

УДК 531.35:521.1

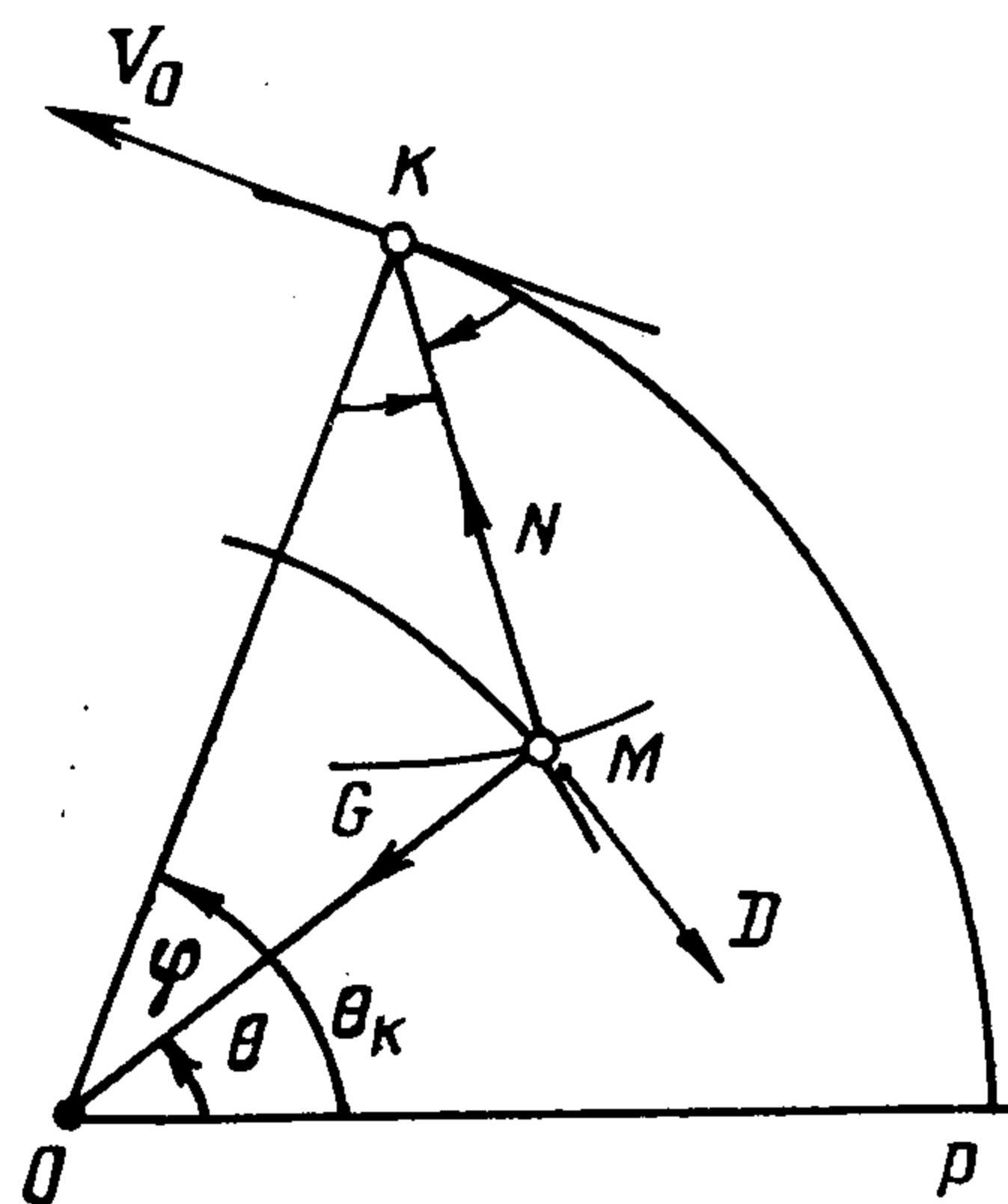
## КОЛЕБАНИЯ СПУТНИКА-ЗОНДА, БУКСИРУЕМОГО НА НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

Шахов Е. М.

