Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЕ НЕИЗОЛИРОВАННОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Мамиров Ж. А.

В предположении, что неизолированной особой точке уравнений возмущенного движения отвечают m нулевых корней, рассматривается задача об устойчивости, когда некоторые из остальных корней чисто мнимые, а другие имеют отрицательные вещественные части в случаях, несущественно особенных. Такая ситуация характерна для неголономных систем. Полученные теоремы об устойчивости и неустойчивости применяются для исследования устойчивости вращений кельтского камня на границе области устойчивости.

1. Пусть система уравнений возмущенного движения с голоморфными правыми частями и выделенным явно линейным приближением имеет вид

$$x^{\cdot} = X(x, y), \quad y^{\cdot} = Ay + Y(x, y) \tag{1.1}$$

где x — m-вектор, y — $(N-m)$-вектор, A — постоянная $(N-m)\times$ $\times(N-m)$-матрица. Предположим, что

$$X(x, 0) = Y(x, 0) \equiv 0 \tag{1.2}$$

для всех x из некоторой окрестности точки $x = 0$. Тогда особая точка $x = 0$, $y = 0$ система (1.1) будет неизолированной: в силу (1.2) уравнения (1.1) допускают многообразие состояний равновесия

$$x = c, \quad y = 0 \quad (c = (c_1, \ldots, c_m), \quad c_k = \mathrm{const}, \quad k = 1, \ldots, m).$$

Уравнения (1.1) при условиях (1.2) можно считать уравнениями возмущенного движения неголономной системы с m неголономными связями [1, 2]. Было предложено [3] считать критическими случаями лишь такие, когда число нулевых корней характеристического уравнения больше числа уравнений неголономных связей, а в [4] такие случаи предложено называть особыми.

Определение. Будем говорить, что имеет место K-особенный случай, если для уравнений (1.1) справедливы условия (1.2) и среди собственных чисел матрицы A есть хотя бы одно с нулевой вещественной частью.

2. Рассмотрим K-особенный случай, когда в уравнениях (1.1) матрица A имеет n пар различных чисто мнимых и q корней с отрицательными вещественными частями $(N = m + 2n + q)$. Перепишем уравнения (1.1) в виде

$$\xi^{\cdot} = F_0 + F_1, \quad \eta^{\cdot} = \Lambda\eta + \Phi_0 + \Phi_1, \quad \bar{\eta}^{\cdot} = -\Lambda\bar{\eta} + \bar{\Phi}_0 + \bar{\Phi}_1 \tag{2.1}$$
$$z^{\cdot} = Pz + Z_0 + Z_1, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Здесь ξ и z — действительные m- и q-векторы, η, $\bar{\eta}$ — комплексно-сопряженные n-векторы, $\bar{\Phi}_0$, $\bar{\Phi}_1$ — комплексные вектор-функции, сопряженные соответственно с Φ_0 и Φ_1, Λ — матрица чисто мнимых собственных значений, постоянная $(q\times q)$-матрица P имеет собственные значения с отрицательными вещественными частями; функции с индексом единица тождественно равны нулю, когда $z = 0$. Аргументами функций с индексом нуль являются ξ, η, $\bar{\eta}$, а с индексом единица — переменные ξ, η, $\bar{\eta}$, z.

В несущественно особенном случае ни одно из тождеств $F_0 = \Phi_0 = \overline{\Phi}_0 = Z_0 \equiv 0$ не имеет места [5]. Представим функции с индексом нуль в виде двух слагаемых:

$$F_0 = F_0^{(1)}(\xi) + F_0^{(2)}(\xi, \eta, \overline{\eta}), \quad F_0^{(2)}(\xi, 0, 0) = 0;\ldots$$

(аналогичные равенства записываем для Φ_0, $\overline{\Phi}_0$, Z_0).

