_k \\ \frac{\partial V_k}{\partial t} + Eu_1 \nabla \rho_k + Eu_2 \nabla T_k - \\ - \frac{1}{\operatorname{Re}} \left\{ \left[\mu' (1, 1) + \frac{1}{3} \right] \nabla (\operatorname{div} V_k) + \Delta V_k \right\} &= G_k \\ \frac{\partial T_k}{\partial t} + Eu_2 \theta_1 \operatorname{div} V_k - \frac{1}{\operatorname{Pr}_1 \operatorname{Re}} \Delta T_k &= H_k \end{aligned}$$

При $k = 1$ величины F_k, G_k, H_k — нули. При $k \geq 2$

$$F_k = - \sum_{l=1}^{k-1} [V_l \cdot \nabla \rho_{k-l} + \rho_l \operatorname{div} V_{k-l}]$$

Величины G_k, H_k также являются многочленами от компонент векторов U_l $0 \leq l \leq k - 1$ и их производных (из-за громоздкости конкретный вид G_k, H_k не приводится).

Систему (2.1) можно преобразовать следующим образом: ввести новые неизвестные функции $P = Eu_1 \rho_k + Eu_2 T_k$, $W = c_0 \operatorname{div} V_k$, $c_0 = (Eu_1 + Eu_2^2 \theta_1)^{1/2}$, изменить масштаб времени $t' = c_0 t$ (штрих в дальнейшем опускается), каждое из уравнений движения в системе (2.1) продифференцировать по соответствующему x_α и полученные выражения сложить, продифференцировать по t первое и последнее уравнения из (2.1) и взять их линейную комбинацию. В результате получится система

$$(2.2) \quad \begin{aligned} W_t = \mu_0 \Delta W - \Delta P + g_k, \quad P_{tt} = \Delta P + \kappa_0 \Delta P_t + \\ + (\kappa_0 a - \mu_0) \Delta W + h_k \\ \mu_0 = \frac{(\mu' + 4/3)}{c_0 \operatorname{Re}}, \quad \kappa_0 = \frac{1}{c_0 \operatorname{Re} \operatorname{Pr}_1}, \quad a = \frac{Eu_1}{c_0^2}, \quad 0 \leq a \leq 1 \end{aligned}$$

где слагаемые g_k и h_k однозначно определяются по правым частям системы (2.1), а постоянная a характеризует сжимаемость среды. В случае совершенного газа $c_0 = 1/M$, $a = 1/\gamma$. Начальные условия при $t = 0$ для U_k однозначно порождают начальные условия для W, P . Если известно решение системы (2.2), то ρ_k находится интегрированием по t известного выражения, а V_k, T_k определяются из соответствующих линейных уравнений теплопроводности.

В частном случае $\mu_0 = a\kappa_0$ (для уравнений состояния (1.4) это равносильно тому, что $\operatorname{Pr} = 0,75$) второе уравнение системы (2.2) имеет вид

$$(2.3) \quad P_{tt} = \Delta P + \kappa_0 \Delta P_t + h_k$$

после решения которого из неоднородного уравнения теплопроводности определяется W . В случае $Eu_2 = 0$ из первых четырех уравнений системы (2.1) для W также получается уравнение вида (2.3).

Однородную систему (2.2) можно назвать «линейной системой вязких течений», а ее частный случай — однородное уравнение (2.3) — «линей-

ным уравнением вязких течений», поскольку они, в частности, описывают процессы распространения малых возмущений в однородной вязкой теплопроводной сжимаемой сплошной среде.

В работе [7] в интегральной форме выписано общее решение задачи Коши и некоторых краевых задач для однородного уравнения (2.3) и исследованы свойства этого решения при больших t и малых κ_0 . Ниже используется то, что однородная система (2.2) допускает разделение переменных: $W = W(t) X(x)$, $P = P(t) X(x)$, $\Delta X = -n^2 X$, n — целое положительное число. В частности, за X можно брать гармоники от одной пространственной переменной, тогда n — частота гармоники, $W(t)$ и $P(t)$ — амплитуды. Корни характеристического уравнения у системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $W(t)$, $P(t)$ — корни уравнения

$$(2.4) \quad v^3 + n^2(\kappa_0 + \mu_0)v^2 + n^2(1 + n^2\kappa_0\mu_0)v + n^4\kappa_0a = 0$$

При $\mu_0 = a\kappa_0$ имеем $v_{n1} = -\mu_0 n^2$ и

$$(2.5) \quad v_{n2,3} = -n^2(\kappa_0/2 \pm \sqrt{\kappa_0^2/4 - 1/n^2})$$

При $a = 0$ имеем $v_{n1} = 0$, а $v_{n2,3}$ задаются формулой (2.5), в которой κ_0 надо заменить в первом слагаемом на $(\kappa_0 + \mu_0)$, в подкоренном выражении — на $(\kappa_0 - \mu_0)$. При $a = 1$ $v_{n1} = -n^2\kappa_0$, $v_{n2,3}$ задаются формулой (2.5), в которой κ_0 надо заменить на μ_0 . При $0 < a < 1$ среди корней уравнения (2.4) нет чисто мнимых чисел; $-n^2(\kappa_0 + \mu_0) < v_{n1} < 0$; если $v_{n2,3}$ действительны, то $v_{n1} < v_{n2,3} < 0$; если $v_{n2,3}$ комплексные, то их действительные части отрицательны.