Рассматриваются колебания спутника малой массы, буксируемого орбитальным кораблем или станцией на длинной нерастяжимой нити, возникающие под действием аэродинамического сопротивления и натяжения нити в атмосфере переменной плотности. При известном коэффициенте сопротивления спутника-маятника период колебаний определяется плотностью атмосферы на высоте полета орбитальной станции, а разность амплитуд и разность полупериодов при отклонениях вверх и вниз от положения относительного равновесия характеризуется градиентом плотности атмосферы. Обсуждаются возможные пути использования спутника-маятника как средства получения информации и необходимые элементы уточнения математической модели.

Запущенный с орбитального объекта буксируемый спутник под действием сопротивления атмосферы тормозится и удаляется от орбитального объекта на расстояние, определяемое длиной нити. По проекту [1] типичная длина троса-нити  $L = 1-100$  км, а масса спутника составляет около 500 кг. Будем рассматривать движения легкого спутника-зонда массой около 1 кг. По окончании размотки нити возникают колебания вдоль нити, которые должны быть демпфированы надлежащим образом. Далее под действием аэродинамического сопротивления и натяжения нити спутник-зонд переходит в режим установившихся колебаний в атмосфере переменной плотности. Исследование этих колебаний и составляет содержание данной работы.

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим относительное движение спутника-зонда массой  $m$ , прикрепленного безынерционной нерастяжимой нитью постоянной длины  $L$  к орбитальному кораблю, масса которого велика по сравнению с массой зонда. Корабль и зонд считаем материальными точками. Примем, что корабль движется по круговой орбите радиуса  $R_0$  с центром в точке  $O$  (совпадающей с центром гравитации) с постоянной окружной скоростью  $V_0$ . Введем полярную систему координат с полярной осью  $OP$ . Пусть положение корабля определяет точка  $K$ , а спутника-зонда — точка  $M$ . В принятой системе отсчета корабль и зонд имеют соответственно координаты  $(R_0, \theta_k)$  и  $(R, \theta)$  (фиг. 1). Введем также подвижную полярную систему координат с полярной осью  $KO$ , так что эта система отсчета вращается с угловой скоростью  $\omega_0 = V_0/R_0$ . Положение точки  $M$  в этой системе определяется расстоянием  $KM$  и углом  $\alpha$ . Нить считаем натянутой, так что  $KM = L$ .



Фиг. 1

Полагаем для простоты, что ветер отсутствует и сила сопротивления направлена по касательной к окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ . Гравитация направлена к центру и имеет величину  $G = mg_0 (R_0/R)^2$ , где  $g_0$  — ускорение свободного падения на орбите  $R_0$ .

Уравнение колебаний во вращающейся полярной системе координат и выражение для реакции нити имеют вид

$$(1.1) \quad \alpha'' - Dm^{-1}L^{-1} \sin \beta + g_0L^{-1} (R_0^2R^{-2} \cos \beta - \sin \alpha) = 0$$

$$N = mL (\omega_0 + \alpha')^2 + D \cos \beta + mg_0 (R_0^2R^{-2} \sin \beta - \cos \alpha)$$

( $D$  — сила аэродинамического сопротивления,  $N$  — натяжение нити,  $\beta$  — угол между направлением силы тяготения и касательной к окружности относительного движения зонда).

Буксируемый зонд имеет положение равновесия вблизи  $\alpha = 1/2\pi$ , т. е. почти на орбите  $R_0$  позади корабля. При этом сила аэродинамического сопротивления создает момент, возвращающий к положению равновесия. Последнее слагаемое в уравнении движения (1.1) характеризует результирующий эффект конкурирующих сил тяготения и центробежной силы, причем даже в случае постоянного ускорения тяготения это слагаемое отлично от нуля.

