Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 531.38

О РЕШЕНИЯХ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

Докшевич А. И.

Путем элементарных преобразований фазовых переменных получено несколько новых форм системы уравнений Эйлера — Пуассона при условиях Ковалевской [1]. Показано, что при помощи таких уравнений, не используя квадратур Ковалевской [2, 3], можно не только обнаружить, но и построить в конечном явном виде решения для всех четырех классов вырожденных движений, указанных еще Аппельротом [4], но до сих пор недостаточно изученных. В частности, дано в развернутом виде решение в новой форме для третьего класса. Единым способом, с использованием указанных новых форм уравнений движения, рассмотрены также некоторые частные результаты исследования вырожденных решений, полученные разными способами [5—8].

1. Исходные уравнения. При условиях Ковалевской уравнения Эйлера — Пуассона и их алгебраические первые интегралы возьмем в виде

$$(1.1)\qquad 2p^{\cdot} = qr,\quad 2q^{\cdot} = -rp - c_0\gamma'',\quad r^{\cdot} = c_0\gamma'$$

$$\gamma^{\cdot} = r\gamma' - q\gamma'',\quad \gamma'^{\cdot} = p\gamma'' - r\gamma,\quad \gamma''^{\cdot} = q\gamma - p\gamma'$$

$$(1.2)\qquad 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2c_0\gamma = 6l_1,\quad 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,\qquad (p^2 - q^2 + c_0\gamma')^2 + (2pq + c_0\gamma')^2 = k^2$$

Производная по времени указана точкой. Введем комплексные переменные

$$(1.3)\qquad x_n = p + \varepsilon_n iq,\quad \xi_n = (p + \varepsilon_n iq)^2 + c_0(\gamma + \varepsilon_n i\gamma'),\quad n = 1, 2$$

$$i = \sqrt{-1},\quad \varepsilon_1 = 1,\quad \varepsilon_2 = -1$$

и перепишем (1.1), (1.2) в форме

$$(1.4)\qquad 2\varepsilon_n i x_n^{\cdot} = rx_n + c_0\gamma'',\quad 2ir^{\cdot} = x_2^2 - x_1^2 + \xi_1 - \xi_2$$

$$\varepsilon_n i\xi_n^{\cdot} = r\xi_n,\quad 2i\gamma''^{\cdot} = \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 + x_1x_2(x_1 - x_2)$$

$$(1.5)\qquad r^2 = 6l_1 - (x_1 + x_2)^2 + \xi_1 + \xi_2$$

$$c_0 r\gamma'' = 2lc_0 + x_1x_2(x_1 + x_2) - x_2\xi_1 - x_1\xi_2$$

$$c_0^2\gamma''^2 = c_0^2 - k^2 - x_1^2x_2^2 + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2,\quad \xi_1\xi_2 = k^2$$

Исключением переменных r, γ'' посредством (1.5) получаются важные для дальнейшего исследования уравнения

$$(1.6)\qquad -4x_n^{\cdot 2} = R(x_n) + (x_1 - x_2)^2\xi_n,\quad 4x_1^{\cdot}x_2^{\cdot} = R(x_1, x_2)$$

Здесь

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{4} A_\nu x^{4-\nu},\quad R(x_1, x_2) = A_0x_1^2x_2^2 + A_2x_1x_2 +$$

$$+ {}^1/_2A_3(x_1 + x_2) + A_4,\quad A_0 = -1,\quad A_1 = 0,\quad A_2 = 6l_1,$$

$$A_3 = 4lc_0,\quad A_4 = c_0^2 - k^2$$

2. Первая форма уравнений. Преобразуем уравнения (1.6). Введем новые переменные

$$(2.1)\qquad y_n = -\frac{(x_n - a)}{M},\quad \eta_n = \frac{k^2(x_n - a)^4\xi_n^{-1}}{M^2}\quad (M = (x_1 - a)(x_2 - a))$$

где a — постоянная. После такой замены равенства (1.6) примут вид

$$-4y_n^{\cdot 2} = Q(y_n) + (y_1 - y_2)^2\eta_n, \quad 4y_1^{\cdot}y_2^{\cdot} = Q(y_1, y_2) \tag{2.2}$$

$$Q(y) = R(a)\,y^4 - R'(a)\,y^3 + {}^1/_2R''(a)\,y^2 + 4ay - 1 \quad (R' = dR(x)/dx)$$

$$Q(y_1, y_2) = R(a)\,y_1^2y_2^2 - {}^1/_2R'(a)\,y_1y_2(y_1 + y_2) + {}^1/_2R''(a)\,y_1y_2 - a^2(y_1 - y_2)^2 + 2a(y_1 + y_2) - 1$$