В общем случае значения корней выписываются при помощи формул

$$\begin{aligned} v_{n1} &= A_+ + A_- - A_0, \quad v_{n2,3} = -(A_+ + A_-)/2 + A_0 \pm \\ &\pm (A_+ - A_-) \sqrt{3i}/2, \quad i = \sqrt{-1} \\ A_{\pm} &= (-q_2/2 \pm \sqrt{Q})^{1/3}, \quad A_+A_- = -q_1/3, \quad A_0 = n^2(\kappa_0 + \mu_0)/3 \\ Q &= (q_1/3)^3 + (q_2/2)^2, \quad q_1 = -n^4(\kappa_0 + \mu_0)^2/3 + n^2(1 + n^2\kappa_0\mu_0) \\ q_2 &= 2n^6(\kappa_0 + \mu_0)^3/27 - n^4(\kappa_0 + \mu_0)(1 + n^2\kappa_0\mu_0)/3 + n^4\kappa_0a \end{aligned}$$

Если $Q \leq 0$, то $v_{n2,3}$ действительны и при $Q < 0$ различны, а при $Q = 0$ $v_{n2} = v_{n3}$. Если $Q > 0$, то $v_{n2,3}$ комплексно сопряженные. Анализ выражения для Q показывает, что $\kappa_0 \neq \mu_0$, начиная с некоторого n , $Q < 0$. Если $\kappa_0 = \mu_0$ (т. е. $\text{Pr}_1 = 1/(\mu' + 4/3)$), то при $0 < a < 8/9$ $Q > 0$ для всех n ; при $a = 8/9$ $Q = 0$ для $n = \sqrt{3}/\kappa_0$ и $Q > 0$ при других n ; при $8/9 < a < 1$ $Q < 0$ для n , удовлетворяющих неравенствам $\sqrt{d_-}/\kappa_0 < n < \sqrt{d_+}/\kappa_0$, $Q = 0$ для $n = \sqrt{d_{\pm}}/\kappa_0$ и $Q > 0$ для других n . Здесь

$$\begin{aligned} d_{\pm} &= \left\{ \left[1 - \frac{27}{4} \left(a - \frac{2}{3} \right)^2 \right] \pm \left(\left[1 - \frac{27}{4} \left(a - \frac{2}{3} \right)^2 \right]^2 - \right. \right. \\ &\left. \left. - 4(1-a) \right)^{1/2} \right\} [2(1-a)]^{-1} > 0 \end{aligned}$$

Полученные путем разделения переменных как частные решения однородной системы (2.2) значения U_1 можно использовать при исследовании развития малых разномасштабных возмущений в однородных потоках вязкой среды для различных значений μ_0 , κ_0 , a . В частности, при $\mu_0 = a\kappa_0$ из (2.5) следует, что для малых κ_0 ($0 < \kappa_0 < 2$) у первых гармоник ($1 \leq n < 2/\kappa_0$) амплитуда, убывая, осциллирует, и с помощью линейной комбинации низкочастотных гармоник в качестве решения однородной системы (2.2) получается затухающая бегущая волна. Скорость распространения волны равна $\sqrt{1 - n^2\kappa_0^2/4}$, амплитуда волны долго ($t < 2/(\kappa_0 n^2)$)

не затухает. При больших значениях κ_0 высокочастотные гармоники стоят на месте и долго ($t < \kappa_0$) не затухают ($|P(t)| > |P(0)|/3$). При $\kappa_0 = \mu_0$, начиная с определенного номера, все высокочастотные гармоники, затухая, осциллируют, и с их помощью в качестве решений однородной системы (2.2) можно построить соответствующие затухающие бегущие волны.

Возможность разделения переменных для однородной системы (2.2) позволяет эффективно строить коэффициенты ряда (1.5).

В качестве иллюстрации рассмотрим одномерные ($\partial/\partial x_2 = \partial/\partial x_3 = v_2 = v_3 = 0$) нестационарные течения совершенного газа между двумя непроницаемыми стенками $x_1 = 0$ и $x_1 = \pi$ с заданным постоянным тепловым потоком на них

$$\partial T/\partial x_1 |_{x_1=0, x_1=\pi} = A\varepsilon, \quad A = \text{const}$$

при постоянных значениях

$$(2.6) \quad \mu' = 0, \quad \mu = \mu_0 = 4/(3 \text{Re}), \quad \kappa = \kappa_0 = \gamma/(\text{Pr Re})$$

В случае $A = 0$ конечный отрезок ряда (1.5) приближенно описывает процесс стабилизации течения с заданными в момент $t = 0$ распределениями газодинамических параметров к состоянию однородного покоя при $t \rightarrow +\infty$. В этом случае ε определяет отличие начального и предельного течений.

В случае $A \neq 0$ рассматривается процесс перехода газа из состояния однородного покоя при $t = 0$ в состояние покоя с постоянным градиентом температуры $\partial T/\partial x_1 = A\varepsilon$. Этот переход вызван приложенным на стенках $x_1 = 0$ и $x_1 = \pi$ при $t \geq 0$ постоянным тепловым потоком. В этом случае физический смысл и значение ε фактически определяется величиной этого теплового потока, т. е. значением константы $A\varepsilon$.

Для того чтобы построить приближенное решение такой задачи, в качестве U_1 берется сумма решений однородной системы (2.1):

стационарного решения

$$\rho_1 = -T_1, \quad v_{11} = 0, \quad T_1 = A\varepsilon x_1$$

и нестационарного решения вида

$$(2.7) \quad f_1(t, x_1) = \sum_{n=0}^N f_{1n}(t) \cos nx_1, \quad f = \rho, T$$