Воспользуемся геометрическими соотношениями

$$\varphi_k = \theta_k - \theta, \quad \beta = 1/2\pi - \alpha - \varphi, \quad \gamma = 1/2\pi - \alpha$$

$$\sin \varphi = LR^{-1} \sin \alpha, \quad \Delta R = R - R_0 = -L \sin \gamma$$

Перейдем в (1.1) от  $\alpha$  к  $\gamma$  и используем малость длины нити  $L$  по сравнению с радиусом орбиты  $R_0$ . Оставляя главные члены разложений по  $LR_0^{-1}$ , получим

$$(1.2) \quad \gamma'' + (Dm^{-1}L^{-1} - 3\omega_0^2 \cos \gamma) \sin \gamma = 0$$

$$Nm^{-1}L^{-1} = (\omega_0 - \dot{\gamma})^2 + 2\omega_0^2 \sin^2 \gamma - \omega_0^2 \cos^2 \gamma +$$

$$+ Dm^{-1}L^{-1} \cos \gamma$$

Систему (1.2) замыкает выражение для аэродинамического сопротивления  $D$ . Примем, что плотность атмосферы убывает с высотой по экспоненциальному закону. Поскольку сила сопротивления пропорциональна плотности, то для нее можно записать выражение

$$(1.3) \quad D = D_0 e^{\delta \sin \gamma}, \quad D_0 = 1/2 c_D \rho_0 V_0^2 S$$

Здесь  $D_0$  — аэродинамическое сопротивление на орбите  $R_0$ ; численное значение параметра  $\delta$  зависит от длины нити  $L$  и слабо зависит от высоты полета  $H$ , причем  $\delta \approx 1$  при  $L \approx 10$  км.

На орбите  $V_0 \approx 8000$  м/с, на высоте полета  $H = 230$  км плотность  $\rho_0 \approx 10^{-10}$  кг/м<sup>3</sup>, режим обтекания — свободномолекулярный, так что для сферы, например,  $c_0 \approx 2,6$ . Если характерная площадь  $S = 1$  м<sup>2</sup>, то  $D_0 = 10^{-2}$  кгм/с. Для зонда массой 1 кг соответствующее ускорение составляет 0,01 м/с<sup>2</sup>.

Уравнение колебаний (1.1) включает эффект обращения по орбите. Если частота колебаний  $\omega$ , обусловленная аэродинамическим сопротивлением, много больше частоты обращения  $\omega_0$ , то второй член в скобках в уравнении колебаний (1.1) можно опустить, что приводит к уравнению маятника в инерциальной системе координат

$$(1.4) \quad \gamma'' + Dm^{-1}L^{-1} \sin \gamma = 0$$

при

$$(1.5) \quad \omega^2 = D_0 m^{-1} L^{-1} \gg g_0 R_0^{-1} = \omega_0^2$$

Условие (1.5) дает ограничение для длины нити  $L$ :

$$(1.6) \quad L \ll a g_0^{-1} R_0, \quad a = D_0 m^{-1}$$

На высоте  $H = 230$  км отношение  $a/g_0 = 10^{-3}$  и увеличивается на порядок с уменьшением высоты до  $H = 180$  км.

2. Линейные и слабо нелинейные колебания. Рассмотрим сначала колебания малой амплитуды. Основное отличие уравнения колебаний (1.2) от классического уравнения математического маятника обусловлено не-

симметричной зависимостью (1.3) сопротивления  $D$  от  $\gamma$ . Свойство несимметрии можно сохранить, если даже ограничиться слабо нелинейными колебаниями малой амплитуды. Разлагая входящие в (1.2) функции по степеням  $\gamma$  и ограничиваясь слагаемыми с  $\gamma^2$ , получим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \gamma'' + (\omega^2 - 3\omega_0^2) \gamma + \delta\omega^2\gamma^2 &= 0 \\ Nm^{-1}L^{-1} &= (\omega_0 - \dot{\gamma})^2 + 2\omega_0^2\gamma^2 + \omega^2(1 + \delta\gamma - 1/2\gamma^2) - \\ &- \omega_0^2(1 - 1/2\gamma^2) \end{aligned}$$