Условия (1.2) перепишутся в виде

$$F_0^{(1)} = \Phi_0^{(1)} = \overline{\Phi}_0^{(1)} = Z_0^{(1)} \equiv 0 \tag{2.2}$$

При этом всегда можно добиться, чтобы функции $F_0^{(2)}$, F_1 не содержали членов, линейных относительно η, $\overline{\eta}$, z [6]. В несущественно особенном случае задачу об устойчивости нулевого решения системы (2.1) можно свести [5, 6] к задаче об устойчивости нулевого решения системы (сохранены прежние обозначения)

$$\xi^{\cdot} = F_0, \quad \eta^{\cdot} = \Lambda\eta + \Phi_0, \quad \overline{\eta}^{\cdot} = -\Lambda\overline{\eta} + \overline{\Phi}_0 \tag{2.3}$$

в критическом случае m нулевых с m группами решений и n пар чисто мнимых корней, если задача устойчивости решается по членам конечного порядка относительно переменных ξ, η, $\overline{\eta}$, причем имеют место тождества $F_0^{(1)} = \Phi_0^{(1)} = \overline{\Phi}_0^{(1)} \equiv 0$ для системы (2.3).

Приведем систему (2.3) к нормальной форме [7, 8] до членов M-го порядка включительно. При этом K-особенность сохраняется. Поэтому, воспользовавшись прежними обозначениями, получим

$$\begin{aligned}
&\xi_k^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\eta_s\overline{\eta}_s + \sum_{l=3}^{M} F_k^{(l)} + F_k \\
&\eta_s^{\cdot} = \lambda_s\eta_s + \sum_{\nu=1}^{m} A_{\nu s}\xi_\nu\eta_s + \sum_{l=2}^{M} \Phi_s^{(l)} + \Phi_s \\
&\overline{\eta}_s^{\cdot} = -\lambda_s\overline{\eta}_s + \sum_{\nu=1}^{m} \overline{A}_{\nu s}\xi_\nu\overline{\eta}_s + \sum_{l=2}^{M} \overline{\Phi}_s^{(l)} + \overline{\Phi}_s \\
&0 \equiv F_{k0}^{(l)} = F_{k0} = \Phi_{s0}^{(l)} = \Phi_{s0} = \overline{\Phi}_{s0}^{(l)} = \overline{\Phi}_{s0}\, (F_{k0}^{(l)} = F_k^{(l)}(\xi, 0, 0), \ldots)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь a_{ks} и $A_{\nu s}$, $\overline{A}_{\nu s}$ — соответственно вещественные и комплексно-сопряженные постоянные коэффициенты; $F_k^{(l)}$, $\Phi_s^{(l)}$, $\overline{\Phi}_s^{(l)}$ — соответственно вещественные и комплексно-сопряженные резонансные [7, 8] формы порядка l, зависящие от ξ, η, $\overline{\eta}$; F_k, Φ_s, $\overline{\Phi}_s$ — совокупность зависящих от ξ, η, $\overline{\eta}$, порядок малости которых выше M. Всюду $k = 1, \ldots, m$; $s = 1, \ldots, n$.

После замены переменных

$$\eta_s = \rho_s \exp(\lambda_s t + i\theta_s), \quad \overline{\eta}_s = \rho_s \exp(-\lambda_s t - i\theta_s)$$

система (2.4) примет вид [7, 8]

$$\begin{aligned}
&\xi_k^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\rho_s^2 + \sum_{l=3}^{M} H_k^{(l)} + H_k \\
&\rho_s^{\cdot} = \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu s}\xi_\nu\rho_s + \sum_{l=2}^{M} P_s^{(l)} + P_s \\
&\rho_s\theta_s^{\cdot} = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\nu s}\xi_\nu\rho_s + \sum_{l=2}^{M} Q_s^{(l)} + Q_s \\
&b_{\nu s} = \operatorname{Re} A_{\nu s}, \quad c_{\nu s} = \operatorname{Im} A_{\nu s}, \quad \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n), \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $H_k^{(l)}$, $P_s^{(l)}$, $Q_s^{(l)}$ — соответствующие резонансные формы системы (2.4) порядка l относительно ξ, ρ с периодическими по θ коэффициентами; функции H_k, P_s, Q_s — периодические по t и θ формы относительно ξ, ρ, порядок которых выше M.

