Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 531.36

К СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Красинский А. Я., Ронжин В. В.

Рассматриваются вопросы стабилизации установившихся движений голономных систем с циклическими координатами в случаях, когда по существу изучаемой системы не требуется экспоненциальной устойчивости по всем фазовым переменным. Показана возможность упрощения системы стабилизации посредством приложения управлений (по типу обратной связи) лишь по части циклических переменных. При этом управляющими воздействиями, приложенными по остальным циклическим переменным, обеспечивается только сохранение начального значения импульса.

Из исходных уравнений выделяется линейная подсистема, включающая управляемые циклические переменные, а для нее методами общей теории управления строятся управляющие воздействия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость по фазовым переменным управляемой подсистемы. Устойчивость относительно всех фазовых переменных исходной системы устанавливается сведением задачи к особенному случаю. При малой размерности управляемой подсистемы коэффициенты управления находятся аналитически, а при большой размерности могут быть найдены на ЭВМ со стандартным математическим обеспечением по методике, предложенной Ю. М. Репиным и и В. Е. Третьяковым [1].

Стабилизация систем с циклическими координатами приложением сил по этим координатам впервые рассматривалась [2] с позиций второго метода Ляпунова [3] и общей теории управления [1]. За управления принимались циклические импульсы, и при этом достигалась асимптотическая устойчивость по позиционным координатам и скоростям; отмечалась возможность управления силами, приложенными по циклическим координатам. Был проведен [4, 5] качественный анализ задачи о стабилизируемости установившихся движений голономных систем силами, приложенными по циклическим координатам.

1. Рассмотрим механическую систему, стесненную нестационарными геометрическими связями и находящуюся под действием потенциальных сил. Положение системы определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, среди которых $n-k$ циклические, и кинетическая энергия имеет вид

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = {}^1\!/_2 \sum_{r,j=1}^{n} a_{rj}(q)\, q_j^{\boldsymbol\cdot} q_r^{\boldsymbol\cdot}, \quad T_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j(q)\, q_j^{\boldsymbol\cdot}$$

$$T_0 = T_0(q), \quad q' = (q_1, \ldots, q_k)$$

Будем считать, что индексы изменяются следующим образом: $j = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, k$; $\alpha, \beta = k+1, \ldots, n$; $\mu = k+1, \ldots, k+m$; $\nu = k+m+1, \ldots, n$.

Примем за переменные, характеризующие состояние системы, переменные Рауса

$$q_1, \ldots, q_n,\; q_1^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, q_k^{\boldsymbol\cdot},\; p_{k+1}, \ldots, p_n$$

$$\left(p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha^{\boldsymbol\cdot}} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} q_\beta^{\boldsymbol\cdot} + \sum_i a_{\alpha i} q_i^{\boldsymbol\cdot} + b_\alpha\right)$$

Введем функцию Рауса

$$R(q_1, \ldots, q_k, q_1^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, q_k^{\boldsymbol\cdot}, p_{k+1}, \ldots p_n) = T - \Pi(q) - \sum_\alpha p_\alpha q_\alpha^{\boldsymbol\cdot}$$

($\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы).

Уравнения движения запишем в форме уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0$$

Эта система допускает циклические интегралы и при определенных начальных условиях может совершать стационарные движения

(1.1) $$q_i = q_i^\circ = \text{const}, \quad q_i^{\cdot} = 0, \quad p_\alpha = \delta_\alpha = \text{const}$$

Рассмотрим возможность стабилизации по первому приближению стационарного движения (1.1) линейными управляющими воздействиями, приложенными по m циклическим координатам и ($m \leqslant n - k$), и определим характер получаемой устойчивости.