Отметим сразу случай линейных колебаний. При  $\delta = 0$  получаем гармонические колебания с частотой  $\Omega$  и периодом  $T_0$

$$(2.2) \quad \Omega^2 = \omega^2 - 3\omega_0^2, \quad T_0 = 2\pi\Omega^{-1}$$

Если нить достаточно короткая, то  $\omega_0$  в выражении для  $\Omega$  можно отбросить. Например, при  $a = 0,01$  м/с и  $L = 100$  м имеем для периода  $T_0 \approx 10$  мин. Имея в виду, что период обращения спутника на высоте  $H = 200-300$  км вокруг Земли составляет около 90 мин, можно оценить условия, при которых следует учитывать  $\omega_0$ .

По периоду колебаний  $T_0$  можно определить сопротивление тела

$$(2.3) \quad D_0 = mL (T_0/(2\pi))^2$$

При известном коэффициенте сопротивления  $c_D$  формула (2.3) определяет плотность атмосферы  $\rho_0$  на высоте полета.

Таким образом, уже линейные колебания спутника-маятника на короткой нити могут дать весьма полезную информацию. Однако информация может быть значительно полнее, если использовать длинную нить и нелинейные колебания.

Обратимся к уравнению (2.1). Пусть требуется решить для (2.1) задачу с начальными данными

$$(2.4) \quad \gamma = \gamma_+, \quad \dot{\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

Имея в виду, что  $\delta \ll 1$ , будем строить приближенное решение задачи (2.1)–(2.4) методом возмущений. Положим

$$(2.5) \quad \gamma = \gamma_+ Y(t_1), \quad t_1 = \Omega t$$

Для функции  $Y$  имеем задачу

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Y'' + Y + \varepsilon Y^2 &= 0; \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 0 \\ \varepsilon &= \delta\gamma + \omega^2/\Omega^2 \end{aligned}$$

решение которой ищем в виде разложений по степеням  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} Y(t_1, \varepsilon) &= Y_0(\tau) + \varepsilon Y_1(\tau) + \varepsilon^2 Y_2(\tau) + \dots \\ t_1 = \Omega t &= \tau + \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + \dots \end{aligned}$$

В нулевом приближении по  $\varepsilon$  имеем

$$Y_0(\tau) = \cos \tau$$

В первом приближении можно положить (штрих означает производную по  $\tau$ )

$$f_1 = 0, \quad Y_1'' + Y_1 = -\cos^2 \tau$$

Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее однородным начальным условиям, таково:

$$Y_1 = -1/2 + 1/3 \cos \tau + 1/6 \cos 2\tau$$

Решение первого приближения имеет тот же период  $T_0$ , что и нулевое приближение  $Y_0$ . Однако уже это решение обнаруживает несимметрию. Действительно,  $Y_1(0) = 0$ ,  $Y_1(\pi) = -2/3$ ,  $Y_1(1/2\pi) = -2/3$ .

Во втором приближении имеем  $f_2(\tau) = 5/12\tau$  и соответствующее решение

$$Y_2 = -1/3 + 29/144 \cos \tau + 1/9 \cos 2\tau + 1/48 \cos 3\tau$$

Таким образом, период искажается только во втором приближении, а разность амплитуд при отклонениях вверх и вниз обнаруживается уже в первом. Во втором приближении для названной разности имеем

$$(2.7) \quad \Delta Y = Y(0) + Y(\pi) = -2/3\epsilon - (2/3\epsilon)^2$$

Обозначим  $\gamma_-$  — максимальное отклонение маятника при движении вверх, а  $\gamma_+\Delta$  — модуль разности амплитуд. Поскольку  $\gamma_- < 0$ , имеем  $\gamma_+\Delta = -(\gamma_- + \gamma_+)$ . Тогда согласно (2.7) получим

$$(2.8) \quad \gamma_+\Delta = 2/3\epsilon\gamma_+(1 + 2/3\epsilon)$$

Как будет показано ниже, формула (2.8) справедлива при значительно больших амплитудах  $\gamma_+$ , чем это можно было ожидать.