Будем предполагать, что $m = 2$ (обобщение на случай $m > 2$ тривиально). Перейдем в системе (2.5) к $(n+2)$-мерным сферическим координатам $r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$

$$\xi_1 = r\cos\varphi_1, \quad \xi_2 = r\cos\varphi_2 \sin\varphi_1$$

$$\rho_\nu = r\cos\varphi_{\nu+2}\prod_{j=1}^{\nu+1}\sin\varphi_j, \quad \rho_n = r\prod_{j=1}^{n+1}\sin\varphi_j$$

$$0 \leqslant \varphi_1,\ \varphi_2 \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi_j \leqslant \pi/2 \quad (j = 3, \ldots, n+1),$$

$$\nu = 1, \ldots, n-1$$

и выпишем соответствующие уравнения только для $r^\bullet$ и $\varphi_1^\bullet$, полагая $M = 2$

$$r^\bullet = \Delta^2 [R^{(0)}(\varphi, \theta) + R(r, \varphi, \theta, t)] \tag{2.6}$$

$$\varphi_1^\bullet = \Delta \sin\varphi_2 [G^{(0)}(\varphi, \theta) + G(r, \varphi, \theta, t)]$$

$$\Delta = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \quad R^{(0)}(\varphi, \theta) = K(\varphi', \theta)\Delta r^{-1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} [(a_{1s} + b_{1s})\cos\varphi_1 + (a_{2s} + b_{2s})\cos\varphi_2 \sin\varphi_1]\rho_s^2\Delta^{-2}$$

$$G^{(0)}(\varphi, \theta) = \cos\varphi_1 K(\varphi', \theta)\Delta r^{-1} + L(\varphi)$$

$$L(\varphi) = \sum_{s=1}^{n} [b_{1s}\cos^2\varphi_1 + \cos\varphi_2 (a_{2s} + b_{2s})\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 -$$

$$- a_{1s}\sin^2\varphi_1]\rho_s^2\Delta^{-2}, \quad K(\varphi', \theta) = \sum_{s=1}^{n} K_s^{(2)}(\varphi', \theta)\rho_s\Delta^{-1}$$

$$\varphi' = (\varphi_3, \ldots, \varphi_{n+1}), \quad K_s^{(2)}(\varphi', \theta) = P_s^{(2)}(\xi, \rho, \theta)\Delta^{-2}$$

(так как в данном случае наименьший порядок внутренних резонансов равен трем, то функции $P_s^{(2)}(\xi, \rho, \theta)$ не зависят от ξ).

Множители Δ^2 и $\Delta\sin\varphi_2$ в правых частях уравнений (2.6) записаны в виде общих множителей для всей правой части этих уравнений в силу того, что случай K-особенный и отсутствуют линейные относительно η, $\bar\eta$, z члены в уравнениях для $\xi^\bullet$ системы (2.1). Функции $\rho_s^2\Delta^{-2}$ могут быть представлены в виде

$$\cos^2\varphi_3, \quad \cos^2\varphi_4 \sin\varphi_3, \ldots, \cos^2\varphi_{n+1}\prod_{\nu=1}^{n}\sin^2\varphi_\nu, \quad \prod_{\nu=1}^{n+1}\sin^2\varphi_\nu$$

Следовательно, эти функции не обращаются в нуль одновременно при любых возможных значениях $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_{n+1}$.

Теорема 1. Пусть 1) для всех s коэффициенты b_{1s} одного знака и выполняются неравенства $(a_{2s} + b_{2s})^2 + 4a_{1s}b_{1s} < 0$; 2) $\min_\varphi |L(\varphi)| > \max_{\varphi', \theta} |K(\varphi', \theta)/2|$.

Тогда нулевое решение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. При выполнении условия 1) (условия 2)) функция $L(\varphi)$ ($G^{(0)}(\varphi, \theta)$) становится знакоопределенной. Рассмотрим функцию $V = r\exp(-h\cos\varphi_1)$, где h — некоторое вещественное число. Вычислим производную по переменной t от этой функции в силу системы уравнений возмущенного движения (2.6)

$$V^\bullet = V\Delta^2 r^{-1}(hG^{(0)}(\varphi, \theta) + R^{(0)}(\varphi, \theta) + hG(r, \varphi, \theta, t) +$$

$$+ R(r, \varphi, \theta, t))$$

При достаточно малых r число h можно выбрать таким образом, что производная $V^{\cdot}$ будет знакопостоянной функцией, причем $VV^{\cdot} \leqslant 0$; в этом случае функция V удовлетворяет всем условиям теоремы В. В. Румянцева [9] об устойчивости относительно части переменных.