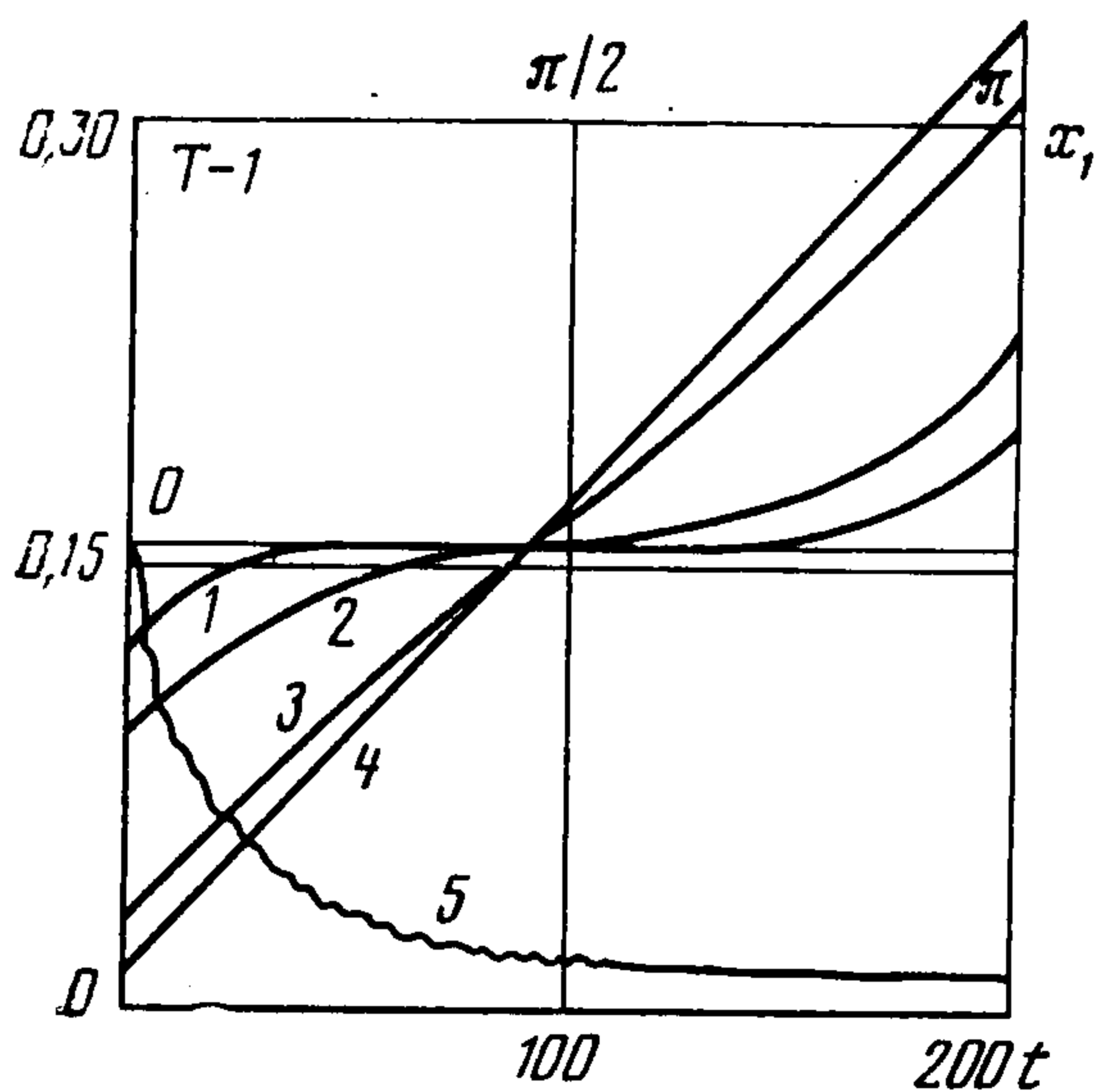
$$v_{11}(t, x_1) = \sum_{n=0}^N v_{11n}(t) \sin nx_1$$

Тогда для функций $f_{1n}(t)$, $v_{11n}(t)$ получается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Начальные условия для этой системы берутся такими, чтобы при $t = 0$ сумма стационарного и нестационарного решений приближенно передавала бы $U_1 = 0$: $\rho_{10}(0) = v_{11n}(0) = T_{10}(0) = 0$; $\rho_{1n}(0)$, $T_{1n}(0)$, $1 \leq n \leq N$ есть соответствующие коэффициенты Фурье при разложении функций $\pm A\varepsilon x_1$ в ряд по $\cos nx_1$.