Заметим, что формулу (2.8) можно получить более простым путем, а именно, используя интеграл энергии. Этот способ будет применен ниже для общего нелинейного случая.

**3. Нелинейные колебания.** Полное уравнение нелинейных колебаний (1.2) при учете (1.3) запишем в виде

$$(3.1) \quad \gamma'' + (\omega^2 e^{\delta \sin \gamma} - 3\omega_0^2 \cos \gamma) \sin \gamma = 0$$

$$\omega^2 = D_0 m^{-1} L^{-1}, \quad \omega_0^2 = g_0 R_0^{-1} = V_0^2 R_0^{-2}$$

Это уравнение допускает интеграл энергии. Если  $\gamma' = 0$  и  $\gamma = \gamma_t$  при  $t = 0$ , то после умножения (3.1) на  $\gamma'$  и интегрирования по  $\gamma$  в пределах от  $\gamma_+$  до  $\gamma$  получим

$$(3.2) \quad \gamma'^2 + \int_{\gamma_+}^{\gamma} F d\gamma = 0$$

$$F = (\omega^2 e^{\delta \sin \gamma} - 3\omega_0^2 \cos \gamma) \sin \gamma$$

Интеграл, соответствующий второму члену в подынтегральном выражении, элементарно вычисляется, но при численном интегрировании это не создает дополнительных удобств, поэтому не будем его выделять.

Если  $\gamma$  достигает максимального значения  $\gamma_-$  при отклонении спутника-зонда вверх, то  $\gamma' = 0$ . Соответственно, интеграл в (3.2) обращается в нуль. Это условие определяет амплитуду  $\gamma_-$  как функцию  $\gamma_+$  и параметров  $\delta$  и  $p = \omega_0^2/\omega^2$ .

Интеграл в (3.2) можно представить в виде разложения по степеням  $\delta$ . Ограничиваясь линейным приближением по  $\delta$ , получим

$$(3.3) \quad -\cos \gamma_- + \cos \gamma_+ + 1/2\delta (\gamma_- - \gamma_+) - 1/4\delta (\sin 2\gamma_- - \sin 2\gamma_+) + 3/2p (\cos^2 \gamma_- - \cos^2 \gamma_+) = 0$$

