Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 531.36 : 534.1 + 62-50

О ПОСТРОЕНИИ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Черноусько Ф. Л.

Рассматривается задача о переводе линейной управляемой системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние при геометрических ограничениях на управление. Один из способов построения управления при отсутствии ограничений состоит в формировании управляющего воздействия в виде линейной комбинации собственных движений неуправляемой системы [1, 2]. В данной работе этот способ управления применяется в случае наличия геометрических ограничений, наложенных на управляющие функции. Указаны достаточные условия, при которых данный закон управления решает поставленную задачу за конечное время. Изложенный подход применяется к многочастотной системе линейных осцилляторов (маятников), скалярно управляемых. Получен закон управления, дана оценка времени процесса. Построено также управление двухмассовой системой, содержащей колебательное звено.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему с ограниченным управлением

$$x^{\cdot} = A(t)x + B(t)u \tag{1.1}$$

$$|u(t)| \leqslant a, \quad a > 0 \tag{1.2}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат, u — m-мерный вектор управления, $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, кусочно непрерывно зависящие от времени t, a — положительная постоянная.

Ставится задача построения управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению (1.2) при $t \in [t_0, T]$ и переводящего систему из заданного начального состояния

$$x(t_0) = x^0 \tag{1.3}$$

в заданное конечное состояние

$$x(T) = x^1 \tag{1.4}$$

Здесь x^0, x^1 — произвольные заданные n-мерные векторы, начальный момент времени t_0 считаем заданным, а момент окончания процесса T может быть как фиксированным, так и свободным ($T > t_0$).

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ однородной системы (1.1) определяется условиями

$$\Phi^{\cdot} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0) = E_n \tag{1.5}$$

Здесь E_n — единичная матрица размера $n \times n$. Запишем решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию (1.3)

$$x(t) = \Phi(t)\left[x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau\right] \tag{1.6}$$

Подставляя в (1.6) граничное условие (1.4), получим

$$\int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t) B(t) u(t)\, dt = x^*, \quad x^* = \Phi^{-1}(T)x^1 - x^0 \tag{1.7}$$

Таким образом, искомое управление $u(t)$ должно удовлетворять ограничению (1.2) и условию (1.7).

Напомним, что построение оптимального по быстродействию управления системой (1.1), (1.2), переводящего ее из состояния (1.3) в состояние (1.4) за кратчайшее время, сводится, согласно принципу максимума [3], к решению системы n трансцендентных уравнений. Рассматриваемый ниже способ, предложенный в [1, 2] для случая отсутствия ограничений на управление, не обеспечивает оптимальности по времени, но более прост для расчета и реализации.

2. Способ управления. Управление, решающее задачу (1.1)—(1.4), ищем в виде

$$u(t) = Q^T(t)c, \quad Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t) \tag{2.1}$$

Здесь c — n-мерный постоянный вектор, $Q(t)$ — матрица размера $n \times m$, символ ^{T} означает транспонирование. Подставляя (2.1) в (1.7), получим

$$R(T)c = x^*, \quad R(T) = \int_{t_0}^{T} Q(t)Q^T(t)\,dt \tag{2.2}$$

($R(T)$ — симметрическая матрица размера $n \times n$).

Составим квадратичную форму (v — постоянный n-мерный вектор)

$$(R(T)v, v) = \int_{t_0}^{T} |Q^T(t)v|^2\,dt \geqslant 0 \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что $R(T)$ — неотрицательно-определенная матрица. Как известно [4], в случае полной управляемости системы (1.1) интеграл (2.3) не обращается в нуль ни при каком постоянном $v \neq 0$. В этом случае $R(T)$ положительно определенна и линейная система алгебраических уравнений (2.2) имеет единственное решение

$$c = R^{-1}(T)x^* \tag{2.4}$$

Приведем простые достаточные условия, обеспечивающие выполнение наложенного ограничения (1.2) при принятом законе управления (2.1).

Теорема. Пусть при некотором $T > t_0$ матрица $R(T)$ неособенная, т. е. выполнено условие полной управляемости, и пусть для любого n-мерного вектора v выполнены неравенства

$$|Q^T(t)K(T)v| \leqslant \mu(T)|v|, \quad t \in [t_0, T] \tag{2.5}$$

$$|R(T)K(T)v| \geqslant \lambda(T)|v| \tag{2.6}$$

Здесь $K(T)$ — некоторая неособенная матрица размера $n \times n$, $\mu(T) > 0$ и $\lambda(T) > 0$ — положительные скаляры, v — произвольный постоянный n-мерный вектор, причем неравенство (2.5) должно иметь место для всех $t \in [t_0, T]$.