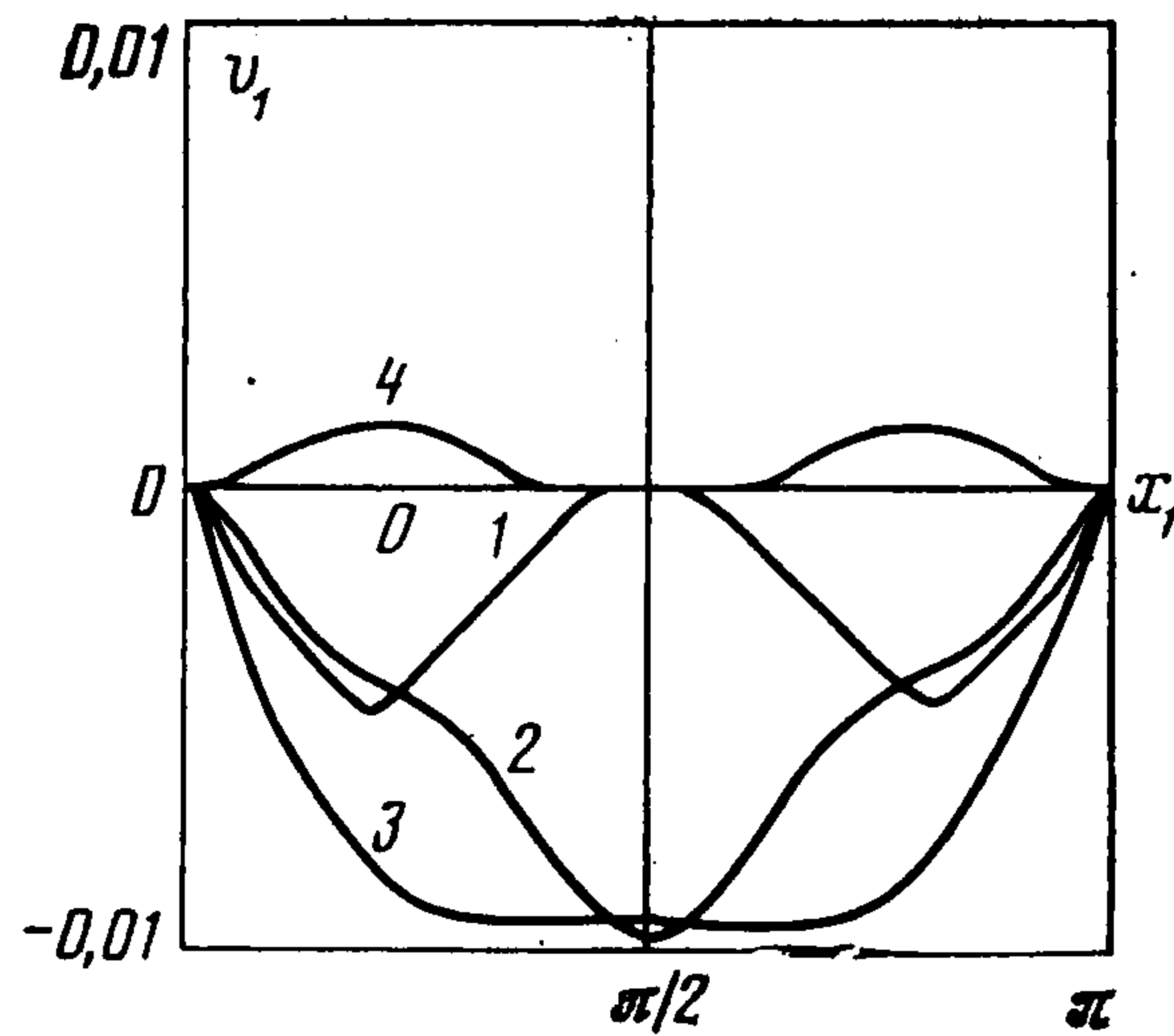
Если после построения f_1 и стационарную часть функций ρ_1 , T_1 приближенно заменить на соответствующие конечные отрезки рядов Фурье для $n \leq N$, то правые части системы (2.1) для U_2 оказываются конечными тригонометрическими суммами: по $\cos nx_1$ для F_2 , H_2 и по $\sin nx_1$ для G_2 , $n \leq 2N$. Коэффициенты этих сумм — известные функции от t . Поэтому f_2 и v_{12} тоже представляются в виде (2.7) со своими коэффициентами $f_{2n}(t)$, $v_{12n}(t)$, $n \leq 2N$. Эти функции находятся из неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями.

Можно показать, что для всех последующих коэффициентов U_k в этом случае также имеет место представление (2.7) для $n \leq kN$ и функции $f_{kn}(t)$ и $v_{1kn}(t)$ однозначно определяются как решения соответствующих дифференциальных систем с нулевыми начальными условиями. Значение U_1 и представление (2.7) при $k \geq 2$ обеспечивают решению (1.5) выполнение на стенках $x_1 = 0$ и $x_1 = \pi$ условий прилипания и постоянства теплового потока. В момент $t = 0$ решение (1.5) приближенно передает состояние однородного покоя.

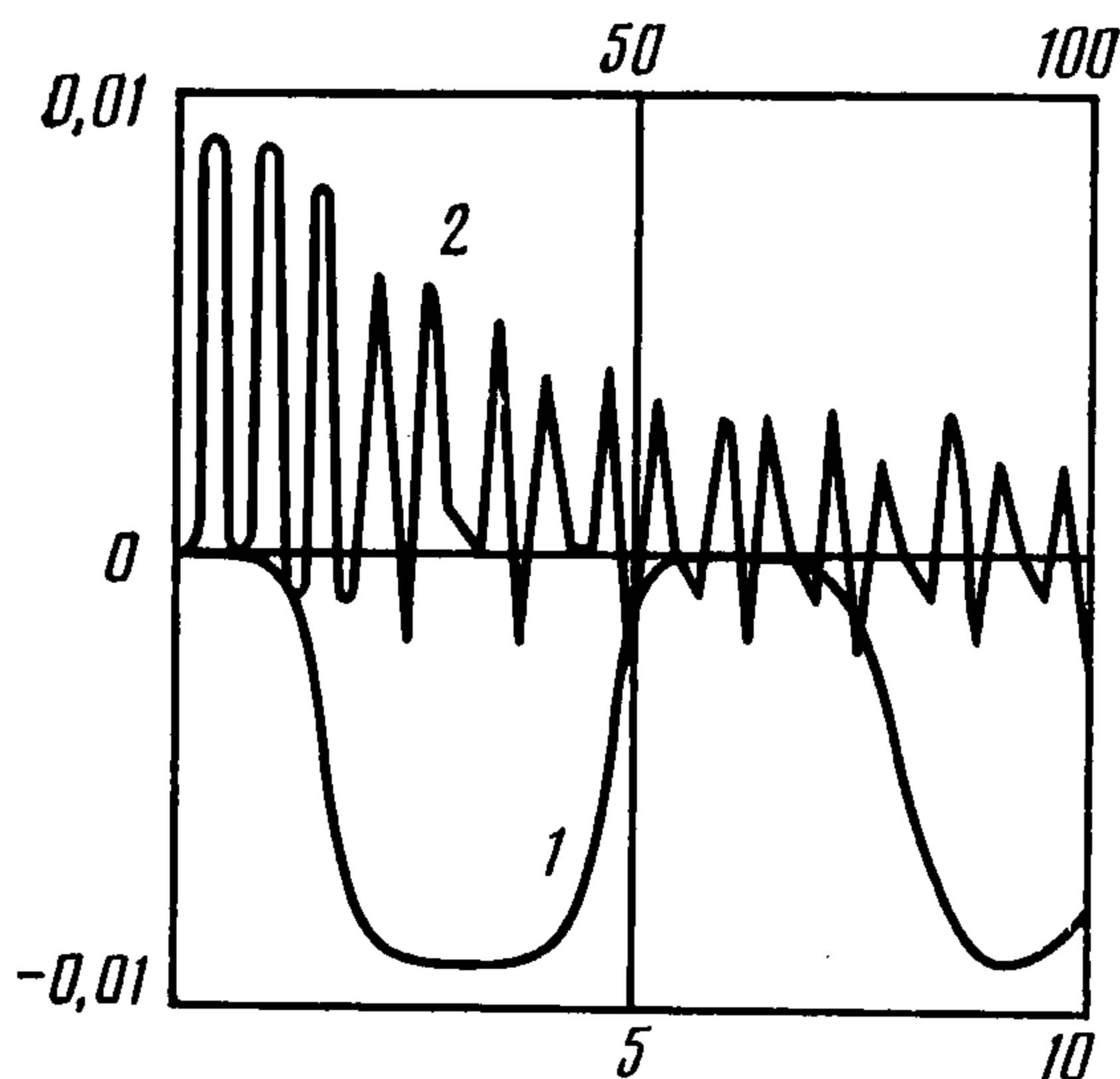
На фиг. 1—3 приведены результаты расчетов параметров течения газа в случае $\mu_0 = 10^{-3}$; $\kappa_0 = 0,05$; $\gamma = 1,4$; $A = 1$; $\varepsilon = 0,1$. В рассчитанных вариантах $k_0 = 5$, $N = 6$, т. е. учитывались слагаемые ряда (1.5) по ε^5 включительно и число гармоник