Отметим, что функция V выбрана такой же, как и в [10].

Замечания. 1°. Если для всех s коэффициенты b_{2s} одного знака и выполняются неравенства $(a_{1s} + b_{1s})^2 + 4a_{2s}b_{2s} < 0$, то при выполнении соответствующего условия 2) теоремы 1 нулевое решение системы (2.1) также будет устойчиво по Ляпунову.

2°. Если $m = 1$ (т. е. один нулевой корень), $n \geqslant 1$ и нет внутренних резонансов (в этом случае $K(\varphi', \theta) \equiv 0$), то утверждение теоремы 1 совпадает с соответствующей теоремой из [10] (достаточно в условиях теоремы 1 положить $a_{2s} = b_{2s} = 0$).

3°. В случае $m > 2$, $n \geqslant 1$ и отсутствия внутренних резонансов теорема 1 при учете замечания 1° переписывается в виде:

Теорема 2. Если для всех s существует хотя бы одно k, такое, что все b_{ks} одного знака и выполняются неравенства (без ограничения общности положим $k = 1$)

$$\sum_{\nu=2}^{m} (a_{\nu s} + b_{\nu s})^2 + 4a_{1s}b_{1s} < 0 \tag{2.7}$$

то нулевое решение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову.

В случае, когда имеют место внутренние резонансы, для устойчивости нулевого решения системы (2.1) достаточно потребовать выполнения как неравенств (2.7), так и неравенства, аналогичного неравенству 2) теоремы 1.

3. При исследовании [11] устойчивости вращений кельтского камня реализуется случай $m = 1$, $n = 2$ (система (3.10)), но соответствующие коэффициенты b_{1s} разных знаков. Следовательно, теоремы об устойчивости как при отсутствии внутренних резонансов [10], так и при их наличии (теорема 1, замечание 1°) не применимы для рассматриваемого [11] случая, хотя K-особенность остается.

Предполагая наличие K-особенности, рассмотрим случай, когда $m = 1$, $n \geqslant 2$, не все коэффициенты b_{1s} одного знака и отсутствуют внутренние резонансы. Перепишем систему (2.5), явно указывая вид кубических членов и полагая $M = n + 1$ (уравнения для $\theta_s^{\cdot}$ опущены):

$$\xi_1^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} \rho_s^2 \left[a_{1s} + \alpha_{1s}\xi_1 + \sum_{l=2}^{n-1} H_s^{(l)}(\xi_1, \rho)\right] + H_1(\xi_1, \rho, \theta, t) \tag{3.1}$$

$$\rho_s^{\cdot} = \rho_s \left[b_{1s}\xi_1 + \beta_{s0}\xi_1^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{s\nu}\rho_\nu^2 + \sum_{l=3}^{n} P_s^{(l)}(\xi_1, \rho)\right] + P_s(\xi_1, \rho, \theta, t),$$

где формы $H_s^{(l)}$, $P_s^{(l)}$ порядка l, вообще говоря, не такие, как в (2.5).

Теорема 3. Пусть в K-особенном случае при $m = 1$, $n \geqslant 2$ и отсутствии внутренних резонансов для всех s имеют место неравенства: 1) $a_{1s}b_{1s}<0$; 2) $b_{1s} + b_{1\nu} \neq 0$, $\nu = 1, \ldots, n$; 3) $\beta_{s\nu} < 0$, $\nu = 1, \ldots, n$; 4) $\alpha_{1s} - a_{1s}\beta_{s0}/b_{1s} < 0$.

Тогда нулевое решение системы (3.1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Выясним структуру старших нелинейных членов. Так как имеет место K-особенность и, как уже отмечалось, функции $F_0^{(2)}$, F_1 не содержат членов, линейных относительно η, $\bar{\eta}$, z в системе (2.1), функции H_1 и P_s представляются в виде

$$H_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\rho_\nu^2 H_{\nu 1}^{(n)}(\rho, \theta, t) + \rho_\nu^2 \xi_1 H_{\nu 2}^{(n-1)}(\rho, \theta, t) + \right. \tag{3.2}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \rho_\nu \rho_j \left(\xi_1^2 H_{\nu j 3}^{(n-2)}(\xi_1, \rho, \theta, t) + H_{\nu j 4}^{(n)}(\xi_1, \theta, t)\right)\right]$$