Отметим, что $\eta_1\eta_2 = \xi_1\xi_2 = k^2$. Система (2.2) имеет структуру исходной системы (1.6). Учитывая это, введем еще две переменные z, γ_3 так, чтобы

$$2\varepsilon_n i y_n^{\cdot} = zy_n + \gamma_3 \quad (n = 1, 2) \tag{2.3}$$

Подставив эти выражения для производных $y_n^{\cdot}$ в равенства (2.2), придем к системе трех линейных алгебраических уравнений относительно парных произведений z^2, $z\gamma_3$, γ_3^3. Разрешив ее, найдем

$$z^2 = R(a)(y_1 + y_2)^2 - R'(a)(y_1 + y_2) - {}^1/_2R''(a) + 2a^2 + \eta_1 + \eta_2 \tag{2.4}$$

$$z\gamma_3 = {}^1/_2R'(a)\,y_1y_2 - a^2(y_1 + y_2) + 2a - (\eta_2y_1 + \eta_1y_2)$$

$$\gamma_3^2 = R(a)\,y_1^2y_2^2 + 2a^2y_1y_2 - 1 + \eta_1y_2^2 + \eta_2y_1^2$$

С другой стороны, переменные z, γ_3 элементарно выражаются через фазовые переменные уравнений Эйлера — Пуассона. На самом деле, производные по t от y_1, y_2, определенные равенствами (2.1), в силу уравнений движения (1.4) таковы:

$$-2\varepsilon_n i y_{1,2}^{\cdot} = (rx_{2,1} + c_0\gamma'')(x_{2,1} - a)^{-2}; \qquad y_{1,2} = (y_1, y_2),$$

$$x_{2,1} = (x_1, x_2)$$

Сравнив с (2.3), обнаружим, что

$$\gamma_3 = (c_0\gamma'' + ar)/M, \quad z = r + (x_1 + x_2 - 2a)\,\gamma_3 \tag{2.5}$$

Найдем производные $\eta_n^{\cdot}$. Дифференцируя выражения (2.1) для η_n и учитывая уравнения Эйлера — Пуассона (1.4), выясним, что

$$\varepsilon_n i\eta_n^{\cdot} = z\eta_n, \quad n = 1, 2 \tag{2.6}$$

Далее вычислим производные по времени от z, γ_3. Для этой цели удобно воспользоваться соотношениями (2.4). Если их продифференцировать почленно и учесть значения производных $y_n^{\cdot}$, $\eta_n^{\cdot}$ (2.3), (2.6), то получим

$$2iz^{\cdot} = R(a)(y_1^2 - y_2^2) - {}^1/_2R'(a)(y_1 - y_2) + \eta_1 - \eta_2 \tag{2.7}$$

$$2i\gamma_3^{\cdot} = R(a)\,y_1y_2(y_2 - y_1) + a^2(y_2 - y_1) + \eta_2y_1 - \eta_1y_2$$

Пусть полином $R(x)$ имеет вещественный корень a. Заметим, что во всех вырожденных случаях [4], определяемых условиями: 1) $k = 0$; 2) $3l_1 \pm k = 2l^2$; 3) $R(x)$ имеет кратный корень, полином $R(x)$ обладает вещественными корнями. Тогда переменные y_1, y_2, η_1, η_2, z, γ_3 будут удовлетворять системе уравнений

$$2\varepsilon_n i y_n^{\cdot} = zy_n + \gamma_3, \quad 2iz^{\cdot} = -{}^1/_2R'(a)(y_1 - y_2) + \eta_1 - \eta_2 \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_n i\eta_n^{\cdot} = z\eta_n, \quad 2i\gamma_3^{\cdot} = \eta_2y_1 - \eta_1y_2 - a^2(y_1 - y_2)$$

обладающей первыми интегралами

$$z^2 = -R'(a)(y_1 + y_2) + \eta_1 + \eta_2 + {}^1/_2R''(a) + 2a^2 \tag{2.9}$$

$$z\gamma_3 = {}^1/_2R'(a)\,y_1y_2 - a^2(y_1 + y_2) - (\eta_2y_1 + \eta_1y_2) + 2a$$

$$\gamma_3^2 = \eta_1y_2^2 + \eta_2y_1^2 + 2a^2y_1y_2 - 1, \quad \eta_1\eta_2 = k^2$$

Отметим, что переменные Эйлера — Пуассона $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ — рациональные функции от новых переменных.