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

в U_k бралось $6k$. При $t \approx 200$ решение выходит на предельное стационарное состояние с $v_1 = 0$.

На фиг. 1 даны значения температуры. Линии 0 — 4 соответствуют моментам времени $t = 0; 2,5; 10; 50; 200$. По оси ординат откладывается $T - 1$, по оси абсцисс x_1 при $0 \leq x_1 \leq \pi$ для кривых 0 — 4; t при $0 \leq t \leq 200$ для кривой 5, передающей значение $(T - 1)|_{x_1=0}$. Переход из состояния однородного покоя в состояние покоя с ненулевым постоянным значением градиента температуры связан с перераспределением плотности на отрезке $0 \leq x_1 \leq \pi$ и, следовательно, сопровождается движением газа. Это движение газа носит колебательный характер. О начальной стадии этого процесса можно судить по фиг. 2, где приведены значения v_1 в моменты времени $t = 0, 1, 2, 3, 6$ (кривые 0 — 4).

На фиг. 3 показана зависимость от времени величины $u = v_1|_{x_1=\pi/2}$. Для кривой 1 по оси абсцисс откладывается t от 0 до 10, а по оси ординат откладывается u . Для линии 2 по оси ординат откладывается $-u$, а по оси абсцисс t от 0 до 100. Колебательность процесса установления сказывается, в частности, на характере установления значений температуры на стенках (см. кривую 5 на фиг. 1). Однако если в какие-то моменты времени значения $|v_1|$ относительно велики, то, как показывают расчеты, в эти моменты времени при всех $0 \leq x_1 \leq \pi$ значения v_1 одного знака. Поэтому монотонный характер зависимости T от x_1 сохранится во все моменты времени. При увеличении значений μ_0, κ_0 и уменьшении значения $A \epsilon$ динамика процесса установления проявляется слабее: $|v_1|$ становится меньше и при всех $t \geq 0$ $v_1 \leq 0$.

В рассмотренном примере оценка отброшенных слагаемых ряда не проводилась. Погрешность получаемого решения оценивалась приближенно по характеру убывания построенных слагаемых ряда, т. е. по поведению вычисляемых U_k с ростом k . В приведенных расчетах для коэффициентов при гармониках в U_k получилась оценка

$$\sum_{n=0}^{kN} |f_{kn}(t)| \leq M_k(t) A^k, \quad \sum_{n=1}^{kN} |v_{1kn}(t)| \leq M_k(t) A^k$$

где $M_k(t)$ — медленно меняющиеся функции и $M_k(t) \leq 2$. Таким образом, модули рассчитанных слагаемых ряда (1.5) в этом случае убывали не медленнее, чем соот-

ветствующие слагаемые геометрической прогрессии $\sum_{k=0}^{\infty} 2 (A\varepsilon)^k$. С уменьшением значений μ_0, ν_0 и с увеличением $A\varepsilon$ сходимость рядов для данного примера ухудшалась: с ростом времени слагаемые ряда (1.5) начинали быстро расти, причем последующие слагаемые становились больше предыдущих.

3. Далее рассматриваются стационарные течения. Для совершенного газа в случае постоянства функций (1.2) у системы (1.1) имеются точные решения: решение с линейным профилем скорости [8]; при специальных значениях показателя γ

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a_1, v_1 = v_2 = 0, T = a_2 x_1 + a_3, a_j = \text{const}, 1 \leq j \leq 3 \\ v_1 &= a_2 \text{Re } x_2^2 / (3 M^2) \text{ при } \gamma = 3/2 \\ v_1 &= a_2 \text{Re } (x_2^2 + x_3^2) / (8 M^2) \text{ при } \gamma = 2 \end{aligned}$$

Однако перечисленные «слоистые» течения не позволяют в отличие от течения Пуазейля в случае несжимаемой среды [1] удовлетворить условиям прилипания на двух неподвижных стенках при $x = \{x_1, x_2\}$ или на стенках трубы при $x = \{x_1, x_2, x_3\}$. Представление (1.5) дает возможность построить в случае сжимаемой среды при произвольных функциях (1.2), (1.3) аналог течения Пуазейля, поскольку у однородной системы (2.1) имеется решение