Тогда, если выполнено условие

$$|x^*| \leqslant a\lambda(T)\mu^{-1}(T) \tag{2.7}$$

то управление $u(t)$, заданное равенствами (2.1), (2.4), переводит систему (1.1) из состояния (1.3) в состояние (1.4) в момент T и удовлетворяет ограничению (1.2) при всех $t \in [t_0, T]$.

Доказательство. Управление (2.1), (2.4) построено так, что условия (1.3), (1.4) выполнены. Согласно (2.1), (2.4), имеем

$$|u(t)| = |Q^T(t)R^{-1}(T)x^*| = |Q^T(t)K(T)K^{-1}(T)R^{-1}(T)x^*|$$

Воспользуемся неравенством (2.5)

$$|u(t)| \leqslant \mu(T) |K^{-1}(T) R^{-1}(T) x^*|$$

В полученном неравенстве положим $x^* = R(T)K(T)v$ и применим сначала неравенство (2.6), а затем (2.7)

$$|u(t)| \leqslant \mu(T) |v| \leqslant \mu(T)\lambda^{-1}(T) \; |R(T)K(T)v| =$$
$$= \mu(T)\lambda^{-1}(T) |x^*| \leqslant a$$

Тем самым установлено, что ограничение (1.2) выполняется, что доказывает теорему.

Замечания. 1°. Неособенная матрица $K(T)$ в (2.5), (2.6) может выбираться произвольной, в частности, и единичной $K = E_n$. Произвол в выборе $K(T)$ может быть полезен, так как расширяет область применимости приведенных достаточных условий.

2°. В случае единичной матрицы $K = E_n$ число $\lambda(T)$, согласно (2.6), есть оценка снизу наименьшего собственного числа матрицы $R(T)$.

3°. Расчет управления (2.1) требует решения линейной системы уравнений (2.2), в отличие от случая оптимального по быстродействию управления, для определения которого нужно решить систему трансцендентных уравнений.

4°. Управление (2.1) — непрерывная функция времени, в отличие от оптимального по быстродействию управления, которое, вообще говоря, разрывно.

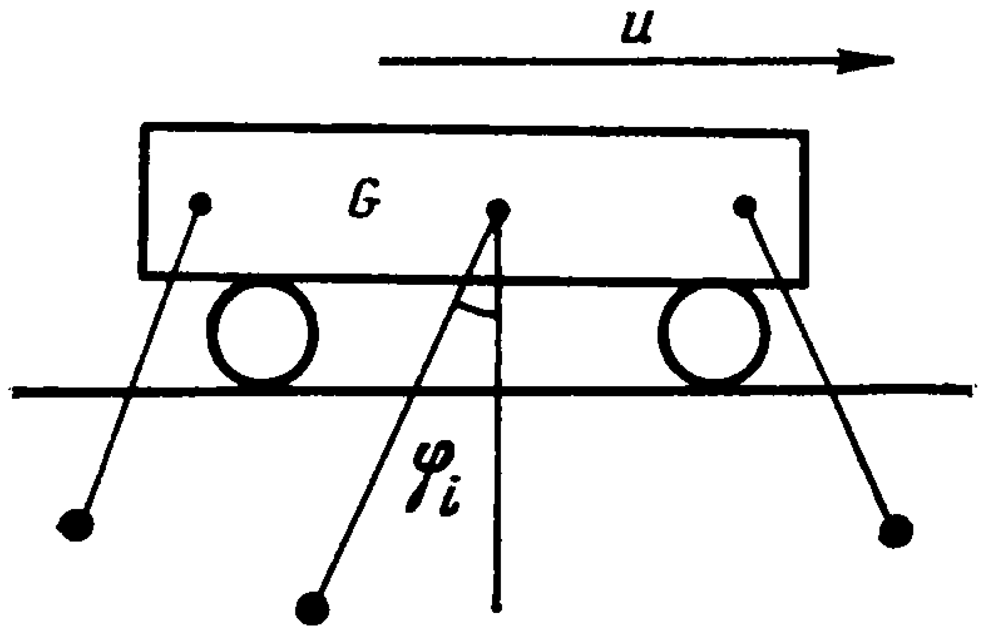
3. Система управляемых осцилляторов. Рассмотрим систему гармонических осцилляторов, управляемых посредством скалярного управления