$$P_s = \sum_{\nu=1}^{n} [\rho^2{}_\nu (P_{s\nu 1}^{(n)}(\rho, \theta, t) + \xi_1 P_{s\nu 2}^{(n-1)}(\rho, \theta, t) +$$
$$+ \rho_\nu (\xi_1{}^2 P_{s\nu 3}^{(n-1)}(\xi_1, \rho, \theta, t) + P_{s\nu 4}^{(n+1)}(\xi_1, \theta, t))]$$

где $H_{\nu 1}{}^{(n)}, \ldots, H_{\nu j4}^{(n)}, P_{s\nu 1}^{(n)}, \ldots, P_{s\nu 4}^{(n+1)}$ — функции, периодические по θ и t, а порядок их малости относительно переменных ξ_1, ρ, не ниже соответствующих верхних индексов.

Так как в системе (3.1) нормализация [7, 8] проведена до членов $(n + 1)$-го порядка включительно, то для всех форм $P_s{}^{(l)}$ возможно представление

$$(3.3) \qquad P_s^{(l)} = D_{sl}\xi_1{}^l + \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu{}^2 D_{s\nu}^{(l-2)}(\xi_1, \rho)$$

где D_{sl} — постоянные вещественные числа, $D_{s\nu}{}^{(l-2)}$ — формы порядка $(l - 2)$ относительно переменных ξ_1, ρ.

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{\xi_1{}^2}{2} + \sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{a_{1s}}{b_{1s}}\right) \frac{\rho_s{}^2}{2} + \sum_{s,\nu=1}^{n} K_{s\nu}\xi_1\rho_s\rho_\nu$$

где $K_{s\nu}$ — некоторые постоянные вещественные числа. В силу условия 1) теоремы при любых фиксированных числах $K_{s\nu}$ и достаточно малых ξ_1 и ρ функция V будет положительно-определенной.

Вычислим производную $V^{\cdot}$ в силу системы (3.1) с учетом структуры соотношений (3.2)

$$V^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} \rho_s{}^2 \Bigg[\left(\alpha_{1s} - a_{1s} \frac{\beta_{s0}}{b_{1s}} + 2K_{ss}b_{1s} \right) \xi_1{}^2 +$$
$$+ a_{1s} \sum_{\nu, j=1}^{n} K_{\nu j}\rho_\nu\rho_j + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{s\nu} \left(-\frac{a_{1\nu}}{b_{1\nu}} \right) \rho_\nu{}^2 + \ldots \Bigg] +$$
$$+ \sum_{\substack{s,\nu=1 \\ s\neq\nu}}^{n} \xi_1{}^2\rho_s\rho_\nu [K_{s\nu}(b_{1s} + b_{1\nu}) + \ldots]$$

Здесь многоточия означают члены более высокого порядка малости по сравнению с выписанными.

Для знакопостоянства производной $V^{\cdot}$ (такой, чтобы $VV^{\cdot} \leqslant 0$) достаточно потребовать выполнения условий:

А) $\alpha_{1s} - a_{1s}\dfrac{\beta_{s0}}{b_{1s}} + 2K_{ss}b_{1s} < 0$ для всех s;

Б) $V_s(\rho) = \left[a_{1s} \sum\limits_{\nu, j=1}^{n} K_{\nu j}\rho_\nu\rho_j + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \beta_{\nu s} \left(-\dfrac{a_{1\nu}}{b_{1\nu}} \right) \rho_\nu{}^2 \right]$

— определенно-отрицательные функции относительно ρ для всех s;

В) $K_{s\nu}(b_{1s} + b_{1\nu}) < 0$ для всех $\nu = 1, \ldots, n$ и s $(\nu \neq s)$

Положим все $K_{ss} = 0$, а числа $K_{s\nu}$ выберем так, чтобы удовлетворялось условие В) и настолько малыми, что для всех s функции $V_s(\rho)$ — определенно отрицательны (это возможно в силу условий 1), 2), 3) теоремы). Тогда условие А) будет выполнено в силу условия 4). Следовательно, функция V будет функцией Ляпунова, причем $VV^{\cdot} \leqslant 0$.