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0, V_1 = \{v_{11}(x_1, x_2), 0, 0\}, T_1 = Ax_1 \\ \Delta v_{11} &= A \text{Re } Eu_2 \end{aligned}$$

В качестве решения последнего уравнения можно взять параболу Пуазейля для двумерного случая $v_{11} = A \text{Re } Eu_2 x_2 (x_2 - h_0) / 2$ ($h_0 = \text{const}$) и в трехмерном случае $v_{11} = A \text{Re } Eu_2 (x_2^2 + x_3^2 - r_0^2) / 4$ ($r_0 = \text{const}$ — радиус трубы), а также другие функции, совпадающие с распределениями скоростей у вязкой несжимаемой среды в трубах с эллиптическими, прямоугольными и треугольными сечениями [1]. После определения U_1 следующие коэффициенты ряда (1.5) находятся из своих неоднородных систем (2.1). При этом U_k обладают таким функциональным произволом, который для V_k позволяет удовлетворить условиям прилипания на заданных поверхностях, а для T_k обеспечить заданную температуру или заданный тепловой поток.

Непосредственное построение U_k проведено в двумерном случае ($\partial/\partial x_3 = v_3 = 0$) для совершенного газа с уравнениями состояния (1.4), при постоянных значениях (2.6), за масштаб скорости выбрана скорость звука (т. е. $M = 1$) и в качестве U_1 взято

$$(3.1) \quad \rho_1 = 0, v_{11} = 2Ax_2(x_2 - h_0)/(3\gamma\mu_0), v_{21} = 0, T_1 = Ax_1$$

Тогда в системе уравнений для U_2, F_2 и G_2 — нули, а $H_2 = 2\mu_0 v_{11}' - Av_{11}$. В качестве решения этой системы берется

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \rho_{20} - T_2(x_2), v_{12} = v_{22} = 0 \\ T_2 &= T_2(x_2) = -\frac{A^2}{12\gamma\mu_0\nu_0} \left[\frac{4}{3} \left(\gamma - \frac{3}{2} \right) \left(x_2 - \frac{h_0}{2} \right)^4 + x_2^2 \right] + \\ &+ T_{21}x_2 + T_{20} \end{aligned}$$

Постоянные T_{20}, T_{21} можно выбирать как из условий $T_2|_{x_2=0} = 0, \partial T_2/\partial x_2|_{x_2=0} = 0$, так и из условий $T_2 = 0$ при $x_2 = 0$ и $x_2 = h_0$. В последнем случае

$$T_2(x_2) = -\frac{A^2}{12\gamma\mu_0\nu_0} x_2(x_2 - h_0) \left\{ \frac{4}{3} \left(\gamma - \frac{3}{2} \right) \left[\left(x_2 - \frac{h_0}{2} \right)^2 + \frac{h_0^2}{4} \right] + 1 \right\}$$

Постоянная ρ_{20} определяется позднее при удовлетворении для v_{24} нулевому условию при $x_2 = h_0$. При построении последующих U_k неоднородности в системе (2.1) будут нарастать, и чтобы избежать излишней громоздкости, далее указывается только последовательность определения компонент вектора U_k и приводятся окончательные формулы при $k \leq 5$. Из четвертого уравнения системы (2.1) определится T_k так, что при этом будут выполняться соотношения $T_k = 0$ при $x_2 = 0, x_2 = h_0$. Из первого уравнения системы (2.1) получается выражение для $\partial v_{2k}/\partial x_2$, которое дифференцируется по x_2 и подставляется в третье уравнение вместо $\partial^2 v_{2k}/\partial x_2^2$.

В результате первые три уравнения образуют систему, в которой старшими производными по x_2 являются $\partial \rho_k/\partial x_2, \partial^2 v_{1k}/\partial x_2^2, \partial v_{2k}/\partial x_2$. Функциональный произвол, появившийся при решении этой дифференциальной системы, позволяет удовлетворить условиям $v_{1k} = 0$ при $x_2 = 0$ и $x_2 = h_0, v_{2k} = 0$ при $x_2 = 0$. Для удовлетворения условия $v_{2k} = 0$ при $x_2 = h_0$ используется функциональный произвол из ρ_{k-2} , а произвол в ρ_k используется для удовлетворения условия $v_{2, k+2} = 0$ при $x_2 = h_0$. При учете вида U_k ($k \leq 5$) для решения системы (1.1) получается представление

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \rho &= 1 + \rho_2(x_2) \varepsilon^2 - Ax_1 \rho_2(x_2) \varepsilon^3 + [Ax_1^2 \rho_2(x_2) + \\ &+ (2A)^{-1} Q_3(x_2) + \gamma \mu_0 Q_1(x_2) - T_2(x_2) \rho_2(x_2) + \rho_{40}] \varepsilon^4 + \\ &+ [Ax_1 \rho_2(x_2) T_2(x_2) - 2A \gamma \mu_0 x_1 Q_1(x_2) - Ax_1 \rho_4(x_1, x_2) - \\ &- x_1 Q_3(x_2) + \rho_{50}] \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \\ v_1 &= \frac{2A}{3\gamma \mu_0} x_2 (x_2 - h_0) \varepsilon + \frac{x_0}{\gamma} \left[Q_3(x_2) - Q_3(h_0) \frac{x_2}{h_0} \right] \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \\ v_2 &= Q_2(x_2) \varepsilon^4 - 2Ax_1 Q_2(x_2) \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \\ T &= 1 + Ax_1 \varepsilon + T_2(x_2) \varepsilon^2 - (2A)^{-1} Q_3(x_2) \varepsilon^4 + \\ &+ x_1 Q_3(x_2) \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \\ \rho_{20} &= Ah_0^2 [8/3 (\gamma - 3/2) h_0^2 + 7]/(420\gamma \mu_0 x_0), \quad Q_1(x_2) = \\ &= Av_{11}(x_2) \rho_2(x_2) \\ Q_2(x_2) &= \int_0^{x_2} Q_1(x_2) dx_2, \quad Q_2(h_0) = 0, \quad Q_3(x_2) = -\frac{2A\gamma}{x_0} \int_0^{x_2} Q_2(x_2) dx_2 \end{aligned}$$