Составим уравнения возмущенного движения с учетом возмущений циклических импульсов, полагая

$$q_i = q_i^\circ + x_i, \quad p_\mu = \delta_\mu + x_\mu, \quad p_\nu = \delta_\nu + f_\nu$$

В первом приближении получим [6]

(1.2) $$Ax_1^{\cdot} + Gx_1 + \Gamma_1 r^{\cdot} + Cx + H_1 r + \Gamma_2 f^{\cdot} + H_2 f = \Phi(x, x_1, r, f)$$
$$x^{\cdot} = x_1, \quad r^{\cdot} = 0, \quad f^{\cdot} = 0$$

где $A, G, \Gamma_1, C, H_1, \Gamma_2, H_2$ — постоянные матрицы, известным образом выражающиеся через матрицу коэффициентов кинетической энергии и обобщенные силы; $\Phi(x, x_1, r, f)$ — нелинейные члены.

Приложим по переменным r_μ линейные управляющие силы $u_\mu(x, x_1, r)$ и рассмотрим следующую линейную управляемую подсистему уравнений:

(1.3) $$Ax_1^{\cdot} + Gx_1 + \Gamma_1 r^{\cdot} + Cx + H_1 r = 0, \quad x^{\cdot} = x_1, \quad r^{\cdot} = u$$

Достаточным условием существования управления $u = \| u_\mu(x, x_1, r) \|$, решающего задачу стабилизации нулевого решения системы (1.3) при условии минимума функционала

(1.4) $$I = \int_{t_0}^{\infty} [\Omega_1(x, x_1, r) + \Omega_2(u)]\, dt$$

где Ω_1 и Ω_2 — определенно-положительные квадратичные формы, является условие

(1.5) $$\operatorname{rank} W = \operatorname{rank}\{Q, PQ, \ldots, P^{2k+m-1}Q\} = 2k + m$$

$$Q = \begin{Vmatrix} -A^{-1}\Gamma_1 \\ 0 \\ E_m \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} -A^{-1}G & -A^{-1}C & -A^{-1}H_1 \\ 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Оптимальное управление имеет следующую структуру [1]:

(1.6) $$u^\circ = S_1 x_1 + S_2 x + S_3 r, \quad S_1 = \| S_{\mu i}^1 \|, \quad S_2 = \| S_{\mu i}^2 \|, \quad S_3 = \| \; S \; \|$$

При этом все корни характеристического уравнения линейной системы (1.3) будут иметь отрицательные действительные части.

Система уравнений (1.2) с приложенными по переменным r_μ управлениями u_μ° и ее характеристическое уравнение приобретают вид

(1.7) $$Ax_1^{\cdot} + Gx_1 + \Gamma_1 r^{\cdot} + Cx + H_1 r + \Gamma_2 f^{\cdot} + H_2 f = \Phi(x, x_1, r, f)$$
$$x^{\cdot} = x_1, \quad r^{\cdot} = S_1 x_1 + S_2 x + S_3 r, \quad f^{\cdot} = 0$$

$$\lambda^{n-m-k} \det \begin{Vmatrix} A\lambda^2 + G\lambda + C & \Gamma_1\lambda + H_1 \\ -S_1\lambda - S_2 & E_m\lambda - S_3 \end{Vmatrix} = 0$$

причем $n - m - k$ корней характеристического уравнения нулевые, а действительные части всех остальных корней в силу выбора управляющих воздействий отрицательны.

Рассмотрим функции w и v, заданные неявно системой уравнений

(1.8) $$Cw(f) + H_1 v(f) + H_2 f = \Phi_1(f), \quad S_2 w(f) + S_3 v(f) = 0$$

Здесь $\Phi_1(f) = \Phi(w, 0, v, f)$ — нелинейные члены, содержащие свободно входящие критические переменные f.

В силу выбора управления (1.6), по теореме существования неявных функций уравнения (1.8) в окрестности точки $w = 0$, $v = 0$, $f = 0$ определяют w и v как непрерывные функции переменной f. Сделав замену Ляпунова [7] $x = \xi + w(f)$, $r = \eta + v(f)$, получим из (1.7) систему уравнений, удовлетворяющую всем условиям теоремы Ляпунова — Малкина [7, 8] об устойчивости в особенном случае $n - m - k$ нулевых корней. Тем самым доказана

Теорема. Если ранг матрицы W, определенной выражением (1.5), равен $2k + m$, то управление (1.6), решающее задачу оптимальной стабилизации нулевого решения линейной управляемой подсистемы (1.3) при условии минимума функционала (1.4), решают задачу стабилизации нулевого решения системы (1.2).