(3.1) $\xi_i^{\cdot\cdot} + \omega_i^2 \xi_i = u$

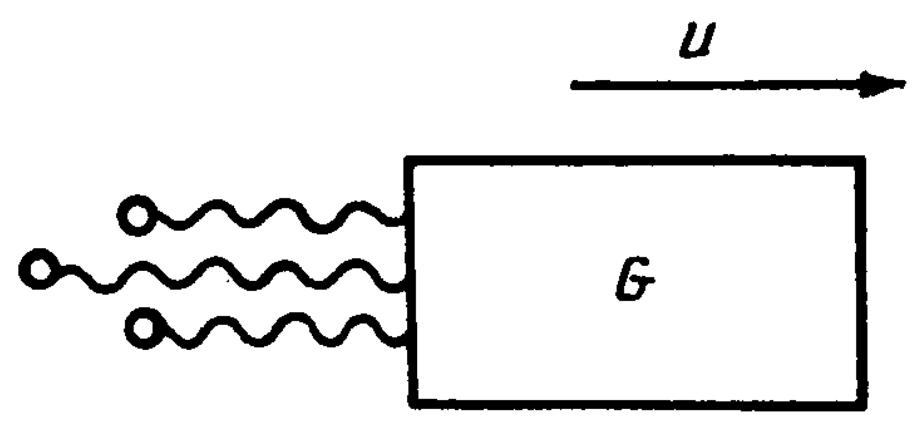
Здесь ξ_i — обобщенные координаты, постоянные $\omega_i > 0$ — собственные частоты осцилляторов, всюду далее $i = 1, \ldots, n$; u — скалярное управление, на которое наложено ограничение (a — постоянная)

(3.2) $|u(t)| \leqslant a$

В качестве механической модели системы (3.1) может служить система математических маятников, подвешенных к несущему телу G, перемещаю-



Фиг. 1



Фиг. 2

щемуся горизонтально с ускорением u (фиг. 1). При этом ξ_i — малые линейные отклонения маятников от точек подвеса, равные $l_i\varphi_i$, где l_i — длина, а φ_i — угол отклонения маятника от вертикали.

Другая механическая модель системы (3.1) представляет собой совокупность масс, присоединенных пружинами к несущему телу G. Вся система перемещается поступательно и горизонтально, причем ξ_i — удлинения пружин, u — ускорение тела G (фиг. 2).

Поставим задачу определения управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению (3.2) и переводящего систему (3.1) из произвольного начального состояния при $t_0 = 0$

(3.3) $\xi_i(0) = \xi_i^0, \quad \xi_i^{\cdot}(0) = \eta_i^0$

в заданное конечное состояние

(3.4) $\xi_i(T) = \xi_i^1, \quad \xi_i^{\cdot}(T) = \eta_i^1$

Будем предполагать, что частоты ω_i положительны и различны. Не нарушая общности, пронумеруем их в порядке возрастания, положим $\omega_0 = 0$ и введем обозначение

$$\Omega = \min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\omega_{k+1} - \omega_k) > 0 \tag{3.5}$$

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_n$$

Отметим, что при $\Omega > 0$ система (3.1) вполне управляема [5]. Если же некоторые частоты совпадают, то система становится неуправляемой. В самом деле, если начальные состояния двух осцилляторов с равными частотами различны, то никаким управлением нельзя добиться одновременного гашения колебаний этих двух осцилляторов: разность фаз их колебаний будет оставаться постоянной.

При помощи замены переменных

$$\xi_i^{\bullet} = y_i, \quad \xi_i = \omega_i^{-1} z_i \tag{3.6}$$

приведем систему (3.1) к виду

$$y_i^{\bullet} = -\omega_i z_i + u, \quad z_i^{\bullet} = \omega_i y_i \tag{3.7}$$

Фазовым вектором системы (3.7) является $2n$-мерный вектор-столбец, составленный из компонент векторов y, z.

Можно убедиться, что фундаментальная матрица однородной системы (3.7), определяемая условиями (1.5), ортогональна и имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{Vmatrix} \operatorname{diag}(\cos \omega_i t) & \operatorname{diag}(-\sin \omega_i t) \\ \operatorname{diag}(\sin \omega_i t) & \operatorname{diag}(\cos \omega_i t) \end{Vmatrix} \tag{3.8}$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi^T(t)$$

Символом $\operatorname{diag}(a_i)$ обозначены диагональные матрицы размера $n \times n$ с диагональными элементами a_i.