Решение (3.2) приводит к выражению для давления

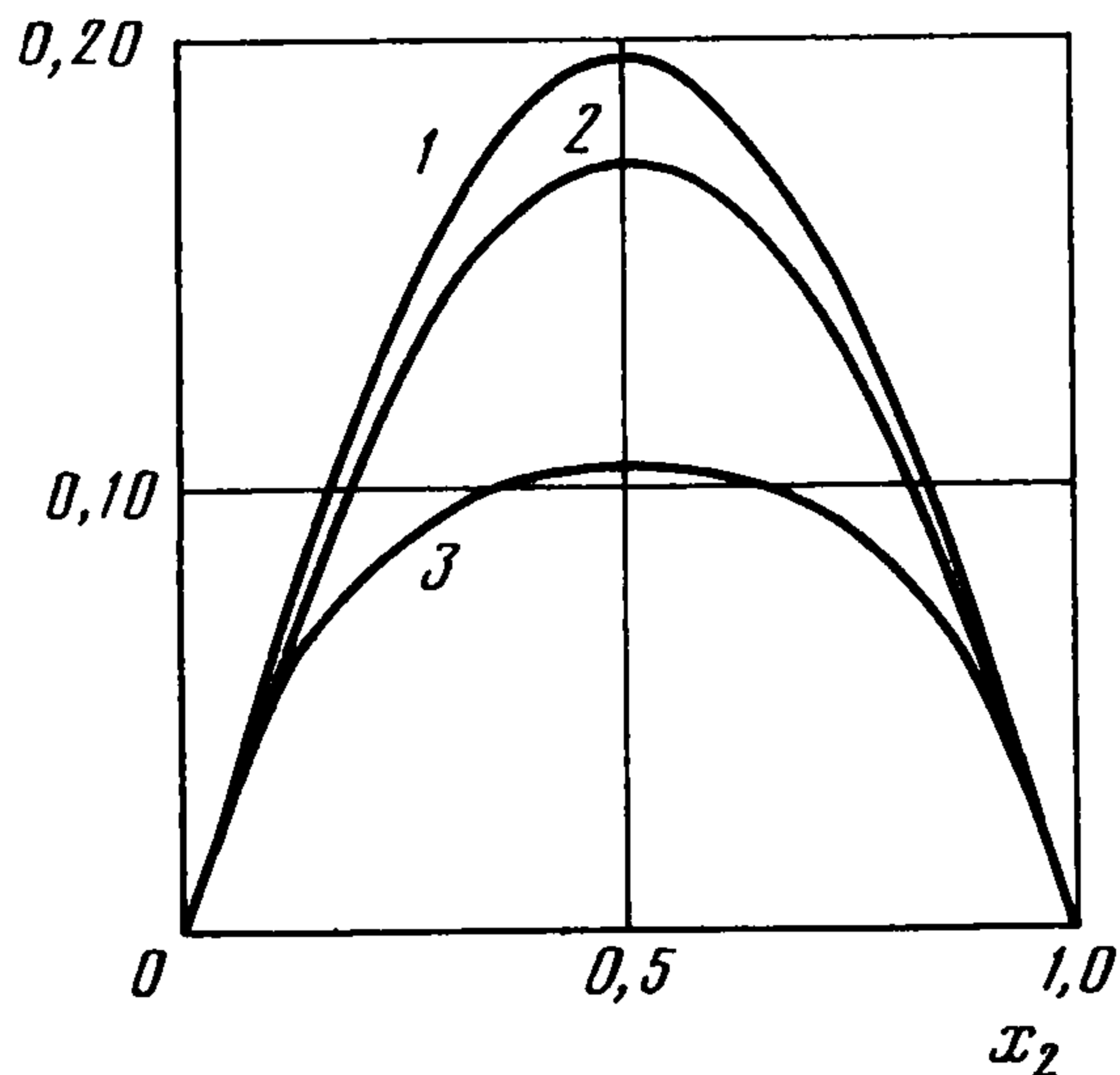
$$\begin{aligned} p &= \gamma^{-1} \{ 1 + Ax_1 \varepsilon + \rho_{20} \varepsilon^2 + [\rho_2(x_2) T_2(x_2) - 1/2 A^{-1} Q_3(x_2) - \\ &- A^2 x_1^2 \rho_2(x_2) + \rho_4(x_1, x_2)] \varepsilon^4 + [x_1 Q_3(x_2) - \\ &- Ax_1 \rho_2(x_2) T_2(x_2) + Ax_1 \rho_4(x_1, x_2) + \rho_5(x_1, x_2)] \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \} \end{aligned}$$

Физический смысл параметра ε задается величиной $A\varepsilon/\gamma$ — главной частью значения производной $\partial p/\partial x_1$, характеризующей перепад давления вниз по потоку.

Из (3.2) следует, что выписанные слагаемые рядов растут не быстрее, чем члены геометрической прогрессии. Если значения коэффициентов μ_0, x_0 одного порядка, то показатель этой геометрической прогрессии определяется выражением $A\varepsilon/(\gamma \mu_0)$. Оценивая таким образом начальные слагаемые рядов, можно сделать соответствующее предположение о точности полученного приближенного решения.