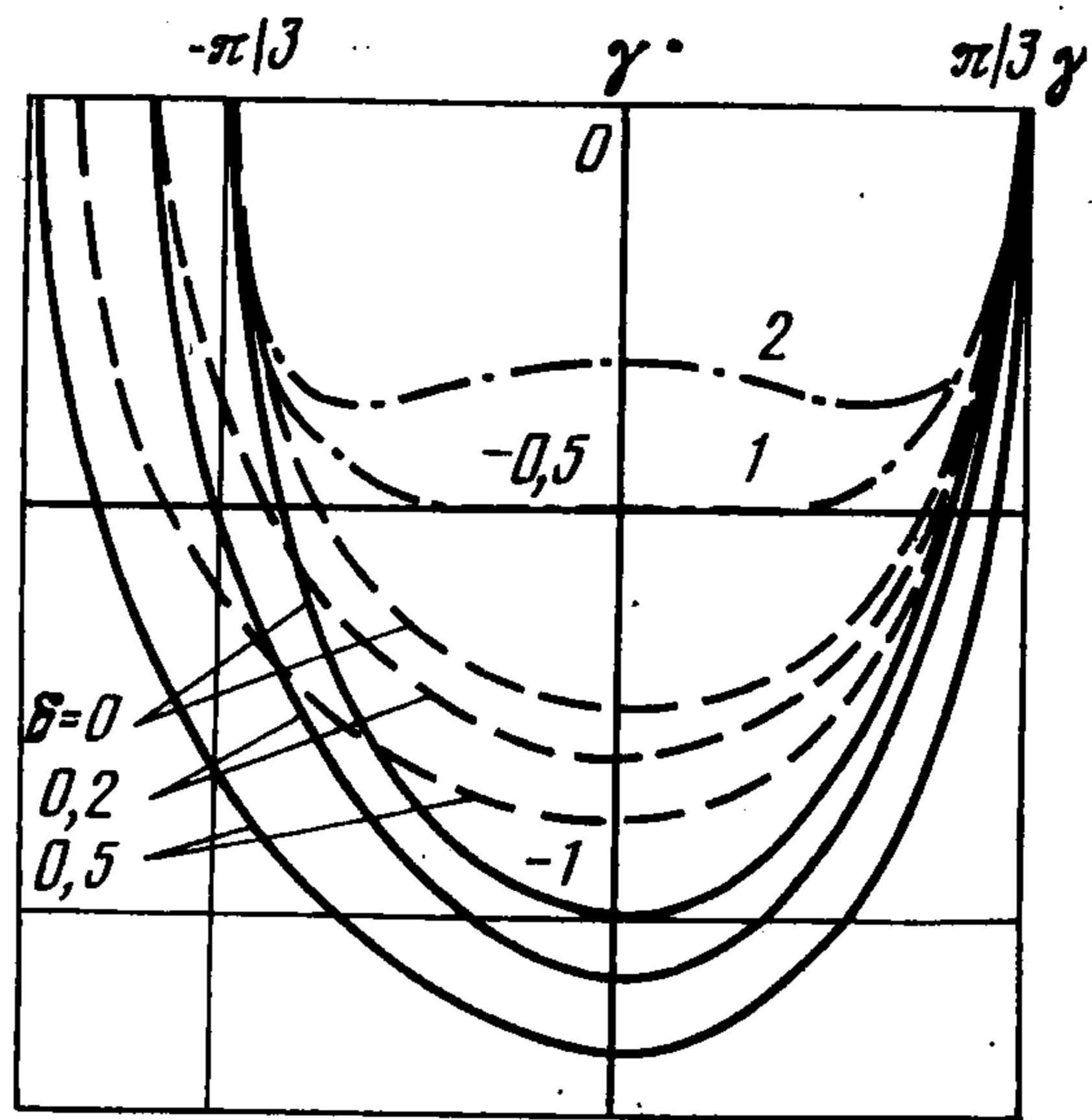
Полагая  $\gamma_- = -\gamma_+(1 + \Delta)$ , подставим  $\gamma_-$  в (3.3) и линеаризуем относительно  $\Delta$ . Получим

$$(3.4) \quad \gamma_+\Delta = \frac{\gamma_+ - \sin \gamma_+ \cos \gamma_+}{(\omega^2 - 3\omega_0^2 \cos \gamma_+) \sin \gamma_+} \delta$$