Замечание. Теорему 3 можно усилить, если к функциям $V_s(\rho)$ применить необходимые и достаточные условия [12] знакоопределенности в конусе, но из-за громоздкости вычислений приходится воздержаться от этого в данной работе.

4. Рассмотрим вопрос о неустойчивости. При отсутствии внутренних резонансов третьего порядка показано [13], что если при $m = 1$ существует хотя бы одна пара чисел a_{1s}, b_{1s}, удовлетворяющая неравенству $a_{1s}b_{1s} > 0$, то нулевое решение системы (2.5) неустойчиво. Очевидно, что это утверждение остается справедливым и в K-особенном случае при любом $n \geqslant 1$.

Теорема 4. Пусть $m = 2$, отсутствуют внутренние резонансы третьего порядка и имеет место K-особенность при $n \geqslant 1$. Тогда, если выполняется хотя бы одно из неравенств

$$a_{1s}b_{1s} + a_{2s}b_{2s} > 0 \tag{4.1}$$

то нулевое решение системы (2.5) неустойчиво.

Доказательство. Пусть для определенности неравенство (4.1) имеет место при $s = 1$. Применяя известные рассуждения (например [8]), в системе (2.5) отбросим уравнения для $\rho_s\theta_s^\cdot$ и рассмотрим укороченную [8] систему

$$\xi_1^\cdot = \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}\rho_\nu^2, \quad \xi_2^\cdot = \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}\rho_\nu^2, \quad \rho_s^\cdot = (b_{1s}\xi_1 + b_{2s}\xi_2)\,\rho_s \tag{4.2}$$

Как и в теореме Каменкова о неустойчивости [6], составим следующие функции, используя вид правых частей системы (4.2) (без ограничения общности можно считать $a_{11} \neq 0$):

$$T_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu^2 (a_{1\nu}\xi_2 - a_{2\nu}\xi_1), \quad T_s = \rho_s \Big[\sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}\rho_\nu^2 - b_{1s}\xi_1^2 - b_{2s}\xi_1\xi_2\Big], \tag{4.3}$$

$$R = \sum_{s=1}^{n} \rho_s^2 \left[(a_{1s} + b_{1s})\,\xi_1 + (a_{2s} + b_{2s})\,\xi_2\right]$$

Заметим, что выражения $\xi_2 = a_{21}\xi_1/a_{11}$, $\rho_1^2 = (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21})(\xi_1/a_{11})^2$, $\rho_\nu = 0$ $(\nu = 2, \ldots, n)$ при $\xi_1 \neq 0$ будут нетривиальными решениями системы алгебраических уравнений

$$T_0 = 0, \quad T_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$$

а функция R на этом решении принимает вид $R = \rho_1^2\,(a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21})\xi_1/a_{11}$. Следовательно, если считать $\xi_1/a_{11} > 0$, то формально выполнены все условия теоремы Каменкова о неустойчивости [6]: в данном случае все ρ_s одного знака, т. е. не могут быть произвольными, как это неявно предполагается в этой теореме. Поэтому перейдем к новым переменным w_1, w_2, u_s по формулам

$$w_1 = \xi_1/a_{11}, \; w_2 = \xi_2 - a_{21}w_1, \; u_1 = \rho_1 - (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21})^{1/2}w_1,$$
$$u_\nu = \rho_\nu - w_2 \quad (\nu = 2, \ldots, n)$$

Очевидно, такая замена переменных не меняет задачу об устойчивости. Переписывая систему (4.2) в новых переменных и составляя для полученной системы функции, аналогичные функциям (4.3), можно убедиться, что все условия теоремы Каменкова о неустойчивости будут выполнены, для этого достаточно положить $w_1 = \xi_1/a_{11} > 0$. Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы.

Сформулируем теперь тривиальное обобщение теоремы 4.

Теорема 5. Пусть $m > 2$, отсутствуют внутренние резонансы третьего порядка и имеет место K-особенность при $n \geqslant 1$. Тогда, если выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ks} b_{ks} > 0$$

то нулевое решение системы (2.5) неустойчиво.