Предположим, что $R'(a) = 0$. Тогда совокупность трех уравнений

$$2iz^{\cdot} = \eta_1 - \eta_2, \quad \eta_1^{\cdot} = z\eta_1 - i\eta_2^{\cdot} = z\eta_2$$

образует замкнутую систему, решение которой легко найти. Зная переменные z, η_1, η_2 как функции времени, можно [6, 7] найти остальные три переменные y_1, y_2, γ_3. Другим, более сложным путем и в несколько иной форме система (2.8) была получена в [6, 7] и с ее помощью построено указанное решение в явном виде. Полином $R(x)$ имеет кратный корень, стало быть, это решение описывает четвертый класс простейших движений (по классификации Аппельрота [4]).

3. Вторая форма уравнений. В уравнениях (2.8) и их интегралах (2.9) фигурирует постоянная a. Оказывается, что в общем случае путем некоторого линейного преобразования фазовых переменных можно получить уравнения, не содержащие этой постоянной. На самом деле, пусть $R(a) = 0$, но $R'(a) \neq 0$. Положим

$$4p_n = R'(a)\, y_n + 2a^2, \quad 4\gamma_0 = R'(a)\, \gamma_3 - 2a^2 z \tag{3.1}$$

После такой замены (2.8), (2.9) приобретут вид

$$\begin{gathered} 2\varepsilon_n p_n^{\cdot} i = zp_n + \gamma_0, \quad 2iz^{\cdot} = 2(p_2 - p_1) + \eta_1 - \eta_2 \\ \varepsilon_n i\eta_n^{\cdot} = z\eta_n, \quad 2i\gamma_0^{\cdot} = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2 \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} z^2 + 4(p_1 + p_2) - \eta_1 - \eta_2 = A_2, \quad \eta_1\eta_2 = k^2 \\ \gamma_0 z + \eta_2 p_1 + \eta_1 p_2 - 2p_1 p_2 = -{}^1/_2 A_4 \\ \gamma_0^2 = \eta_1 p_2^2 + \eta_2 p_1^2 + I, \quad 16I = 4A_2 A_4 - A_3^2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Укажем еще новый вид уравнений (2.2)

$$\begin{gathered} -4p_n^{\cdot 2} = f(p_n) + (p_1 - p_2)^2 \eta_n, \quad 4p_1^{\cdot} p_2^{\cdot} = f(p_1, p_2) \\ f(p) = -4p^3 + A_2 p^2 - A_4 p + I \\ f(p_1, p_2) = -2p_1 p_2 (p_1 + p_2) + A_2 p_1 p_2 - {}^1/_2 A_4 (p_1 + p_2) + I \end{gathered} \tag{3.4}$$

Отметим, что функция $f(p)$ линейной заменой аргумента $p = s + {}^1/_2 l_1$ преобразуется в функцию $S(s) = f(s + {}^1/_2 l_1) = 4s^3 - g_2 s - g_3$, где $g_2 = k^2 - c_0^2 + 3l_1^3$, $g_3 = l_1(k^2 - c_0^2 - l_1^2) + l^2 c_0^2$, которая в анализе Ковалевской играет значительную роль.