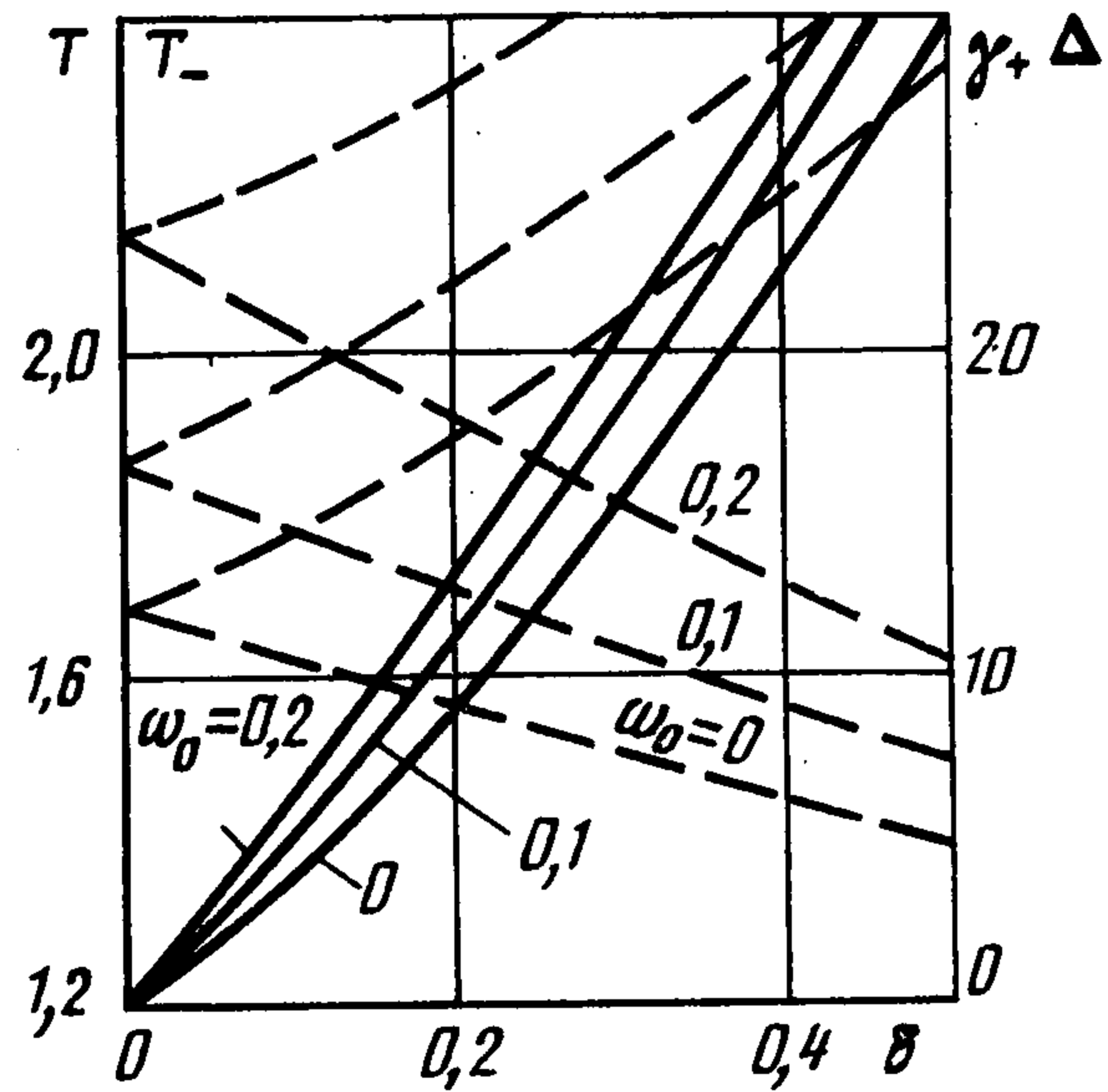
При  $\gamma_+ \ll 1$  эта формула переходит в линейный вариант формулы (2.8). Процесс вычисления следующих членов разложения  $\Delta$  в ряд по  $\delta$  можно,

конечно, продолжить, но эти вычисления довольно громоздки и здесь не приводятся.

Обратимся к результатам численного интегрирования уравнения (3.2). Решение зависит от двух параметров:  $\delta$  и  $p$ . Наличие разности в скобках перед  $\sin \gamma$  в уравнении (3.1) ограничивает область параметров, при которых колебания относительно  $\gamma = 0$  устойчивы. При  $\delta = 0$ , т. е. в случае



Фиг. 2



Фиг. 3

однородной атмосферы выражение в скобках заведомо неотрицательно при

$$(3.5) \quad \omega^2 > 3\omega_0^2$$

т. е. при  $p < 1/3$ .