5. В модели кельтского камня [14] предполагается, что главные радиусы кривизны r_1 и r_2 различны по величине. Сохраняя принятые [14] обозначения, рассмотрим случай, когда $r_1 = r_2$ и выполняются неравенства

$$\Delta_0 \equiv D^2 - dd_1 \neq 0, \quad A_0 \equiv 2\omega^2 + [\omega^2 (dd_1 - \alpha\alpha_1) + \delta (d + d_1)]\Delta_0^{-1} > 0, \quad B_0 \equiv \omega^4 + [\omega^4 (dd_1 - \alpha\alpha_1) - \delta (\delta + \omega^2 (\alpha + \alpha_1))]\Delta_0^{-1} > 0,$$
$$A_0^2 - 4B_0 > 0$$

Тогда матрица линейного приближения уравнений возмущенного движения (вращение кельтского камня вокруг вертикальной оси на абсолютно шероховатой плоскости) имеет два нулевых и пару чисто мнимых различных собственных значений $\pm i\omega\varkappa_1$, $\pm i\omega\varkappa_2$, где

$$\varkappa_{1,2} = ((A_0 \pm (A_0^2 - 4B_0)^{1/2})/2\omega^2)^{1/2}$$

и реализуется K-особенность. Уравнения возмущенного движения с точностью до квадратичных членов включительно имеют вид

$$
\begin{aligned}
&p^{\cdot} = A_{11}p - A_{12}q + A_{13}\gamma_1 - A_{14}\gamma_2 + (A_{11}/\omega)p\beta_1 - (A_{12}/\omega)q\beta_1 + \ldots,\\
&q^{\cdot} = A_{21}p - A_{11}q + A_{23}\gamma_1 - A_{13}\gamma_2 + (A_{21}/\omega)p\beta_1 - (A_{11}/\omega)q\beta_1 + \ldots\\
&\gamma_1^{\cdot} = -q + \omega\gamma_2 - q\beta_2 + \beta_1\gamma_2, \quad \gamma_2^{\cdot} = p - \omega\gamma_1 + p\beta_2 - \beta_1\gamma_1\\
&\beta_1^{\cdot} = (D/C)p^2 + ((A - B)/C)pq - (D/C)q^2 + A_{11}Gp\gamma_1 + (E/C +\\
&+ A_{21}G)p\gamma_2 - (E/C + A_{12}G)q\gamma_1 - A_{11}Gq\gamma_2 + A_{13}G\gamma_1^2 + (A_{23} - A_{14})G\gamma_1\gamma_2 -\\
&- A_{13}G\gamma_2^2 + \ldots, \quad \beta_2^{\cdot} = q\gamma_1 - p\gamma_2\\
&A_{11} = D\omega (\alpha + d)\Delta_0^{-1}, \quad A_{12} = \omega (D^2 + \alpha d_1)\Delta_0^{-1}\\
&A_{21} = \omega (D^2 + \alpha_1 d)\Delta_0^{-1}, \quad A_{13} = D\delta\Delta_0^{-1}, \quad A_{14} = d_1\delta\Delta_0^{-1}\\
&A_{23} = d\delta\Delta_0^{-1}, \quad E = Mr_1\omega (h - r_1), \quad G = Mhr_1/C.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Остальные обозначения совпадают с принятыми в [14].

После замены переменных $z_1 = p + iq$, $\bar z_1 = p - iq$, $z_2 = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\bar z_2 = \gamma_1 - i\gamma_2$ и последующей нормализации [8] уравнения (5.1) принимают вид

$$\beta_1^{\cdot} = a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2 + \ldots, \quad \beta_2^{\cdot} = 0 + \ldots$$
$$\rho_1^{\cdot} = b_{11}\beta_1\rho_1 + \ldots, \quad \rho_2^{\cdot} = b_{12}\beta_1\rho_2 + \ldots$$