Матрицы $B(t)$ и $Q(t)$ для системы (3.7) — $2n$-мерные векторы-столбцы. Согласно (3.7), (2.1), (3.8) их элементы таковы:

$$B_i = 1, \quad B_{n+i} = 0, \quad Q_i(t) = \cos \omega_i t, \quad Q_{n+i} = -\sin \omega_i t \tag{3.9}$$

Из соотношения (3.9) и второго равенства (2.2) получим

$$QQ^T = \begin{Vmatrix} Q^1 & Q^0 \\ Q^0 & Q^2 \end{Vmatrix}, \quad R(T) = \begin{Vmatrix} R^1 & R^0 \\ R^0 & R^2 \end{Vmatrix} \tag{3.10}$$

$$R^k = \int_0^T Q^k \, dt, \quad k = 0, 1, 2$$

Здесь Q^k, R^k — матрицы размера $n \times n$. Их элементы вычислим при помощи формул (3.9), (3.10) (всюду далее $i, j = 1, \ldots, n$)

$$Q_{ij}^1 = \cos \omega_i t \cos \omega_j t, \quad Q_{ij}^2 = \sin \omega_i t \sin \omega_j t \tag{3.11}$$

$$Q_{ij}^0 = -\cos \omega_i t \sin \omega_j t; \quad R_{ii}^{1,2} = \frac{T}{2} \pm \frac{\sin 2\omega_i T}{4\omega_i}$$

$$R_{ij}^{1,2} = \frac{\sin(\omega_i - \omega_j) T}{2(\omega_i - \omega_j)} \pm \frac{\sin(\omega_i + \omega_j) T}{2(\omega_i + \omega_j)}$$

$$R_{ii}^0 = \frac{\cos 2\omega_i T - 1}{4\omega_i}, \quad R_{ij}^0 = \frac{\cos(\omega_i - \omega_j) T - 1}{2(\omega_i - \omega_j)} +$$

$$+ \frac{\cos(\omega_i + \omega_j) T - 1}{2(\omega_i + \omega_j)}, \quad i \neq j$$

Отметим, что в силу условия (3.5)

$$\omega_i \geqslant \Omega, \quad |\omega_i - \omega_j| \geqslant \Omega, \quad \omega_i + \omega_j \geqslant 3\Omega, \quad i \neq j \tag{3.12}$$

При учете (3.12) получим следующие оценки элементов (3.11) матрицы $R(T)$:

$$\begin{aligned} &|R_{ii}^k - {}^1/_2 T| \leqslant {}^1/_4\Omega^{-1}, \quad |R_{ii}^0| \leqslant {}^1/_2\Omega^{-1} \\ &|R_{ij}^k| \leqslant {}^1/_2\,|\omega_i - \omega_j|^{-1} + {}^1/_2\,(\omega_i + \omega_j)^{-1} \leqslant {}^2/_3\Omega^{-1} \\ &|R_{ij}^0| \leqslant {}^4/_3\Omega^{-1}; \quad k = 1, 2; \quad i \neq j \end{aligned} \tag{3.13}$$

В условиях (2.5), (2.6) положим $K(T) = E_{2n}$ и определим величины $\mu(T)$, $\lambda(T)$. Оценим левую часть неравенства (2.5), применяя неравенство Коши — Буняковского и используя выражения (3.9) для компонентов вектора $Q(t)$

$$|Q^T(t)v| \leqslant |Q(t)||v| = n^{1/2}|v|$$

Следовательно, в (2.5) можно положить

$$\mu(T) = n^{1/2} \tag{3.14}$$

Оценим левую часть неравенства (2.6). Для любого вектора v имеем

$$\begin{aligned} &|R(T)v| = |{}^1/_2 Tv + [R(T) - {}^1/_2 TE_{2n}]v| \geqslant {}^1/_2 T\,|v| - |Mv|, \\ &M = R(T) - {}^1/_2 TE_{2n} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь введена симметрическая матрица M размера $2n \times 2n$. Для ее элементов, используя соотношения (3.10), (3.13) для матрицы $R(T)$, получим оценки

$$\begin{aligned} &|M_{ii}| \leqslant {}^1/_4\Omega^{-1}, \quad |M_{n+i,\,n+i}| \leqslant {}^1/_4\Omega^{-1} \\ &|M_{ij}| \leqslant {}^2/_3\Omega^{-1}, \quad |M_{n+i,\,n+j}| \leqslant {}^2/_3\Omega^{-1} \\ &|M_{i,\,n+i}| \leqslant {}^1/_2\Omega^{-1}, \quad |M_{i,\,n+j}| \leqslant {}^4/_3\Omega^{-1}, \quad i \neq j \end{aligned} \tag{3.16}$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского, имеем (здесь и в (3.18) суммирование ведется от 1 до $2n$)

$$|Mv|^2 = \sum_i \Big(\sum_j M_{ij}v_j\Big)^2 \leqslant \sum_i \Big[\Big(\sum_i M_{ij}^2\Big)\Big(\sum_j v_j^2\Big)\Big] = |v|^2 \sum_{i,j} M_{ij}^2 \tag{3.17}$$