Однако в условиях неоднородной атмосферы, т. е. при  $\delta > 0$ , сопротивление  $D$  в силу (1.3) убывает с уменьшением  $\gamma$ , и скобка может обратиться в нуль, даже если условие (3.5) выполнено. Оценки показывают, что при  $\delta < 0,5$  условие (3.5) достаточно заменить несколько более сильным:  $\omega^2 > 4\omega_0^2$ , т. е.  $p < 1/4$ . При этом колебания относительно  $\gamma = 0$  будут устойчивыми.

На фиг. 2, 3 представлены результаты численного решения интегродифференциального уравнения (3.2), которое сводилось к виду:

$$(3.6) \quad t = \int_{\gamma_+}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{2I}}, \quad I = - \int_{\gamma_+}^{\gamma} F d\gamma$$

Интеграл  $I$  вычислялся методом Симпсона. Первый интеграл рассчитывался тем же методом с неравномерным шагом по  $\gamma$ , за исключением первого и последнего интервалов по  $\gamma$ . При  $\gamma \rightarrow \gamma_+$  интеграл  $I$  заменялся выражением  $I = -F(\gamma_+)(\gamma - \gamma_+)$ , которое подставлялось в (3.6) и интегрировалось, так что при  $t \rightarrow 0$  имеем  $t = 2\sqrt{\gamma_+ - \gamma}/\sqrt{2F(\gamma_+)}$ . Аналогичный способ применялся и при  $\gamma \rightarrow \gamma_-$ .

При численном интегрировании полагали  $\omega = 1$ ; это условие означает переход к безразмерному времени  $\omega t$ . Тогда решение зависит от параметров  $\delta$  и  $\omega_0$ .

На фиг. 2 изображены фазовые траектории семейства колебаний для начального отклонения  $\gamma_+ = \pi/3$  при  $\omega_0 = 0$  и  $\delta = 0; 0,2; 0,5$  (сплошные линии), при  $\omega_0 = 0,2$  и  $\delta = 0; 0,2; 0,5$  (штриховые кривые), при  $\delta = 0$  и  $\omega_0 = 1/3; 0,4$  (штрихпунктирные кривые 1 и 2). Видна явная зависимость от параметра неоднородности атмосферы  $\delta$ , проявляющаяся в несимметрии траекторий относительно  $\gamma = 0$ . Учет переносного вращательного движения искажает фазовую траекторию и в согласии с (2.2) удлиняет период колебаний.

Разность амплитуд как функция  $\delta$  изображена сплошными кривыми на фиг. 3. Интересно отметить, что разность  $\gamma_+ \Delta$  хорошо аппроксимируется формулой (2.8), так что семейство кривых для разных  $\omega_0$  можно приближенно свести в одну. Зависимость разности амплитуд от параметра неоднородности  $\delta$  позволяет определить показатель неоднородности плотности атмосферы по замеренным значениям  $\gamma_+ \Delta$ .

Неоднородность атмосферы, в которой происходят колебания, приводит к тому, что нижняя часть траектории проходит маятником быстрее, а верхняя — медленнее, чем в случае однородной атмосферы. На фиг. 3 представлены зависимости полупериодов колебаний  $T_+$  и  $T_-$  при отклонениях вниз и вверх от параметра неоднородности  $\delta$  (штриховые кривые). Используя эти зависимости или просто зависимость разности  $\Delta T = T_- - T_+$  от  $\delta$ , которая мало отличается от прямой пропорциональности и слабо зависит от  $\omega_0$ , можно также определить  $\delta$  по замеренному значению величины разности  $\Delta T$ .

В рассмотренных движениях реакция нити  $N$  в нуль не обращалась. В общем случае колебания не являются плоскими.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bevilacqua F., Chiarelli C.* Tethered space system: a new facility for experimental rarefied gas dynamics // *Raref. Gas Dynam.*, ed. V. Boffi and C. Cercignani; B. G. Teubner, Stuttgart, 1986, v. 1, pp. 558—573.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IV.1987