В силу доказательства теоремы движение будет асимптотически устойчивым по отношению к переменным ξ, η, x_1, но при переходе к первоначальным переменным получим асимптотическую устойчивость по x_1 и устойчивость по x, r, f.

Замечания. 1°. В отличие от рассматриваемой (идеальной) механической системы в реальных условиях, как правило, неучтенные диссипативные силы препятствуют сохранению неуправляемых циклических импульсов. При этом в систему приходится вводить вспомогательные приводы, компенсирующие рассеивание энергии, например по типу управления с обратной связью. В то же время эти приводы во многих случаях могут быть устроены достаточно просто: например, в установившемся режиме постоянство числа оборотов ротора гироскопа достигается подачей постоянного напряжения на приводной двигатель и не содержит никаких устройств обратной связи ([9], с. 380).

Кроме того, существует класс систем (см. пример 3), для которых диссипация практически отсутствует, т. е. условия, заложенные в постановку задачи, выполняются по физико-механическим и техническим свойствам системы.

2°. Отметим случай, когда $\Gamma_1 = 0$, например при гироскопической несвязанности исходной системы по управляемым переменным, а рассматриваемое стационарное движение таково, что на нем матрица H_1 обращается в нуль. Можно показать, что такое движение системы, как и в [4], не стабилизируемо линейными управляющими воздействиями, приложенными по выбранной части циклических координат.

3°. В случае, когда управления прикладываются по всем циклическим переменным ($m = n - k$), управляемая подсистема (1.3) превращается в систему уравнений первого приближения исходной системы (1.2), а найденные управления обеспечат стабилизацию до асимптотической устойчивости по всем переменным. При этом в случае движения, на котором $H \neq 0$, сохраняется возможность стабилизации стационарного движения для гироскопически несвязанных систем независимо от присутствия диссипативных сил, действующих по позиционным скоростям.

2. В общем случае в задачах большой размерности коэффициенты стабилизирующих воздействий, как уже отмечалось, можно определить при помощи ЭВМ. Для объектов же, у которых управляемая подсистема имеет небольшую размерность, задача полностью решается аналитически. Решим в общем виде задачу стабилизации стационарных движений голономных систем с одной позиционной и несколькими циклическими координатами.

Рассмотрим механическую систему, стесненную стационарными связями и находящуюся под действием потенциальных сил, положение которой описывается тремя обобщенными координатами q_1, q_2, q_3, из которых две, например q_2 и q_3, циклические. При определенных начальных условиях система может совершать стационарные движения

$$q_1 = q_1^\circ = \mathrm{const}, \quad p_2 = \delta_2 = \mathrm{const}, \quad p_3 = \delta_3 = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

Для рассматриваемой механической системы обращается в нуль матрица G. За управляемую переменную примем q_2. Уравнения возмущенного движения (1.7) имеют вид

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= cx + h_1 r + h_2 f + gu + \Phi(x, x_1, r, f) \\ x^{\cdot} &= x_1, \quad r^{\cdot} = u, \quad f^{\cdot} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где c, h_1, h_2, g — некоторые постоянные.

Управляемая линейная подсистема такова:

$$x_1^{\cdot} = cx + h_1 r + gu, \quad x^{\cdot} = x_1, \quad r^{\cdot} = u \tag{2.3}$$

В рассматриваемой задаче $\det W = h_1^2 - cg^2 = \Delta$.

Тогда в случае $\Delta \neq 0$ согласно доказанной теореме нулевое решение системы (2.2) стабилизируется управлением

$$v^\circ = \nu_1 x_1 + \nu_2 x + \nu_3 r$$

до асимптотической устойчивости по x_1 и, в общем случае, до устойчивости по x, r, f.

Заметим теперь, что уравнение управляемой линейной подсистемы (2.3) для голономной механической системы, описываемой двумя циклическими и одной позиционной координатами и находящейся под действием потенциальной силы в окрестности стационарного движения (2.1) совпадает с рассмотренной в примере [1] (с. 506) системой уравнений (113.15).