Запишем систему (3.2) с интегралами (3.3) через вещественные переменные. Пусть

$$p_n = x + \varepsilon_n iy, \quad \eta_n = \alpha + \varepsilon_n i\beta$$

Тогда

$$\begin{gathered} 2x^{\cdot} = zy, \quad 2y^{\cdot} = -zx - \gamma_0, \quad z^{\cdot} = \beta - 2y \\ \alpha^{\cdot} = z\beta, \quad \beta^{\cdot} = -z\alpha, \quad \gamma_0^{\cdot} = \alpha y - \beta x \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} z^2 + 8x - 2\alpha = A_2, \quad 2(\alpha x + \beta y) + \gamma_0 z - 2(x^2 + y^2) = \\ = -{}^1/_2 A_4 \\ \gamma_0^2 - 2\alpha(x^2 - y^2) - 4\beta xy = I, \quad \alpha^2 + \beta^2 = k^2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Уравнения движения в форме (3.5) могут оказаться полезными при исследовании как общего решения, так и различных частных случаев. Например, если $k = 0$, то будет: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma_0 = \text{const}$, ввиду чего система (3.5) сведется к трем уравнениям:

$$2x^{\cdot} = zy, \quad 2y^{\cdot} = -zx - \gamma_0, \quad z^{\cdot} = -2y$$

с интегралами

$$z^2 + 8x = A_2, \quad \gamma_0 z - 2(x^2 + y^2) = -{}^1/_2 A_4$$

Переменная z определяется уравнением: $z^{\cdot 2} = 2\gamma_0 z + A_4 - 16^{-1}(A_2 - z^2)$. Зная z, легко вычислить x, y: $8x = A_2 - z^2$, $2y = -z^\cdot$. Это новая форма решения в случае Делона.

4. Третья форма уравнений. Преобразуем систему (3.5), приняв, что новые переменные $\gamma_1, \gamma_2, s_1, s_2, u, v$ связаны со старыми следующим образом:

(4.1)
$$\eta_n = u_n^2, \quad u_n = u + \varepsilon_n iv, \quad ks_1 = ux + vy - {}^1/_2 ku$$
$$ks_2 = -vx + uy - {}^1/_2 ku, \quad 2k\gamma_n = \gamma_0 + {}^1/_2 \varepsilon_n z \quad (n = 1, 2)$$

Новые переменные удовлетворяют системе уравнений

(4.2)
$$s_1^\cdot = -v\gamma_1, \quad s_2^\cdot = -u\gamma_2, \quad u^\cdot = (\gamma_1 - \gamma_2) v$$
$$\gamma_1^\cdot = -vs_1, \quad \gamma_2^\cdot = us_2, \quad v^\cdot = (\gamma_2 - \gamma_1) u$$

обладающей первыми интегралами (σ_1, σ_2, I_4 — постоянные)

(4.3)
$$\gamma_1^2 - s_1^2 = \sigma_1, \quad \gamma_2^2 + s_2^2 = \sigma_2, \quad u^2 + v^2 = k$$
$$(u + 2s_1)^2 - (v + 2s_2)^2 - 2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 = I_4$$
$$\sigma_n = {}^1/_4 k^{-2} f({}^1/_2 \varepsilon_n k) = {}^1/_8 c_0^2 k^{-2} (3l_1 - \varepsilon_n k - 2l^2)$$
$$I_4 = 2Ik^{-2} = 3l_1 - c_0^2 k^{-2} (3l_1 - 2l^2)$$

Комбинируя интегралы (4.3), можно получить интеграл в виде суммы трех квадратов

(4.4)
$$(\gamma_1 + s_1 + 2u - 2\gamma_2)^2 + (\gamma_1 - s_1 - 2u - 2\gamma_2)^2 + 4(s_2 - v)^2 = I_5$$
$$I_5 = 2I_4 + 6(\sigma_1 + 2\sigma_2 + k)$$

Из (4.3), (4.4) следует, что все новые переменные ограничены как сверху, так и снизу.

Систему уравнений движения в форме (4.2) можно применить для выяснения свойств общего решения и для построения достаточно простых частных решений. Рассмотрим в качестве приложения случаи обращения в нуль постоянных σ_1, σ_2. Пусть $\sigma_2 = 0$. Тогда $3l_1 + k - 2l^2 = 0$. Это условие определяет решение Аппельрота [4], которое он называет простейшим движением второго класса. Уравнения (4.2) позволяют легко построить это решение.

Действительно, если $\sigma_2 = 0$, то $s_2 \equiv \text{const} = 0$, $\gamma_2 = \text{const} = 0$. Ввиду этого будет $s_1^\cdot = -v\gamma_1$, $u^\cdot = v\gamma_1$, откуда $s_1 + u = b_0 = \text{const}$. Приняв во внимание, что $\gamma_1^2 = s_1^2 + \sigma_1$, $v^2 = k - u^2$, немедленно обнаружим, что $u^{\cdot 2} = (k - u^2)[\sigma_1 + (b_0 - u)^2]$. Зная $u(t)$, элементарно вычислим $_1$, γ_1, v и тем самым закончим построение решения. Такого же типа решение имеет место, если $\sigma_1 = 0$ и, кроме того, принято $\gamma_1 - s_1 = 0$.