Учитывая оценки (3.16) и симметрию матрицы M, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} M_{ij}^2 \leqslant \frac{2n}{(4\Omega)^2} + \frac{2(n^2-n)4}{(3\Omega)^2} + \\ &+ \frac{2n}{(2\Omega)^2} + \frac{2(n^2-n)16}{(3\Omega)^2} = \frac{5n(64n-55)}{72\Omega^2} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Из неравенств (3.17), (3.18) следует

$$\begin{aligned} &|Mv| \leqslant k_n\Omega^{-1}v \\ &k_n = [5n(64n-55)/72]^{1/2}, \quad n \geqslant 1 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Используя неравенства (3.15) и (3.19), получим

$$|R(T)v| \geqslant ({}^1/_2 T - k_n\Omega^{-1})|v| \tag{3.20}$$

Следовательно, условие (2.6) выполнено, если $T > 2k_n\Omega^{-1}$. При этом условии, сравнивая (2.6) и (3.20), получаем

$$\lambda(T) = {}^1/_2 T - k_n\Omega^{-1} > 0 \tag{3.21}$$

Подставляя в неравенство (2.7) выражения (3.14), (3.21) и разрешая его относительно T, получим

$$T \geqslant 2n^{1/2}a^{-1}|x^*| + 2k_n\Omega^{-1} \tag{3.22}$$

Вектор x^* задан вторым соотношением (1.7), а векторы x^0, x^1, согласно (3.6), (3.3), (3.4), таковы:

$$(3.23) \qquad x^0 = \{y_i(0),\ z_i(0)\}^T = \{\eta_i^0,\ \omega_i\xi_i^0\}^T$$
$$x^1 = \{y_i(T),\ z_i(T)\}^T = \{\eta_i^0,\ \omega_i\xi_i^1\}^T$$

В закон управления (2.1) подставим элементы $Q(t)$ из (3.9)

$$(3.24) \qquad u(t) = \sum_{i=1}^{n} (c_i \cos\omega_i t - c_{n+i} \sin\omega_i t)$$

Согласно теореме п. 2, при выполнении условия (3.22) управление (3.24), в котором вектор c определяется формулой (2.4), где матрица $R(T)$ задана соотношениями (3.10), (3.11), удовлетворяет ограничению (3.2) и переводит систему (3.7) (или (3.1)) из начального состояния (3.3) в конечное состояние (3.4) за время T. Заметим, что потребное время T растет при увеличении $|x^*|$, при уменьшении возможностей управления (т. е. a) и при сближении собственных частот, т. е. при уменьшении Ω.

4. Частный случай. Рассмотрим задачу гашения начальных колебаний, т. е. задачу приведения системы в состояние равновесия. В этом случае имеем $x^1 = 0$ и из второго равенства (1.7) и (3.23) получим ($E(t)$ — энергия колебаний)

$$(4.1) \qquad |x^*|^2 = \sum_{i=1}^{n} [(\eta_i^0)^2 + \omega_i^2(\xi_i^0)^2] = 2E_0, \quad E_0 = E(0)$$

$$(4.2) \qquad E(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \{[\xi_i^{\cdot}(t)]^2 + \omega_i^2[\xi_i(t)]^2\}$$

Условие (3.22) при учете (4.1) перепишем в виде

$$(4.3) \qquad T \geqslant 2a^{-1}(2nE_0)^{1/2} + 2k_n\Omega^{-1}$$

При условии (4.3) управление (3.24) переводит систему (3.1) из начального состояния (3.3) в состояние равновесия $\xi_i = \xi_i^{\cdot} = 0$.

В частном случае $n = 1$ минимальное время, удовлетворяющее условию (4.3), равно (учитываем второе соотношение (3.19))

$$(4.4) \qquad T^* = 2a^{-1}(2E_0)^{1/2} + (5/2)^{1/2}\omega_1^{-1}$$

Сравним время (4.4) с временем оптимального быстродействия при условии

$$(4.5) \qquad \varepsilon = aE_0^{-1/2}\omega_1^{-1} \ll 1$$

означающем относительную малость управления. В этом случае приближенное оптимальное управление системой (3.1), (3.2) при $n = 1$, построенное в [5] при помощи методов малого параметра [6], имеет вид

$$(4.6) \qquad u = -a \operatorname{sign}(\xi_1^{\cdot})$$

а фазовые координаты представляются в виде

$$(4.7) \qquad \xi_1 = \pm(2E)^{1/2}\omega_1^{-1}\cos(\omega_1 t + \alpha)$$
$$\xi_1^{\cdot} = \mp(2E)^{1/2}\sin(\omega_1 t + \alpha)$$

Здесь энергия E и фаза α — медленные переменные.