Тогда, приняв критерий качества переходного процесса в форме

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_1^2 + x^2 + r^2 + u^2)\, dt$$

и используя приведенные в [1] формулы (113.17) для коэффициентов оптимального управления, будем иметь

$$\begin{aligned} &\nu_1 = [g(a_3 + ca_1) - h_1(a_2 + c)]/\Delta, \quad \nu_2 = [g(a_2 + c) - \\ &- h_1(a_3 + ca_1)]/\Delta \\ &\nu_3 = [gh_1(a_2 + c) - h_1^2 a_1 - a_3 g^2]/\Delta, \quad a_1 = 1 + \sqrt{2c + g^2 + 2a_3} \\ &a_2 = a_1 - 1 + c^2 + h_1^2, \quad a_3 = \sqrt{c^2 + h_1^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пример 1. Исследуем возможность стабилизации указанным способом движения тяжелого гироскопа в совершенном кардановом подвесе с вертикальной осью вращения внешнего кольца [10].

Сохраняя обозначения [10], запишем кинетическую и потенциальную энергии и функцию Рауса гироскопа

$$\begin{aligned} &T = {}^1/_2\,[A(\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2}\sin^2\theta) + C(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)^2] + {}^1/_2 A_2\psi^{\cdot 2} + \\ &+ {}^1/_2\,[A_1\theta^{\cdot 2} + B_1\psi^{\cdot 2}\sin^2\theta + C\psi^{\cdot 2}\cos^2\theta], \quad \Pi = -Pz_0\cos\theta \\ &R = {}^1/_2\,(A + A_1)\,\theta^{\cdot 2} - W(\theta) \\ &W(\theta) = Pz_0\cos\theta + {}^1/_2\,(p_\varphi - p_\varphi\cos\theta)^2/Q(\theta) + {}^1/_2 p_\varphi^2/C \\ &Q(\theta) = (A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2 \end{aligned}$$

Циклическим координатам φ и ψ соответствуют интегралы

$$\begin{aligned} &p_\varphi = C(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta) = \mathrm{const} \\ &p_\varphi = [Q(\theta) + C\cos^2\theta]\,\psi^{\cdot} + C\cos\theta\varphi^{\cdot} = \mathrm{const} \end{aligned}$$

Гироскоп может совершать стационарные движения

$$\theta = \theta_0, \quad \theta^{\cdot} = 0, \quad p_\varphi = \delta_2 = \mathrm{const}, \quad p_\varphi = \delta_3 = \mathrm{const}$$

определяемые уравнением

$$\partial W/\partial\theta = \sin\theta\,\{[(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)/Q(\theta)]\,[p_\varphi - (p_\psi - p_\varphi\cos\theta)(A + B_1 - C_1)\cos\theta/Q(\theta)] - Pz_0\} = 0$$

Этому уравнению удовлетворяют три ветви стационарных движений, две из которых — прямые

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_0 = \pi \tag{2.5}$$

Будем прикладывать управление по координате φ. Коэффициенты c, h_1, h_2, g уравнений (2.2) определяются выражениями

$$c = \frac{1}{A+A_1}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}, \quad h_1 = \frac{1}{A+A_1}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta\partial p_\varphi}, \quad h_2 = \frac{1}{A+A_1}\frac{1}{\partial\theta\partial p_\psi}, \quad g = 0$$

Видно, что на стационарных движениях (2.5) обращаются в нуль коэффициенты h_1 и h_2, и следовательно, эти движения не стабилизируемы по первому приближению управляющей силой, приложенной по какой-либо циклической координате. Третья ветвь стационарных движений стабилизируется силой, коэффициенты которой определяются подстановкой c, h_1 и g в (2.4). При этом достигается асимптотическая устойчивость по $\theta^{\cdot}$ и устойчивость по θ, p_φ и p_ψ.