где многоточия означают члены третьего порядка малости относительно β_1, β_2, ρ_1, ρ_2 (уравнения для угловых переменных не выписаны), а коэффициенты этой системы определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
&a_{1s} = {}^1/_2\omega^2 (1 - \varkappa_s^2)[2D (K_s + \bar K_s) + i (A - B)(K_s - \bar K_s)] +\\
&+ \omega Mhr_1 [b_0\bar K_s + \bar b_0 K_s] + Mhr_1 [d_0\bar K_s + \bar d_0 \bar K_s], \quad s = 1, 2\\
&b_{11} = \omega^{-1}S^{-1} [4\varkappa_1\varkappa_2 (\omega \operatorname{Im} (K_1\bar K_2) - \operatorname{Re} (\bar K_1 K_2 \bar a_0)) + 2\varkappa_1 (1 - \varkappa_2 -\\
&- (1 + \varkappa_2)K_2\bar K_2)\operatorname{Re} (b_0 K_1) + 2\varkappa_2 \operatorname{Re} (\bar b_0 \bar K_2 (1 + \varkappa_1) - b_0 K_2 K_1 \bar K_1 (1 - \varkappa_1))]\\
&b_{12} = \omega^{-1}S^{-1} [4\varkappa_1\varkappa_2 (\omega \operatorname{Im} (K_1\bar K_2) - \operatorname{Re} (\bar K_1 K_2 a_0)) - 2\varkappa_2 (1 + \varkappa_1 -\\
&- (1 - \varkappa_1)K_1\bar K_1)\operatorname{Re} (b_0 K_2) + 2\varkappa_1 \operatorname{Re} (- \bar b_0 \bar K_1 (1 - \varkappa_2) + b_0 K_1 K_2 \bar K_2 (1 + \varkappa_2))]\\
&K_1 - \frac{\bar b_0\omega (1 + \varkappa_1) + d_0}{(\bar a_0 \pm i\omega\varkappa_1)\,\omega (1 - \varkappa_1) + c_0}, \quad K_2 - \frac{\bar b_0\omega (1 - \varkappa_2) + \bar d_0}{(\bar a_0 + i\omega\varkappa_2)\,\omega (1 + \varkappa_2) + c_0}\\
&S = (1 + K_1\bar K_1 K_2\bar K_2)(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - (\varkappa_1 - \varkappa_2)^2(K_1\bar K_1 + K_2\bar K_2) -\\
&- 4\varkappa_1\varkappa_2 (K_1\bar K_2 + \bar K_1 K_2), \quad a_0 = i (A_{21} + A_{12})/2, \quad c_0 = i (A_{23} + A_{14})/2\\
&b_0 = A_{11} + i (A_{21} - A_{12})/2, \quad d_0 = A_{13} + i (A_{23} - A_{14})/2
\end{aligned}
$$

Заметим, что при замене ω на $-\omega$ коэффициенты a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12} не меняются. Применяя теорему 1, получим, что при $a_{11}b_{11} < 0$, $a_{12}b_{12} < 0$, $b_{11}b_{12} > 0$ нулевое решение системы (5.1) устойчиво, оно неустойчиво при выполнении хотя бы одного из неравенств $a_{11}b_{11} > 0$, $a_{12}b_{12} > 0$ (теорема 4).

Автор благодарит А. Л. Куницына, В. В. Румянцева и рецензента за обсуждение и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В., Карапетян А. В.* Устойчивость движений неголономных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1976. Т. 3. С. 5—43.
2. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивоси стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418—426.
3. *Князев Г. Н.* Об устойчивости неголономных систем в критических случаях // Вопросы аналит. и прикл. механики. М.: Оборонгиз. 1963. С. 56—64.
4. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Устойчивость состояний равновесия неголономных систем // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 46—53.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1956. Т. 2. С. 7—263.
6. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания механических систем. Избр. тр. Т. 2. М.: Наука. 1971. 214 с.
7. *Куницын А. Л., Ташимов Л. Т.* О неустойчивости резонансной системы в особенном случае // Исследование периодических движений и устойчивости механических систем. М.: МАИ. 1983. С. 9—13.
8. *Веретенников В. Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука. 1984. 320 с.
9. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. 1957. № 4. С. 9—16.
10. *Тхай В. Н.* К вопросу об устойчивости в критическом случае // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 436—440.
11. *Маркеев А. П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 575—582.
12. *Рапопорт Л. Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 674—679.
13. *Медведев С. В., Тхай В. Н.* Об устойчивости в одном критическом случае // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 963—969.
14. *Астапов И. С.* Об устойчивости вращения кельтского камня // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1980. № 2. С. 97—100.

Поступила в редакцию 5.V.1987

Чимкент