5. Третий класс движений. Пусть выполнено единственное ограничение $\sigma_1 = 0$. Оно определяет так называемый третий класс простейших движений. Построим это решение при помощи системы уравнений движения в форме (4.2). Не только выводом, но и формой квадратур оно отличается от известного ранее [7, 8]. Если $\sigma_1 = (\gamma_1 - s_1)(\gamma_1 + s_1) = 0$, то один из сомножителей должен постоянно равняться нулю. Не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением только одного варианта: $\gamma_1 - s_1 = 0$, Тогда интеграл I_5 дает

$$(\gamma_1 - \gamma_2 + u)^2 - 2(vs_2 - u\gamma_2) = {}^1/_2(3l_1 + k) = l^2 + k$$

Обозначим

$$z_1 = \gamma_1 - \gamma_2 + u, \quad \beta_1 = -us_2 - v\gamma_2, \quad \alpha_1 = vs_2 - u\gamma_2 \tag{5.1}$$

Оказывается, что эти переменные удовлетворяют замкнутой системе трех уравнений

$$z_1^{\cdot} = \beta_1, \quad \beta_1^{\cdot} = -z_1\alpha_1, \quad \alpha_1^{\cdot} = z_1\beta_1 \tag{5.2}$$

с интегралами

$$z_1^2 - 2\alpha_1 = l^2 + k, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = k\sigma_2 = {}^1/_4 c_0^2 \tag{5.3}$$

Система (5.1) легко разрешима. Зависимость переменной z_1 от времени можно установить по уравнению

$$z_1^{\cdot 2} = (c_0 + l^2 + k - z_1^2)(z_1^2 + c_0 - l^2 - k) \tag{5.4}$$

Если $l^2 + k < c_0$, то $z_1 = \mu \operatorname{cn} \tau_1$, где $\tau_1^{\cdot} = \sqrt{{}^1/_2 c_0}$, $\mu = \sqrt{c_0^2 + l^2 + k}$, а модуль эллиптической функции

$$\varkappa_1 = (c_0 + l^2 + k)/(2c_0)$$

Если $l^2 + k > c_0$, то $z_1 = \mu \operatorname{dn} \tau_2$, где $\tau_2^{\cdot} = {}^1/_2\mu$, а модуль $\varkappa_2 = 2c_0/(c_0 + l^2 + k)$.

Если $l^2 + k = c_0$, то $z_1 = \tau^{\cdot}/\operatorname{ch}\tau$, $\tau^{\cdot} = \mathrm{const} = \sqrt{2c_0}$.

Зная $z_1(t)$, определим $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$. Будем считать эти функции известными. Но для нахождения всех шести неизвестных знания этих трех переменных недостаточно. Необходимо найти еще одну переменную. Интеграл I_4 при $\gamma_1 = s_1$ приводится к виду

$$\gamma_1^2 + (s_2 + v)^2 - 2z_1\gamma_1 = B \tag{5.5}$$
$$B = {}^1/_2(I_4 + 2\sigma_2 - k) = (c_0^2 - 4kl^2)/(4k)$$

Примем за искомые переменные

$$q_n = \gamma_1 + \varepsilon_n i(s_2 + v) \quad (n = 1, 2) \tag{5.6}$$

Тогда приведенное выше соотношение можно записать так:

$$q_1q_2 - z_1(q_1 + q_2) = B \tag{5.7}$$

Найдем производные по времени от q_n. Приняв во внимание уравнения движения (4.2), получим $q_{1,2}^{\cdot} = -\varepsilon_n i\gamma_1 u_{2,1}$. Перемножив почленно эти равенства, учитывая, что $u_1u_2 = k$, $2\gamma_1 = q_1 + q_2$, придем к соотношению $4q_1^{\cdot}q_2^{\cdot} = k(q_1 + q_2)^2$. Выразим искомые переменные через q_1, q_2, α_1, β_1, z_1. Если обозначить $\nu_n = \alpha_1 + \varepsilon_n i\beta_1$, то

$$u_{1,2} = \frac{k(z_1 - q_{2,1})}{k + \nu_{2,1}}, \quad \gamma_2 + \varepsilon_n i s_2 = \frac{\nu_n(q_n - z_1)}{k + \nu_n} \quad (n = 1, 2) \tag{5.8}$$