Была показана [2] управляемость в задаче стабилизации стационарного движения при $\theta_0 \neq 0$, $\theta_0 \neq \pi$ и неуправляемость при $\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pi$ для случая, когда в качестве управлений используются оба циклических импульса. При этом стабилизация рассматривалась в смысле достижения асимптотической устойчивости по θ и $\theta^{\cdot}$.

Пример 2. При анализе возможности стабилизации по первому приближению тривиальных [4] движений гироскопически связанных систем [5] рассматривалась задача о стабилизации тривиальных установившихся движений гироскопа в кардановом подвесе с направленным нарушением симметрии и вертикальной осью вращения внешнего кольца. На гироскоп кроме силы тяжести действует диссипативная сила по позиционной координате и стабилизирующие моменты приложены по обеим циклическим координатам.

Сохраняя обозначения [5], рассмотрим задачу оптимальной стабилизации по первому приближению установившихся движений такого гироскопа при отсутствии диссипации. Покажем, что стабилизацию можно осуществить управлением, приложенным только по одной какой-либо циклической координате, и выпишем коэффициенты таких управлений. Вводя циклические импульсы $p_1 = \partial T/\partial\psi^{\cdot}$ и $p_2 = \partial T/\partial\varphi^{\cdot}$, запишем функцию Рауса для рассматриваемой системы

$$R = {}^1/_2\,[a - \Delta^{-1}(\theta)(b_{22}c_1^2 - 2b_{12}c_1c_2 + b_{11}c_2^2)]\,\theta^{\cdot 2} + \Delta^{-1}(\theta)\,[(b_{22}c_1 - b_{12}c_2)\,p_1 + (b_{11}c_2 - b_{12}c_1)\,p_2]\,\theta^{\cdot} + (m_2 + m_3)\,gy_2\sin\varepsilon\cos\theta - {}^1/_2\Delta^{-1}(\theta)\,[b_{22}p_1^2 - 2b_{12}p_1p_2 + b_{11}p_2^2]$$

$$\Delta(\theta) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2, \quad b_{11} = b_{11}(\theta), \quad b_{12} = b_{12}(\theta), \quad c_1 = c_1(\theta)$$

Система допускает, в частности, движение

$$\theta_0 = 0, \quad p_1 = \delta_1 = \mathrm{const}, \quad p_2 = \delta_2 = \mathrm{const} \tag{2.6}$$

Коэффициенты уравнений (1.7) возмущенного движения в окрестности (2.6) имеют вид

$$A = a - \Delta^{-1}(0)\,[b_{22}c_1^2(0) - 2b_{12}(0)\,c_1(0)\,c_2 - b_{11}(0)\,c_2]$$
$$C = (m_3 + m_2)\,gy_2\sin\varepsilon + {}^1/_2\,\{\Delta^{-1}(0)\,[(V_1 + 2V_3)\,\delta_1^2 - 2V_2\delta_1\delta_2] - \Delta^{-2}(0)\,[(V_1 + 2V_3)\,A_0 + 2V_2(V_4 - V_2)]\,d_0\}, \quad G = 0$$
$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \Gamma_1 = \Delta^{-1}(0)\,[b_{22}c_1(0) - b_{12}(0)\,c_2]$$
$$\Gamma_2 = \Delta^{-1}(0)\,[b_{12}(0)\,c_1(0) + b_{11}(0)\,c_2], \quad V_2 = A_0\sin\varepsilon$$
$$V_1 = [G_2 + (B_0 - A_0)\,\lambda\mu + m_3x_1y_1]\sin 2\varepsilon$$
$$V_3 = [B_2 - C_2 + (A_0 - B_0)\,\mu^2 + m_3(z_1^2 - y_1^2)]\sin^2\varepsilon$$
$$V_4 = A_0\cos\varepsilon, \quad d_0 = b_{22}\delta_1^2 - 2b_{12}(0)\,\delta_1\delta_2 + b_{11}(0)\,\delta_2^2$$