Продифференцируем по t энергию E из (4.2) и воспользуемся равенствами (3.1), (4.6), (4.7)

$$E^{\cdot} = \xi_1^{\cdot}(\xi_1^{\cdot\cdot} + \omega_1^2\xi_1) = -\xi_1^{\cdot}u = -a|\xi_1^{\cdot}| =$$
$$= -a(2E)^{1/2}|\sin(\omega_1 t + \alpha)|$$

В соответствии с методом усреднения [6] усредним по t правую часть полученного равенства, считая E и α постоянными. Получим уравнение первого приближения, которое проинтегрируем:

$$[2E(t)]^{1/2} = (2E_0)^{1/2} - 2\pi^{-1}a\omega_1 t$$

Отсюда следует, что время T^0, необходимое для гашения колебаний ($E(T^0) = 0$), равно

$$T^0 = {}^1/_2\pi a^{-1} (2E_0)^{1/2} \tag{4.8}$$

Формулы (4.4), (4.8) следует сравнивать при условии (4.5), при котором получено приближенное выражение (4.8). При этом второе слагаемое в (4.4) много меньше первого, а главные части формул (4.4), (4.8) различаются множителями. Имеем

$$T^*/T^0 \approx 4/\pi = 1{,}273 \quad (\varepsilon \ll 1)$$

Данное соотношение дает оценку близости результатов, получаемых при рассматриваемом способе управления и оптимальном быстродействии.

5. Маятник с управляемой точкой подвеса. Рассмотрим снова системы, изображенные на фиг. 1, 2, в случае одного осциллятора ($n = 1$), но при учете смещения ξ_0 несущего тела G. Уравнения движения и ограничение (3.2) примут вид

$$\xi_1^{\cdot\cdot} + \omega_1^2\xi_1 = u, \quad \xi_0^{\cdot\cdot} = u, \quad |u| \leqslant a \tag{5.1}$$

Здесь все обозначения — те же, что и в п. 3. Отметим, что смещения ξ_0 и ξ_1 отсчитываются в противоположные стороны, так что абсолютное смещение осциллятора равно $\xi_0 - \xi_1$.

Рассмотрим еще видоизмененную постановку задачи, в которой управление системами, изображенными на фиг. 1, 2, осуществляется не при помощи ускорения тела G, а при помощи силы F, приложенной к телу G и ограниченной по величине постоянной F_0. В этом случае вместо соотношений (5.1) имеем уравнения и ограничение

$$\xi_1^{\cdot\cdot} + \omega_1^2\xi_1 = \xi_0^{\cdot\cdot}, \quad (m_0 + m_1)\xi_0^{\cdot\cdot} - m_1\xi_1^{\cdot\cdot} = F, \quad |F| \leqslant F_0 \tag{5.2}$$

где m_0 — масса тела G, m_1 — масса осциллятора. Введем координату центра масс системы

$$\xi = [(m_0 + m_1)\xi_0 - m_1\xi_1](m_0 + m_1)^{-1}$$

и преобразуем соотношения (5.2) к виду

$$\begin{aligned} &\xi_1^{\cdot\cdot} + \omega_1^2 (m_0 + m_1)m_0^{-1}\xi_1 = Fm_0^{-1} \\ &\xi^{\cdot\cdot} = F(m_0 + m_1)^{-1}, \quad |F| \leqslant F_0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Замена переменных и постоянных

$$\begin{aligned} &\xi' = (m_0 + m_1)m_0^{-1}\xi, \quad (\omega')^2 = \omega_1^2 (m_0 + m_1)m_0^{-1} \\ &u = Fm_0^{-1} \end{aligned}$$

приводит соотношения (5.3), с точностью до обозначений, к виду (5.1). Таким образом, соотношения (5.1) описывают также системы, управляемые при помощи ограниченной силы.

Для упрощения соотношений (5.1) сделаем в них замену переменных

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \omega_1^{-2}ay, \quad \xi_0 = \omega_1^{-2}az \\ &t = \omega_1^{-1}t', \quad u = au' \end{aligned} \tag{5.4}$$

После замены (5.4) соотношения (5.1) примут вид

$$y^{\cdot\cdot} + y = u, \quad z^{\cdot\cdot} = u, \quad |u| \leqslant 1 \tag{5.5}$$

В дальнейшем рассматриваем систему в виде (5.5) и обозначаем точками производные по новому времени t', причем штрихи у t', u' в (5.5) и далее опускаем.