Подставив выражения для u_1, u_2, γ_1 в равенства $q_{1,2}^{\cdot} = -\varepsilon_n i\gamma_1 u_{2,1}$ и учитывая конечное соотношение (5.7), получим два независимых комплексных уравнения

$$q_n^{\cdot} = \lambda_n(q_n^2 + B), \quad \lambda_n = \frac{\varepsilon_n ik}{2(k + \nu_n)} \tag{5.9}$$

Вещественная переменная $z_2 = i(q_1q_2 + B)/(q_1 - q_2)$ ввиду (5.9) подчиняется уравнению

$$z_2^{\cdot} = \lambda_0(z_2^2 - B) \tag{5.10}$$
$$\lambda_0 = i(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{k(\alpha_1 + k)}{8k\alpha_1 + c_0^2 + 4k^2} = \frac{l^2 + k - z_1^2}{8(z_1^2 + B)}$$

Вид решения этого уравнения зависит от знака постоянной B:

(5.11) $$B = b^2 > 0, \quad z_2 = b \operatorname{cth} \theta, \quad \theta^{\cdot} = -b\lambda_0$$
$$B = -b^2 < 0, \quad z_2 = b \operatorname{ctg} \theta_1, \quad \theta_1^{\cdot} = -b\lambda_0$$
$$B = 0, \quad (z_2^{-1})^{\cdot} = -\lambda_0$$

Зная z_2, можно найти q_1, q_2 из конечных уравнений

(5.12) $$q_1q_2 - z(q_1 + q_2) = B, \quad q_1q_2 + iz_2(q_1 - q_2) = -B$$

Заметим, что из (5.8), (5.7) вытекает равенство $z_1^2 + B = \delta^2$, где $\delta^2 = (\nu_1 + k)(\nu_2 + k)k^{-1} > 0$. Эту зависимость между переменными z_1, δ представим в параметрической форме

(5.13) $$B = b^2 > 0, \quad z_1 = b \operatorname{ctg} \psi, \quad \delta = b \operatorname{cosec} \psi$$
$$B = -b^2 < 0, \quad z_1 = b \operatorname{cth} \psi_1, \quad \delta = b \operatorname{cosech} \psi_1$$

Используя равенства (5.11), (5.13), можно записать q_n в форме

1) $B = b^2 > 0, \quad q_n = \dfrac{b(\sin\psi + \varepsilon_n i \operatorname{sh}\theta)}{\operatorname{ch}\theta - \cos\psi}, \quad \theta^{\cdot} = -b\lambda_0$

2) $B = -b^2 < 0, \quad q_n = \dfrac{b(\operatorname{sh}\psi_1 + \varepsilon_n i \sin\theta_1)}{\operatorname{ch}\psi_1 - \cos\theta_1}, \quad \theta_1^{\cdot} = -b\lambda_0$

3) $B = 0, \quad \dfrac{2}{q_n} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{\varepsilon_n i}{z_2}, \quad (z_2^{-1})^{\cdot} = -\lambda_0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалевская С. В.* Научные работы (Классики науки). М.: Изд-во АН СССР. 1948. 368 с.
2. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука. 1977. 323 с.
3. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат. 1958. 288 с.
4. *Аппельрот Г. Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С. В. Ковалевской. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1940. С. 61—155.
5. *Докшевич А. И.* Новый класс движений волчка Ковалевской // Докл. АН СССР 1979. Т. 247. № 6. С. 1336—1337.
6. *Докшевич А. И.* Об одном частном решении системы Эйлера — Пуассона при условиях Ковалевской // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка. 1980. Вып. 12. С. 16—19.
7. *Докшевич А. И.* Два класса движений волчка Ковалевской // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 745—749.
8. *Докшевич А. И.* Один класс движений волчка Ковалевской // Докл. АН СССР 1983. Т. 271. № 3. С. 554—557.
9. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка. 1978. 296 с.

Донецк

Поступила в редакцию
6.V.1987