Условие управляемости при стабилизации моментом, прикладываемым вокруг оси внешнего кольца, т. е. по координате ψ, выполняется, если $C\Gamma_1 \neq 0$. Если же стабилизирующий момент приложен вокруг оси ротора гироскопа, т. е. по координате φ, условие управляемости выполняется при $C\Gamma_2 \neq 0$. Очевидно, эти условия, вообще говоря, выполняются. Коэффициенты управления $u_1 = \nu_{11}x_1 + \nu_{12}x + \nu_{13}y_1$, стабилизирующего движения (2.6) оптимально в смысле критерия I_1, и коэффициенты управления $u_2 = \nu_{21}x_1 + \nu_{22}x + \nu_{23}y_2$, стабилизирующего те же движения оптимально в смысле критерия I_2, находятся из формул (2.4) после подстановки туда вместо g соответственно Γ_1/A и Γ_2/A. Здесь

$$I_\omega = \int_0^\infty (x_1^2 + x^2 + y_\omega^2 + u_\omega^2)\,dt, \quad \omega = 1,2$$

При этом обеспечивается асимптотическая устойчивость по позиционной скорости $\theta^\cdot$ и устойчивость по θ и остальным скоростям. Отметим, что этим способом сразу находятся управления для стабилизации произвольного установившегося движения (2.6) в том числе и для равновесия; достаточно в коэффициентах оптимального управления положить $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$.

Замечание. В примерах 1 и 2 гироскопы рассматривались при отсутствии диссипации. При действии диссипативных сил всегда есть привод, компенсирующий действие сил сопротивления вокруг оси ротора и поддерживающий (в установившемся режиме) постоянной угловую скорость собственного вращения. Поэтому естественно прикладывать стабилизирующий момент по второй циклической координате ψ, т. е. вокруг оси внешней рамки. Очевидно, учет диссипации и по $\psi^\cdot$, и по $\theta^\cdot$ не вызовет принципиальных затруднений.

Пример 3. Рассмотрим движущийся по инерции вдали от центра притяжения космический аппарат (КА), представляющий собой симметричное твердое тело с управляемым маховиком, ось собственного вращения которого направлена по оси динамической симметрии. После выполнения последнего маневра КА совершает некоторое остаточное движение вокруг центра масс. Поставим задачу о приведении этого движения к прецессии, используя момент, создаваемый при помощи маховика.

Движение КА вокруг центра масс будем описывать углами Эйлера θ, ψ, φ и углом α поворота ротора относительно корпуса. Функция Лагранжа рассматриваемой системы как свободного уравновешенного гиростата такова:

$$L = {}^1/_2 A\theta^{\cdot 2} + {}^1/_2 A \sin^2\theta\psi^{\cdot 2} + {}^1/_2 C(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta)^2 + \\ + \psi^\cdot\alpha^\cdot J\cos\theta + J\alpha^\cdot\varphi^\cdot + {}^1/_2 J\alpha^{\cdot 2}$$

Здесь $A = B$, C — главные центральные моменты инерции гиростата; J — осевой момент инерции ротора.

Введем импульсы

$$\partial L/\partial\psi^\cdot = A\sin^2\theta\psi^\cdot + C(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta)\cos\theta + J\cos\theta\alpha^\cdot = p_1, \quad \partial L/\partial\varphi^\cdot = \\ = C(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta) + J\alpha^\cdot = p_2, \quad \partial L/\partial\alpha^\cdot = \psi^\cdot J\cos\theta + J\varphi^\cdot + J\alpha^\cdot = p_3$$

и функцию Рауса

$$R = \frac{1}{2}A\theta^{\cdot 2} - \frac{1}{2}\left[\frac{(p_1 - p_2\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{p_2^2}{C-J} - \frac{2p_2p_3}{C-J} + \frac{Cp_3^2}{J(C-J)}\right]$$

Уравнения движения КА вокруг центра масс

$$A\theta^{\cdot\cdot} = A^{-1}\sin^{-3}\theta(p_1 - p_2\cos\theta)(p_2 - p_1\cos\theta) \\ p_1^\cdot = 0, \quad p_2^\cdot = 0, \quad p_3^\cdot = 0 \tag{2.7}$$