Поставим задачу построить управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению $|u| \leqslant 1$ и переводящее систему (5.5) из заданного начального состояния

(5.6) $\qquad y(0)=y^0, \quad y^{\cdot}(0)=v^0, \quad z(0)=z^0, \quad z^{\cdot}(0)=w^0$

в заданное конечное состояние

(5.7) $\qquad y(T)=y^1, \quad y^{\cdot}(T)=v^1, \quad z(T)=z^1, \quad z^{\cdot}(T)=w^1$

Величины в правых частях равенств (5.6), (5.7) — постоянные, $T>0$ — пока неизвестное время окончания процесса.

Фазовый вектор системы (5.5) образуют переменные y, $y^{\cdot}$, z, $z^{\cdot}$. Следуя общей схеме построения управления, изложенной в п. 2, найдем фундаментальную матрицу, определяемую условиями (1.5), а затем — обратную к ней матрицу

(5.8) $$\Phi^{-1}(t)=\begin{Vmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Матрица $Q(t)$ из (2.1) в данном случае есть четырехмерный вектор-столбец

(5.9) $\qquad Q^T(t)=(-\sin t, \cos t, -t, 1)$

а управление (2.1) представляется в виде

(5.10) $\qquad u(t)=-c_1\sin t+c_2\cos t-c_3t+c_4$

Выражение для матрицы $R(T)$, определяемой вторым равенством (2.2) и (5.9), а следовательно, и решение системы (2.2) значительно упрощаются, если положить $T=2\pi k$, $k=1, 2, \ldots$ Тогда матрица $R(T)$ примет вид

$$R(T)=\begin{Vmatrix} {}^1/_2T & 0 & -T & 0 \\ 0 & {}^1/_2T & 0 & 0 \\ -T & 0 & {}^1/_3T^3 & -{}^1/_2T^2 \\ 0 & 0 & -{}^1/_2T^2 & T \end{Vmatrix}$$

Разрешим систему (2.2) с учетом полученного выражения для $R(T)$ и выразим компоненты вектора x^* через краевые условия (5.6), (5.7) при помощи соотношений (1.7), (5.8)

$$x_1^*=y^1-y^0, \quad x_2^*=v^1-v^0$$
$$x_3^*=z^1-Tw^1-z^0, \quad x_4^*=w^1-w^0 \quad (T=2\pi k)$$

Получим

(5.11) $$\begin{aligned} c_1 &= 2\,[T^2(y^1-y^0)+12\,(z^1-z^0)-6T\,(w^0+w^1)]S^{-1} \\ c_2 &= 2\,(v^1-v^0)T^{-1} \\ c_3 &= 6\,[4\,(y^1-y^0)+2\,(z^1-z^0)-T\,(w^0+w^1)]S^{-1} \\ c_4 &= 2\,[6T\,(y^1-y^0)+3T\,(z^1-z^0)-(T^2+12)w^1- \\ &\quad -2\,(T^2-6)w^0]S^{-1} \quad (S=T\,(T^2-24)) \end{aligned}$$

Осталось выбрать натуральное k в соотношении $T=2\pi k$ так, чтобы управление (5.10), (5.11) удовлетворяло ограничению $|u|\leqslant 1$ при $t\in[0, T]$. Имеем в силу (5.10), (5.11)

(5.12) $$\begin{aligned} |u(t)| &\leqslant |c_1|+|c_2|+|c_4-c_3t|\leqslant 2T^{-1}(T^2-24)^{-1}[T^2\times \\ &\times|y^1-y^0|+12\,|z^1-z^0|+6T\,|w^1+w^0|+(T^2- \\ &-24)|v^1-v^0|+6\,|y^1-y^0|\,|T-2t|+3\,|z^1-z^0|\,|T- \\ &-2t|+\psi(t)] \end{aligned}$$
$$\psi(t)=|(T^2+12)w^1+2\,(T^2-6)w^0-3Tt\,(w^1+w^0)|$$

Здесь $T = 2\pi k$, $k \leqslant 1$, поэтому $T^2 > 24$.

Функция $\psi(t)$ принимает наибольшее значение на одном из концов интервала $[0, T]$, следовательно

$$\psi(t) \leqslant \max\{\psi(0), \psi(T)\} = {}^1/_2 \max\{| 3T^2(w^0 + w^1) - (T^2 - 24)(w^1 - w^0)|, \ | 3T^2(w^0 + w^1) + (T^2 - 24)(w^1 - w^0)|\} = {}^3/_2 T^2 | w^0 + w^1 | + {}^1/_2 (T^2 - 24) | w^1 - w^0 |$$

Отметим еще, что $| T - 2t | \leqslant T$ при $t \in [0, T]$.