Формулы (3.2) дают, в частности, количественную оценку учета сжимаемости среды при малых перепадах давления вниз по потоку (при $A < 0$ движение потока слева направо). Анализ параметров течения оказывается наиболее простым, если в формулах (3.2) оставить слагаемые по ε^3 вклю-

чительно: давление имеет небольшой постоянный перепад вдоль оси Ox_1 , и это можно считать исходным условием рассматриваемого течения; скорость среды такая же, как в течении Пуазейля; поперек потока давление постоянно, а плотность и температура переменны.



Фиг. 4

На фиг. 4 приведена зависимость величины $\theta = 12\mu_0\kappa_0 T_2/A^2$ от x_2 при $h_0 = 1$. Линии 1—3 соответствуют значениям $\gamma = 1,1; 1,4; 7$. При $\gamma \rightarrow +\infty$ максимальное значение θ не стремится к нулю: $\max_{x_2}\theta \rightarrow 0,833$. Вдоль по потоку, т. е. при изменении x_1 , плотность и температура ведут себя по-разному: у плотности «амплитуда неоднородности» поперек потока ($\max_{x_2}\rho - \min_{x_2}\rho$) растет с ростом x_1 , а у температуры не меняется. Поскольку постоянная ρ_{20} выбрана так, чтобы $v_{24} = 0$ при $x_2 = h_0$, то $Q_2(h_0) = 0$. Поэтому $\int \rho v_1 dx_2$ — расход газа в сечении $x_1 = \text{const}$ с точностью по ε^3 включительно, задается интегралом $\int v_{11}(x_2) dx_2$ и аналогичен соответствующему выражению в случае несжимаемой среды [1] (интегрирование ведется в пределах от 0 до h_0).

Если рассмотреть трубу круглого сечения, то представление (1.5) в осесимметричном случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \rho &= 1 + (\rho_{20} - T_2)\varepsilon^2 + (\rho_{30} - Ax_1\rho_2)\varepsilon^3 + \\
 &+ \{\rho_{40} + \gamma\mu_0 A [v_{11}(r)\rho_2(r)]' - Ax_1\rho_3 - T_2\rho_2\}\varepsilon^4 + \\
 &+ \left[\rho_{50} + \gamma\mu_0 \left(\frac{\partial v_{15}}{\partial r} + \frac{v_{15}}{r} \right) - Ax_1\rho_4 - T_2\rho_3 \right] \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \\
 v_1 &= \frac{A}{3\gamma\mu_0} (r^2 - r_0^2)\varepsilon + \left(\sum_{n=1}^5 C_{2n} r^{2n} \right) \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \\
 v_r &= \left(\sum_{n=1}^4 C_{2n-1} r^{2n-1} \right) \varepsilon^4 + \left[x_1 \left(\sum_{n=1}^4 L_{2n-1} r^{2n-1} \right) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{n=1}^2 M_{2n-1} r^{2n-1} \right] \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots) \\
 T_1 &= 1 + Ax_1\varepsilon + \left\{ \frac{A^2}{12\gamma\mu_0\kappa_0} \left[\frac{(2-\gamma)}{4} r^2 - r_0^2 \right] r^2 + T_{20} \right\} \varepsilon^2 + \\
 &+ \left(\sum_{n=0}^4 L_{2n} r^{2n} \right) \varepsilon^4 + \left[x_1 \left(\sum_{n=0}^4 N_{2n} r^{2n} \right) + \sum_{n=0}^2 M_{2n} r^{2n} \right] \varepsilon^5 + \varepsilon^6 (\dots)
 \end{aligned}$$

Здесь $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$; v_r — проекция вектора $\mathbf{V}(x_1, x_2, x_3)$ на радиус-вектор $\{0, x_2, x_3\}$; C_n, L_n, M_n, N_n — const. При помощи (3.3) получаются формулы для среднего значения скорости, расхода газа и т. п., аналогичные соответствующим формулам в несжимаемом случае [1].

Из (3.2), (3.3) следует, что для движения сжимаемой среды при малых значениях $A\varepsilon/(\gamma\mu_0)$ будут приближенно выполняться законы Пуазейля, описывающие движение вязкой жидкости.

Вопросы об устойчивости течений (3.2), (3.3) и существовании для них вторичных течений можно исследовать при помощи представления (1.5), взяв в качестве U_0 построенные аналоги течения Пуазейля. Тогда для U_k будут получаться линейные системы с переменными коэффициентами, анализ которых весьма трудоемок, заслуживает отдельного рассмотрения и в данной работе не проводится.

Построенные стационарные и нестационарные представления приближенно описывают решения конкретных начально-краевых задач. При помощи ряда (1.5) можно также получать примеры отдельных течений вязкого сжимаемого газа. В частности, если в качестве U_1 (решения однородной системы (2.1) при $k = 1$) взять

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= (\frac{3}{2}\gamma\mu_0 C \sin x_2 - B \cos x_2) \exp x_1 \\ v_{11} &= -C (\sin x_2 + x_2 \cos x_2) \exp x_1 \\ v_{21} &= C x_2 \sin x_2 \exp x_1, \quad T_1 = B \cos x_2 \exp x_1, \quad B, C = \text{const} \end{aligned}$$

или линейную комбинацию решений (3.1) и (3.4), то в стационарном случае U_k ($k \geq 2$) выписываются в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Наука. 1970. 904 с.
2. Гапонов С. А., Маслов А. А. *Развитие возмущений в сжимаемых потоках*. Новосибирск: Наука. 1980. 144 с.
3. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*. Новосибирск: Наука. 1983. 319 с.
4. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // *Дифференц. уравнения*. 1976. Т. 12. № 11. С. 2052—2063.
5. Васин В. В., Сидоров А. Ф. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // *Изв. вузов. Математика*. 1983. № 7 (254). С. 13—27.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука. 1967. 736 с.
7. Шатов А. К. О задаче Коши для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса с учетом сжимаемости // *Докл. АН СССР*. 1985. Т. 285. № 6. С. 1374—1376.
8. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. М.: Наука, 1974. 711 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
15.IX.1986