допускают следующее стационарное движение:

$$\psi_0^\cdot = 0, \quad p_1 = C\varphi_0^\cdot\cos\theta_0 + J\cos\theta_0\alpha_0^\cdot = k_1 = \text{const}, \quad \sin\theta_0 \neq 0 \\ p_2 = C\varphi_0^\cdot + J\alpha_0^\cdot = k_2 = \text{const}, \quad p_3 = J(\varphi_0^\cdot + \alpha_0^\cdot) = k_3 = \text{const}$$

Рассмотрим задачу о приведении остаточного движения КА к прецессионному движению как задачу стабилизации движения (2.8). Вводя возмущения

$$\theta = \theta_0 + x, \quad p_1 = k_1 + y_1, \quad p_3 = k_3 + y_3 \\ \theta^\cdot = x_1, \quad p_2 = k_2 + y_2 \tag{2.8}$$

и выделяя первое приближение, из (2.7) будем иметь

$$x^\cdot = x_1, \quad x_1^\cdot = ax + by_1 + cy_2 + X(x, x_1, y_1, y_2) \\ y_1^\cdot = 0, \quad y_2^\cdot = u, \quad y_3^\cdot = -u \\ a = \frac{k_2^2}{A^2}, \quad b = \frac{k_2}{A^2\sin\theta_0}, \quad c = -\frac{\cos\theta_0 k_2}{A^2\sin\theta_0} \tag{2.9}$$

где u — момент, действующий со стороны ротора на корпус КА (например, реактивный момент статора приводного двигателя маховика), X — нелинейные члены. Выделим управляемую подсистему

$$x^{\cdot} = x_1, \quad x_1^{\cdot} = ax + cy_2, \quad y_2^{\cdot} = u$$

Условие управляемости для нее выполнено, если $c \neq 0$, т. е. при $\cos\theta_0 \neq 0$ и $C\varphi_0^{\cdot} + J\alpha_0^{\cdot} \neq 0$ существует линейное управление

$$u = m_1 x + m_2 x_1 + m_3 y_2 \tag{2.10}$$

такое, что отличные от нуля корни характеристического уравнения системы первого приближения уравнений (2.9) имеют отрицательные действительные части. Эти корни соответствуют переменным x, x_1, y_2.

В полной системе (2.9) имеем критический случай двух нулевых корней. Для сведения этого случая к особенному нужно выполнить замену

$$x = \xi + v_1(y_1), \quad y_2 = \eta + v_2(y_1)$$

причем функции v_1, v_2 определяются системой уравнений

$$av_1 + by_1 + cv_2 + X(v_1, 0, y_1, v_2) = 0, \quad m_1 v_1 + m_3 v_2 = 0$$

которая всегда разрешима относительно v_1, v_2, если выполнено условие управляемости.

Таким образом, существует линейный управляющий момент (2.10), стабилизирующий движение (2.8) до асимптотической устойчивости по $\theta^{\cdot}$ и устойчивости по θ, p_1, p_2, p_3. Вводя критерий качества

$$\int_0^\infty (x^2 + x_1^2 + y_2^2 + u^2)\, dt$$

можно аналогично предыдущему (см. (2.4)) явно выписать коэффициенты m_1, m_2, m_3 этого управления.

Отметим, что управляемая подсистема из четырех или пяти уравнений в этой задаче оказывается неуправляемой скалярным управлением, если даже оно будет зависеть от всех фазовых переменных задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. С. 475—514.
2. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966—976.
3. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440—456.
4. *Самсонов В. А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 512—520.
5. *Клоков А. С., Самсонов В. А.* О стабилизируемости тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 199—202.
6. *Красинская Э. М., Ронжин В. В.* К стабилизации стационарных движений голономных механических систем // Изв. АН УзССР. Сер. техн. н. 1983. Вып. 1. С. 33—36.
7. *Ляпунов А. М.* Собр. Соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР. 1956. 473 с.
8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 530 с.
9. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир. 1974. 526 с.
10. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе / ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 374—378.

Ташкент

Поступила в редакцию
23.II.1987