Учитывая сделанные оценки, из неравенства (5.12) получим

$$| u(t)| \leqslant T^{-1} [f_1(T)|y^1 - y^0| + 2 | v^1 - v^0 | + f_2(T)| w^1 + w^0 | + | w^1 - w^0 |] + 2T^{-2} f_2(T) | z^1 - z^0 | \tag{5.13}$$

$$f_1(T) = \frac{2T^2 + 12T}{T^2 - 24}, \quad f_2(T) = \frac{3T^2 + 12T}{T^2 - 24}$$

В правой части (5.13) заменим функции $f_1(T)$, $f_2(T)$, которые строго убывают при $T \geqslant T_1 = 2\pi$, их максимальными значениями при $T = T_1$ и в полученное неравенство подставим $T = 2\pi k$, $T_1 = 2\pi$. Получим

$$| u(t)| \leqslant Ak^{-1} + Bk^{-2} \tag{5.14}$$

$$A = \frac{\pi + 3}{\pi^2 - 6} | y^1 - y^0 | + \frac{1}{\pi} | v^1 - v^0 | + \frac{3(\pi + 2)}{2(\pi^2 - 6)} | w^1 + w^0 | + \frac{1}{2\pi} | w^1 - w^0 |, \quad B = \frac{3(\pi + 2)}{2\pi(\pi^2 - 6)} | z^1 - z^0 |$$

Из (5.14) следует, что ограничение $| u | \leqslant 1$ выполняется, если

$$k^2 - Ak - B \geqslant 0$$

т. е. при условии

$$T = 2\pi k, \quad k \geqslant k^* = {}^1/_2 [A + (A^2 + 4B)^{1/2}] \tag{5.15}$$

Формулы (5.10), (5.11) вместе с соотношениями (5.15) для T и (5.14) для A, B полностью определяют искомое управление $u(t)$ в явном виде через начальное и конечное состояния.

Рассмотрим частный случай краевых условий (5.6), (5.7)

$$y^0 = v^0 = z^0 = w^0 = y^1 = v^1 = w^1 = 0 \tag{5.16}$$

отвечающий перемещению всей системы, показанной на фиг. 1, 2, из состояния равновесия в состояние равновесия на расстояние z^1. В случае (5.16) оптимальное по быстродействию управление релейно ($u = \pm 1$) и имеет три точки переключения [5]. Время быстродействия T^0 — единственный положительный корень уравнения

$${}^1/_4 (T^0)^2 - 2 \{\arccos [\cos^2 ({}^1/_4 T^0)]\}^2 = | z^1 |$$

причем справедливы соотношения

$$T^0 \geqslant 2 | z^1 |^{1/2}, \quad T^0 \sim 2 | z^1 |^{1/2} \text{ при } | z^1 | \to \infty \tag{5.17}$$

Сравним этот результат с временем перемещения для закона управления (5.10). По формулам (5.14)—(5.16) имеем

$$T = 2\pi (\operatorname{ent} k^* + 1), \ k^* = B^{1/2} = 0,\ 7965 | z^1 |^{1/2}$$

Отсюда при больших $| z^1 |$ получим

$$T \sim 5{,}005 | z^1 |^{1/2}, \quad | z^1 | \to \infty \tag{5.18}$$

Если же воспользоваться непосредственно оценкой (5.13) в случае (5.16) при $| z^1 | \to \infty$, то найдем

$$T \sim [2f_2(\infty) | z^1 |]^{1/2} = 6^{1/2} | z^1 |^{1/2} = 2{,}449 | z^1 |^{1/2}, \quad | z^1 | \to \infty \tag{5.19}$$

Сравнивая формулы (5.17)—(5.19) для T^0, T, видим, что при $| z^1 | \to \infty$ они различаются коэффициентами, что обусловлено как отличием управления (5.10) от оптимального, так и мажорированием, проведенным при выводе оценки (5.14). Заметим, что оценка (5.19) значительно ближе к (5.17) по сравнению с оценкой (5.18) именно за счет уменьшения «потерь» при мажорировании.

В заключение отметим, что при произвольных краевых условиях оптимальные по быстродействию управления для рассмотренных в пп. 3—5 задач неизвестны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. // Тр. 1-го конгр. Международной федерации по автоматич. управлению (IFAC). М.: Изд-во АН СССР. 1961. Т. 2. С. 521—547.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир. 1971. 400 с.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976. 392 с.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.
5. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. 1980. 383 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1987